Universidad Politécnica de Cartagena

Cinemática
Movimiento relativo

Juan Francisco Sánchez Pérez

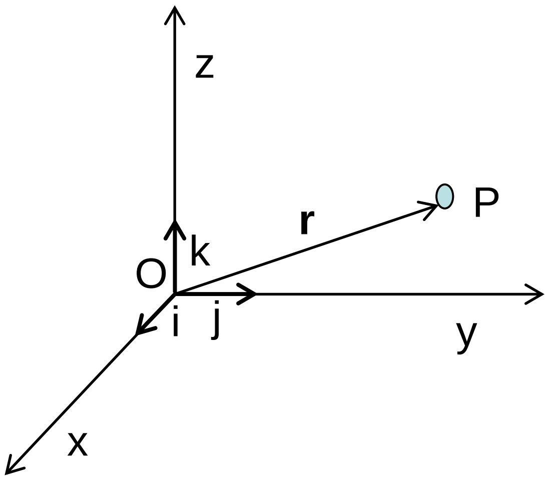
Universidad Politécnica de Cartagena

1 Conceptos generales

Posición, trayectoria y desplazamiento

Una vez que definimos nuestro sistema de referencia, la posición de un punto P puede ser descrita por el vector **OP** que va desde el origen O al punto P. Ese vector es el vector posición **r**, que tendrá unas coordenadas x, y, z

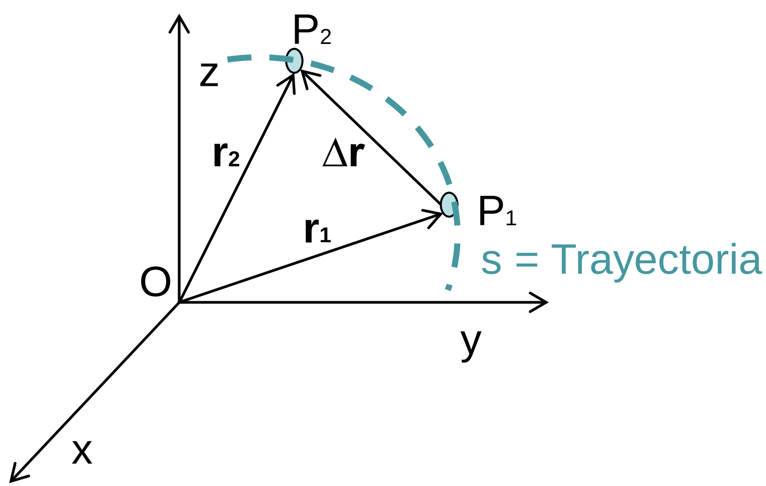
$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$



Posición, trayectoria y desplazamiento

Podemos conocer la trayectoria que sigue el cuerpo si conocemos la evolución de x, y, z en función del tiempo. El extremo del vector posición va describiendo la trayectoria del punto.

Si en dos instantes t_1 y t_2, la partícula se encuentra en las posiciones $r_1(x_1,y_1,z_1)$ y $r_2(x_2,y_2,z_2)$, definimos el **desplazamiento (Δr)** como la resta de esos dos vectores.



$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

Velocidad media e instantánea

Definimos la velocidad media de un cuerpo entre dos puntos como su vector desplazamiento entre el tiempo empleado para recorrerlo.

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

La dirección de la velocidad media es la misma que la del desplazamiento, y su módulo nos da una idea de la rapidez con que se ha recorrido esa distancia.

Sin embargo, este concepto tiene un par de limitaciones:

- no nos informa sobre si ha habido variaciones de velocidad entre esos dos instantes,
- no está directamente relacionada con la distancia recorrida, ya que ésta difiere del vector desplazamiento.

Velocidad media e instantánea

Para evitar estos inconvenientes, se define la velocidad instantánea, que es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo que escogemos es cada vez más pequeño, es decir, la derivada del vector de posición respecto del tiempo, y se suele representar como v.

$$\vec{v} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k = v_x i + v_y j + v_z k$$

