Universidad Politécnica de Cartagena

Sistema de partículas

Juan Francisco Sánchez Pérez

1 Sistema de partículas

Sistema de partículas

Se define un sistema de partículas como un conjunto de partículas que se pueden suponer puntuales y cuyas propiedades globales queremos estudiar.

La notación que utilizaremos será la siguiente: el número total de partículas lo denotaremos como N; cada partícula tendrá un subíndice i que puede tomar los valores i=1,…,N. Cada partícula estará descrita por su masa m_i y su posición $\mathbf{r}_i$.

Las partículas interaccionan entre sí y con el resto del universo. Por lo tanto, la fuerza total que actúa sobre una partícula será el resultado de las fuerzas externas (producidas por una causa ajena al sistema) e internas (producidas por las demás partículas).

Centro de masas

Se define el centro de masas de un sistema de partículas como el punto cuya posición es la siguiente

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M}$$

con N el número de partículas y M la masa total del sistema.

Una definición del centro de masas sería la de la posición media de las partículas, ponderadas según sus masas

$$X_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \qquad Y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \qquad Z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}$$

Centro de masas

Cuando hay un número tan grande de partícula que no podemos distinguirlas, consideramos el sistema como continuo. En este caso, el sumatorio se concierte en una integral, de la forma:

$$X_{CM} = \frac{\int x\rho(r)dV}{M} \qquad Y_{CM} = \frac{\int y\rho(r)dV}{M} \qquad Z_{CM} = \frac{\int z\rho(r)dV}{M}$$

Siendo ρ la densidad del cuerpo, que es función en general de la posición, aunque en la mayoría de los casos que nos ocupan, estudiaremos cuerpos homogéneos en los que está será constante.

dV se refiere a los elementos infinitesimales de volumen sobre los que sumamos. También hemos hecho uso de la definición de densidad para sustituir

$$M = \int \rho(r)dV$$

Hemos enunciado el caso general en tres dimensiones; cuando tengamos un cuerpo en dos dimensiones (superficie) o en una, la integral correspondiente será de elementos infinitesimales de superficie o longitud.

Universidad Politécnica de Cartagena

2 Dinámica del centro de masas

Dinámica del centro de masas

Puesto que podemos describir la dinámica de cada una de las partículas que forman el sistema por separado, veamos si podemos describir la dinámica del centro de masas en función de ellas.

Velocidad del centro de masas

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

La velocidad del centro de masas se puede entender como la velocidad del sistema en su conjunto (aunque individualmente cada partícula pueda tener comportamientos diferentes).

Aceleración del centro de masas

$$\vec{A}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

F$_i$ es la fuerza total sobre cada partícula, esto es la suma de las fuerzas externas más internas.

Recordando el principio de acción y reacción, la fuerza que ejerce una partícula sobre una segunda es la misma que la que ejerce esta segunda sobre la primera, en sentidos contrarios.

Por lo tanto, cuando se suman todas las fuerzas del sistema, las internas (debidas a interacciones entre las partículas del sistema, se anularán).

$$\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,ext} = \frac{\vec{F}^{\,ext}}{M}$$

Definimos $\vec{F}^{ext}$ como la suma vectorial de todas las fuerzas externas aplicadas sobre el sistema.

$$\vec{F}^{ext} = M\vec{A}_{CM}$$

Este resultado es importante, pues nos dice que el movimiento del **centro de masas** es igual al que tendría una partícula cuya masa sea la total del sistema y sobre la que se le aplica una fuerza igual a la suma de las fuerzas externas aplicadas sobre el sistema.

Estos resultados justifican el que considerásemos los cuerpos como partículas puntuales.

Dinámica del sistema de partículas

Momento lineal de un sistema

El momento lineal de un sistema es la suma de los momentos de cada una de las partículas

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = M\vec{V}_{CM}$$

y su derivada temporal se relaciona con la fuerza aplicada de este modo

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\,\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = M\vec{A}_{CM} = \vec{F}^{\,ext}$$

De esta ecuación se deduce la conservación del momento lineal para un sistema de partículas. Si la fuerza externa es cero (sistema aislado) el momento lineal se conserva (independientemente de las fuerzas internas)

Momento angular de un sistema

El momento angular de un sistema es la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i x \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i$$

Siendo **F**i la fuerza total que actúa sobre cada partícula suma de la fuerza externa más la de interacción con las otras partículas.

