Universidad Politécnica de Cartagena

Dinámica del Sólido Rígido
Sistemas de fuerzas

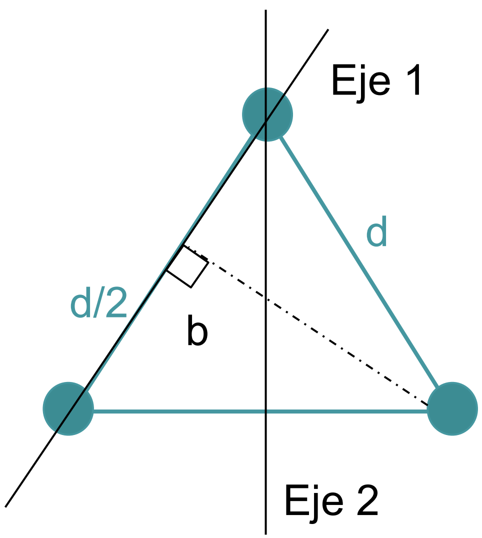
Juan Francisco Sánchez Pérez

Ejercicio

Calcula el momento de inercia de tres partículas iguales de masa m, que se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de lado d, respecto de: a) un eje que pase por dos de ellas, b) un eje que pase por una de ellas y el punto medio de las otras dos, c) ¿Cuál de los dos es un eje principal de inercia? y d) calcula L_z para ambos ejes si la velocidad angular es de 5 rad/s

Ejercicio

Calcula el momento de inercia de tres partículas iguales de masa m, que se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de lado d, respecto de: a) un eje que pase por dos de ellas, b) un eje que pase por una de ellas y el punto medio de las otras dos, c) ¿Cuál de los dos es un eje principal de inercia? y d) calcula L_z para ambos ejes si la velocidad angular es de 5 rad/s



a) $I_{EJE1} = \sum m_i r_i^2 = m\left(\sqrt{3/4\, d^2}\right) = \frac{3}{4} m d^2 \ kg\,m^2$

$b = \sqrt{d^2 - d^2/2^2} = \sqrt{d^2 - d^2/4} = \sqrt{\frac{3}{4} d^2}$

b) $I_{EJE2} = \sum m_i r_i^2 = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m d^2 \ kg\,m^2$

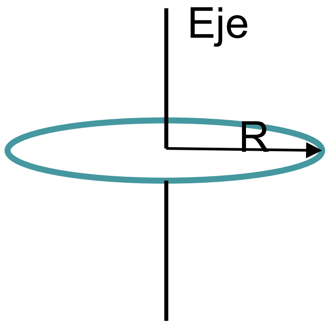
c) EL EJE 2 ES PRINCIPAL DE INERCIA POR SER UN EJE DE SIMETRÍA

d) $L_{z,EJE1} = I\omega = \frac{3}{4} m d^2 \cdot 5 = \frac{15}{4} m d^2 \ kg\,m^2/s$

$L_{z,EJE2} = I\omega = \frac{1}{2} m d^2 \cdot 5 = 5/2\ m d^2 \ kg\,m^2/s$

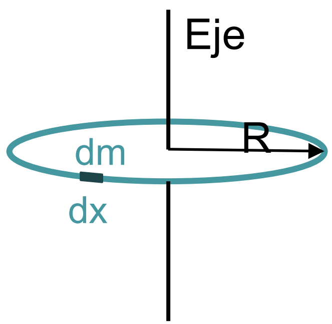
Ejercicio

Determine el momento de inercia de un anillo respecto del eje mostrado en la figura sabiendo que su masa es m y su radio R.

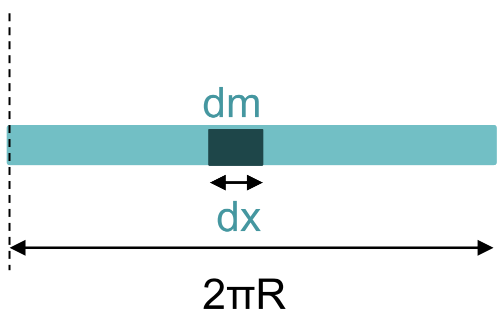


Ejercicio

Determine el momento de inercia de un anillo respecto del eje mostrado en la figura sabiendo que su masa es m y su radio R.