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

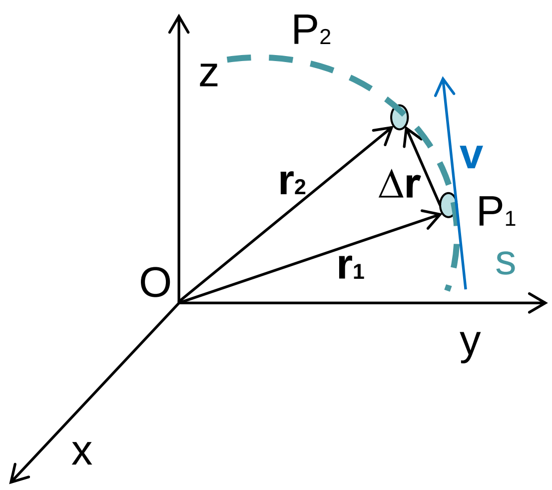
Velocidad media e instantánea

La velocidad instantánea coincide con la dirección tangente a la trayectoria

$$\vec{v} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k = v_x i + v_y j + v_z k$$

u_t es el vector unitario tangente a la trayectoria

$$v = \lim_{t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{t\to 0}\frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$



$$\vec{v} = v\,\widehat{u_t}$$

Aceleración media e instantánea

Definimos la aceleración media de un cuerpo entre dos puntos como su vector velocidad entre el tiempo empleado para recorrerlo.

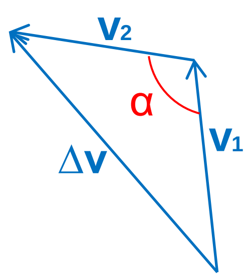
$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

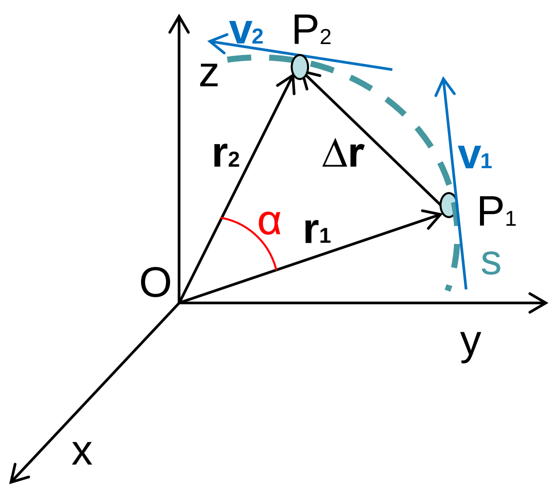
$$\vec{a} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}i + \frac{dv_y}{dt}j + \frac{dv_z}{dt}k = a_x i + a_y j + a_z k$$

Componentes intrínsecas de la aceleración

$$\vec{v} = v\,\widehat{u_t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\,\widehat{u_t})}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\widehat{u_t} + v\,\frac{d\,\widehat{u_t}}{dt}$$

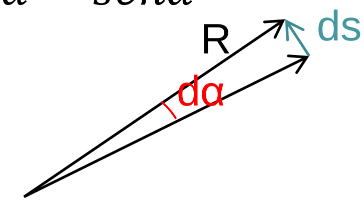




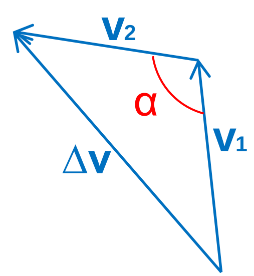
Componentes intrínsecas de la aceleración

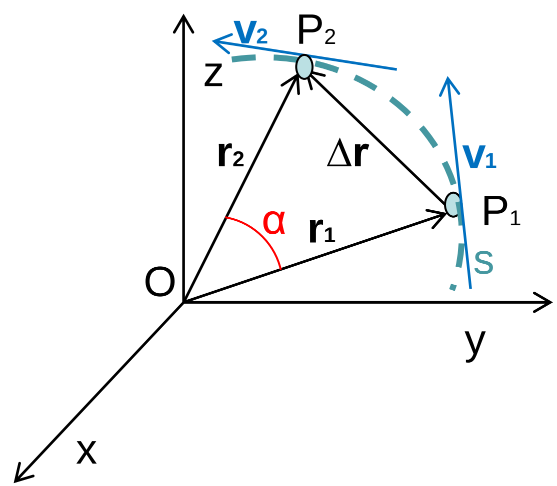
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\,\widehat{u_t})}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\widehat{u_t} + v\frac{d\,\widehat{u_t}}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\hat{u}_t}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{u}_n\frac{1}{R}v \qquad d\alpha = \frac{ds}{R} \qquad d\alpha \approx sen\alpha$$



donde R es el radio de curvatura y **u_n** es el vector normal a la trayectoria





Componentes intrínsecas de la aceleración

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{R}\hat{u}_n$$

Aceleración tangencial (**a**$_t$)

Tiene la misma dirección que la velocidad, es decir, tangente a la trayectoria. Afecta al módulo de la aceleración

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Aceleración normal (**a**$_n$)

Tiene dirección perpendicular a la velocidad y afecta a cómo cambia la dirección de la velocidad.