Se puede demostrar cómo, al realizar esta suma para todas las partículas, existen productos vectoriales de la forma $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) x \vec{F}_{ij}$, siendo estos el producto de dos vectores en la misma dirección y por lo tanto igual a cero

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{ext} = \vec{\tau}^{ext}$$

De aquí podemos deducir la ley de conservación del momento angular, que dice que el momento angular con respecto aun punto de un sistema de partículas aislado, o en el que el momento total de las fuerzas externas respecto a dicho punto sea igual a cero, se conserva

Energía de un sistema de partículas

El trabajo total para ir desde un punto A a otro B será igual a la variación de energía cinética

$$W_T(A \rightarrow B) = E_c(B) - E_c(A)$$

El trabajo total engloba al producido por las fuerzas externas y las internas.

$$W_T = \sum_{i=1}^{N} W_i^{ext}(A \rightarrow B) + \sum_{i>j}^{N} W_{ij}^{\text{int}}(A \rightarrow B)$$

La suma de los trabajos internos sólo se realiza una vez por cada par de partículas, por eso el sumatorio es para i>j; podríamos sumar para todo i y para todo j y dividir entre dos, es equivalente

Conservación de la energía

Suponiendo que tanto las fuerzas externas aplicadas como las internas entre las partículas son conservativas, podemos definir energías potenciales asociadas y, por lo tanto, en un punto dado la energía potencial del sistema será

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i^{ext} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} U_{ij}^{\text{int}}$$

$$W_T = \sum_{i=1}^{N} U_i^{ext}(A) - \sum_{i=1}^{N} U_i^{ext}(B) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} U_{ij}^{\text{int}}(A) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} U_{ij}^{\text{int}}(B)$$

Conservación de la energía

$$U(A)+E_c(A)=U(B)+E_c(B)$$

definiendo la energía del sistema como potencial más cinética, podemos concluir que ésta es una constante, se conserva, mientras que las fuerzas implicadas, externas e internas, sean conservativas

$$E_T = E_c + U = constante$$

3 Choques entre cuerpos

Choques entre dos cuerpos

Consideramos como choques o colisiones entre dos cuerpos a:

- dos cuerpos chocan y no intercambian masa
- un cuerpo se descompone en dos
- dos cuerpos chocan y permanecen unidos
- Dos cuerpos chocan e intercambian masa

En todos los casos anteriores, si se consideran como sistemas de partículas se puede aplicar la **conservación del momento lineal y de la energía para extraer información de la evolución del sistema**.

En cualquiera de estos casos, el momento lineal se conserva y tenemos que:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1'\vec{v}_1' + m_2'\vec{v}_2'$$

con ‘ a las partículas después del choque

Choques entre dos cuerpos

En cualquiera de los casos también se conserva la energía total, pero el hecho de que haya un cambio en la energía interna (llamémosle ΔE_{int}) que no siempre es fácilmente calculable, hace más difícil su aplicación práctica.

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1'\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2'\vec{v}_2'^2 + \Delta E_{int} + +\Delta U$$

Cuando las partículas no cambian su forma y masa, y ni se desprende calor, se tiene que $\Delta E_{int} = 0$. En ese caso el choque se denomina elástico y la conservación de la energía nos da información directa sobre el choque. En caso contrario el choque es inelástico.

Bibliografía

SÁNCHEZ PÉREZ, JUAN FCO.; ALHAMA LÓPEZ, FRANCISCO Problemas de física para ingenieros (Tomo 2). Cartagena: Crai UPCT Ediciones, 2016. ISBN 978-84-16325-22-1

TIPLER, PAUL ALLEN Física para la ciencia y la tecnología. Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica; Reverté, 2012. ISBN 97-88429144-29-1

BURBANO DE ERCILLA SANTAGO Problemas de Física. Madrid: Tebar. 2007. 815 p. ISBN 978-84-95447-27-2

FERNÁNDEZ, M.R. 1000 problemas de física general mecánica, electricidad, electromagnetismo, ondas, electrónica, relatividad, radiactividad, termodinámica: Bachillerato, LOGSE, Pruebas de acceso a la Universidad, Escuelas Técnicas, Facultades Universitarias. Everest, 2007. ISBN 97-88424176-03-7

SÁNCHEZ PÉREZ, JUAN FCO.; CONESA VALVERDE, MANUEL; CASTRO RODRÍGUEZ, ENRIQUE. Prácticas de física para ingenieros: Física I: errores, cinemática, dinámica, estática, fluidos, Cartagena: Universidad Politécnica de Cartagena, 2017. ISBN 97-88416325-36-8