$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{M}{2\pi R} \qquad \mu = \frac{dm}{dx}$$



$$I = \int d^2\, dm = \int d^2 \mu\, dx = \int R^2 \mu\, dx = \mu R^2 \int dx$$

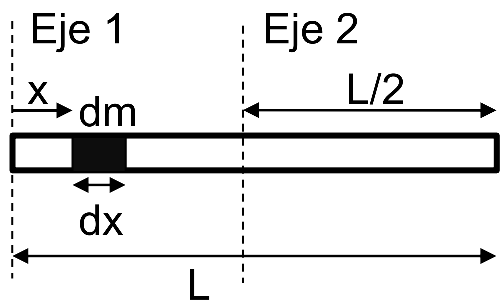
$$= \mu R^2 \int_0^{2\pi R} dx = \mu R^2 \cdot 2\pi R = \frac{M}{\cancel{2\pi R}} R^2 \cdot \cancel{2\pi R} = M R^2 \ kg\, m^2$$

Ejercicio

Determina el momento de inercia de una varilla de longitud L y masa M respecto de dos ejes perpendiculares a ella, uno que pase por uno de sus extremos y otro que pase por su centro

Ejercicio

Determina el momento de inercia de una varilla de longitud L y masa M respecto de dos ejes perpendiculares a ella, uno que pase por uno de sus extremos y otro que pase por su centro



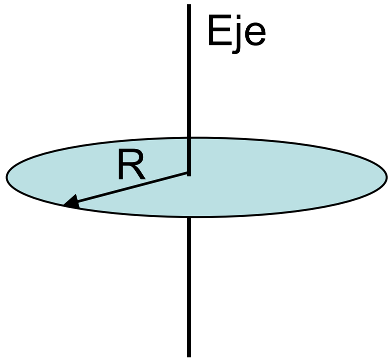
$$\mu = \frac{M}{L} \qquad \mu = \frac{dm}{dx}$$

$$I_{EJE\,1} = \int_0^L d^2 \mu \, dx = \mu \int_0^L x^2 \, dx = \mu \frac{L^3}{3} = \frac{M}{L}\frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} M L^2 \ \mathrm{kg\,m^2}$$

$$I_{EJE\,2} = 2\int_0^{L/2} d^2 \mu \, dx = 2\mu \int_0^{L/2} x^2 \, dx = 2\mu \frac{L^3}{24} = \frac{2M}{L}\frac{L^3}{24} = \frac{1}{12} M L^2 \ \mathrm{kg\,m^2}$$

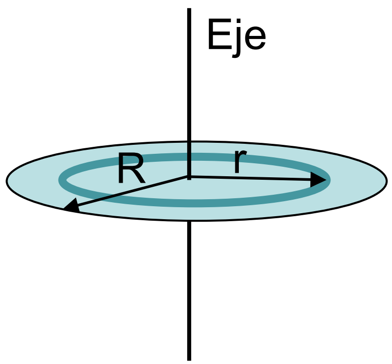
Ejercicio

Determine el momento de inercia de un disco respecto del eje mostrado en la figura sabiendo que su masa es M y su radio R.



Ejercicio

Determine el momento de inercia de un disco respecto del eje mostrado en la figura sabiendo que su masa es M y su radio R.



$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi R^2} \qquad \sigma = \frac{dm}{dA}$$

$$dm = \sigma \cdot dA = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi r\, dr = M \frac{2r}{R^2}\, dr$$

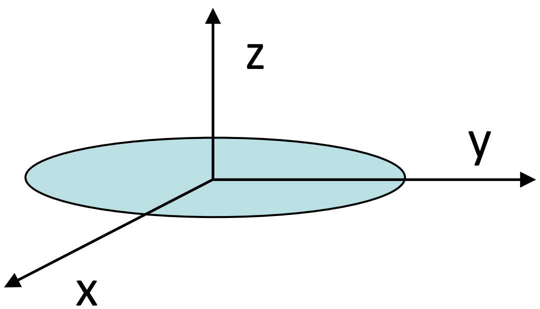
$$dA = d(\pi r^2) = 2\pi r \cdot dr$$

$$I = \int d^2\, dm = \int_0^R r^2 \frac{M}{R^2} 2r\, dr = 2\frac{M}{R^2}\int_0^R r^3\, dr =$$

$$= 2\frac{M}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2 \text{ kg m}^2$$