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

2 Movimientos

Movimiento con aceleración constante

Empecemos por considerar el caso más sencillo, un movimiento en una dimensión. Tenemos una partícula que sabemos que se mueve con aceleración constante; para describir su movimiento debemos conocer su velocidad y su posición en cualquier momento. Si tenemos una partícula con aceleración constante , su aceleración media en cualquier momento es:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 + at$$

$$\Delta x = x - x_0 = v_m \Delta t = v_m t$$

$$v_m = \frac{(v_0 + v)}{2}$$

$$\Delta x = x - x_0 = v_m t = \frac{(v_0 + v)t}{2} = \frac{(v + v_0 + at)t}{2} = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Posición $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

Velocidad $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

Aceleración $\vec{a} = cte$

Tiro parabólico

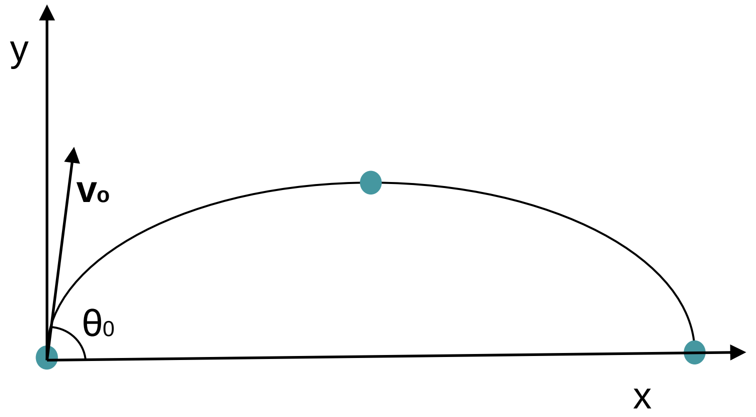
En este caso tenemos un movimiento en dos dimensiones x (dirección del suelo) e y (altura).

$$a_x = 0$$
$$a_y = -g$$

$$v_x = v_{0x}$$
$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$x = x_0 + v_{0x}t$$

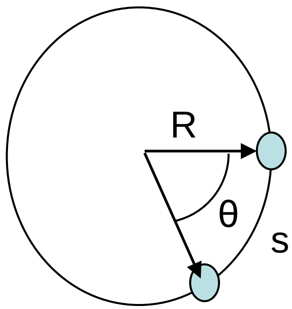
$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$
$$v_{0y} = v_0 sen\theta_0$$



Movimiento con aceleración constante

Este movimiento corresponde a un cuerpo cuya trayectoria es una circunferencia que recorre una y otra vez. Es un caso particular de una trayectoria que se curva, pero con un radio constante.

$$s = R\theta$$



Definimos entonces la velocidad angular ω como el ángulo recorrido en función del tiempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} x \vec{R}$$

Siendo **R** el vector posición tomando como origen el centro de la circunferencia

Movimiento con aceleración constante

A partir de la velocidad angular podemos definir una aceleración angular como su derivada respecto al tiempo.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Las componentes intrínsecas de la aceleración lineal en función de las magnitudes angulares serían

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

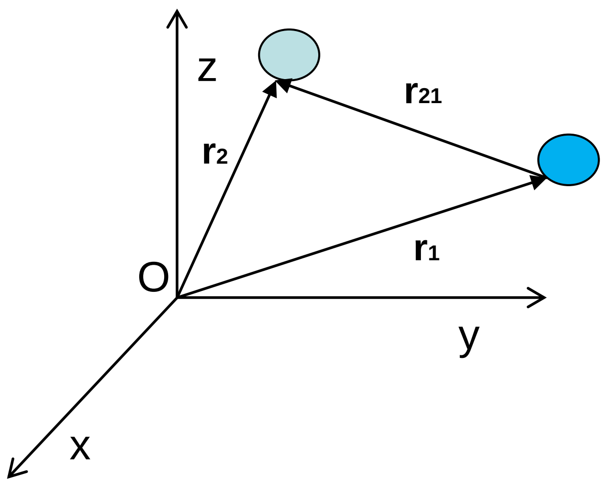
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$$

3 Movimiento relativo

Movimiento relativo. Composición de movimientos.

El tema de movimientos relativos es conceptualmente sencillo si se trabajan con soltura las operaciones entre vectores.

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



$$\vec{v}_{21} = \frac{d\vec{r}_{21}}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\vec{a}_{21} = \frac{d\vec{v}_{21}}{dt} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

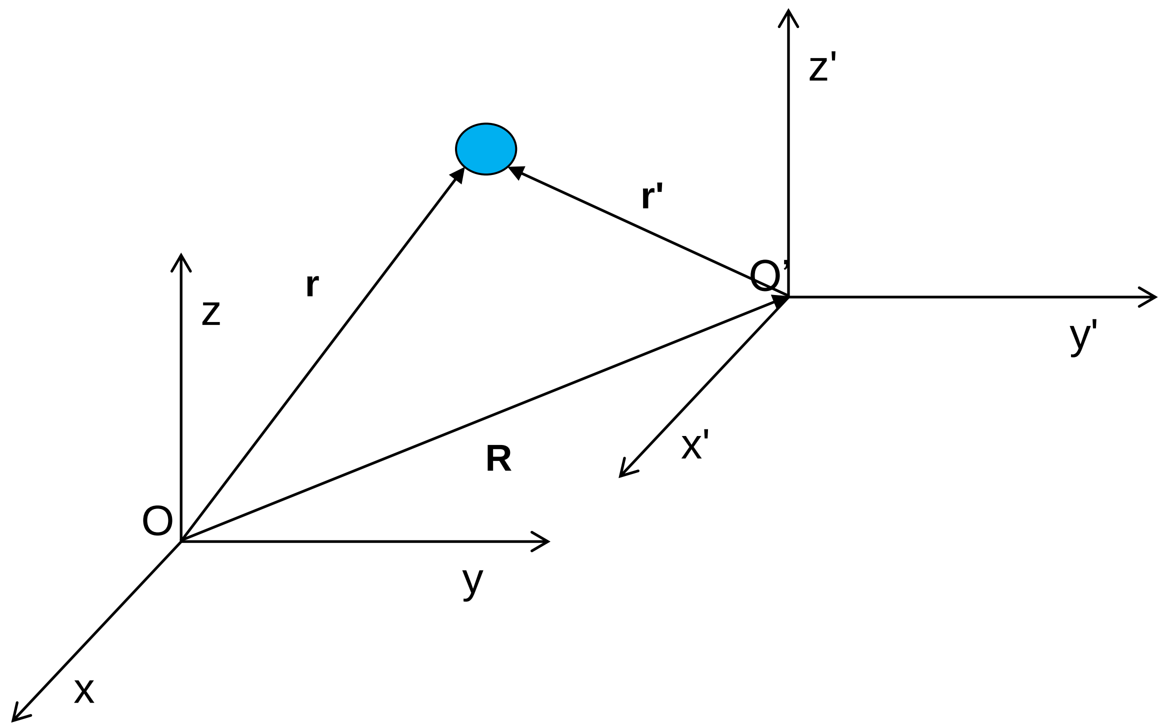
Cambio de sistema de referencia.

Lo que necesitamos para convertir un vector posición de un sistema de coordenadas a otro es el vector que va desde el origen de uno de los sistemas al otro.

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{A}$$



Bibliografía

SÁNCHEZ PÉREZ, JUAN FCO.; ALHAMA LÓPEZ, FRANCISCO Problemas de física para ingenieros (Tomo 1). Cartagena: Crai UPCT Ediciones, 2014. ISBN 978-84-942562-8-8

TIPLER, PAUL ALLEN Física para la ciencia y la tecnología. Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica; Reverté, 2012. ISBN 97-88429144-29-1

BURBANO DE ERCILLA SANTAGO Problemas de Física. Madrid: Tebar. 2007. 815 p. ISBN 978-84-95447-27-2

FERNÁNDEZ, M.R. 1000 problemas de física general mecánica, electricidad, electromagnetismo, ondas, electrónica, relatividad, radiactividad, termodinámica: Bachillerato, LOGSE, Pruebas de acceso a la Universidad, Escuelas Técnicas, Facultades Universitarias. Everest, 2007. ISBN 97-88424176-03-7

SÁNCHEZ PÉREZ, JUAN FCO.; CONESA VALVERDE, MANUEL; CASTRO RODRÍGUEZ, ENRIQUE. Prácticas de física para ingenieros: Física I: errores, cinemática, dinámica, estática, fluidos, Cartagena: Universidad Politécnica de Cartagena, 2017. ISBN 97-88416325-36-8