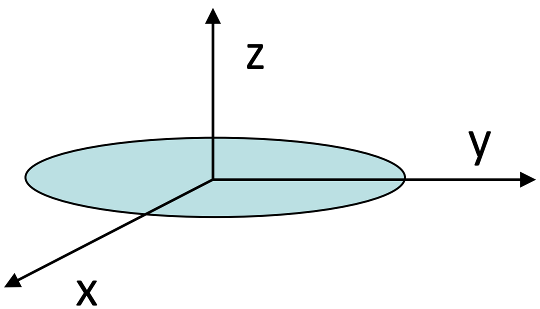
Ejercicio

Calcula el momento de inercia del disco de la figura respecto de los ejes x e y. Datos: radio: R y masa: M



Ejercicio

Calcula el momento de inercia del disco de la figura respecto de los ejes x e y. Datos: radio: R y masa: M



$$I_x = I_y$$

$$I_z = I_x + I_y = 2 I_x$$

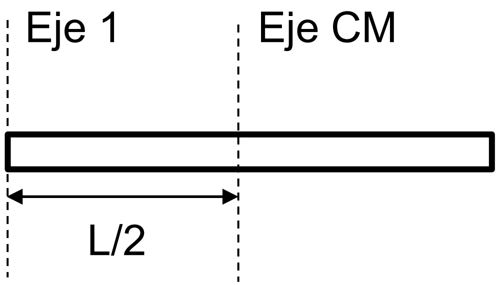
$$I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{4} M R^2 \ \mathrm{Kg\,m^2}$$

Ejercicio

Compruebe el teorema de Steiner con los momentos de inercia de una varilla de longitud L y masa M respecto de dos ejes perpendiculares a ella, uno que pase por uno de sus extremos y otro que pase por su centro

Ejercicio

Compruebe el teorema de Steiner con los momentos de inercia de una varilla de longitud L y masa M respecto de dos ejes perpendiculares a ella, uno que pase por uno de sus extremos y otro que pase por su centro

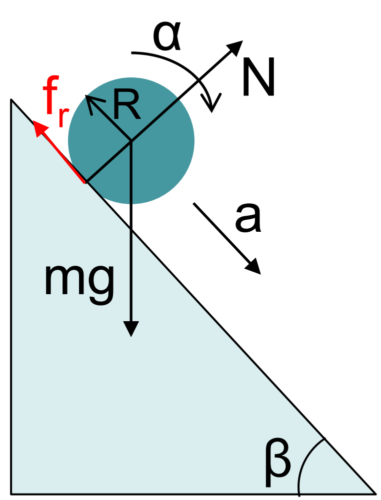


$$I_{EJE1} = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2$$

$$= \frac{1}{3}ML^2 \text{ kg m}^2$$

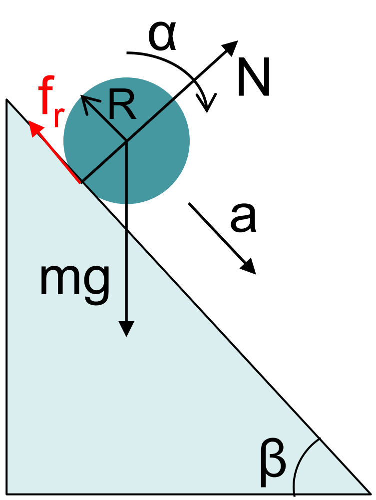
Ejercicio

En el plano inclinado de la figura se puede variar el ángulo de inclinación β. Sabiendo que el cilindro macizo parte del reposo y que su coeficiente de rozamiento estático con el plano es de $\mu_e = 0{,}4$. ¿Cuál es el ángulo máximo β para que el cilindro caiga rodando sin deslizar? ($I_{cilindro} = 0.5MR^2$)



Ejercicio

En el plano inclinado de la figura se puede variar el ángulo de inclinación β. Sabiendo que el cilindro macizo parte del reposo y que su coeficiente de rozamiento estático con el plano es de $\mu_e = 0{,}4$. ¿Cuál es el ángulo máximo β para que el cilindro caiga rodando sin deslizar? ($I_{cilindro} = 0.5MR^2$)



$$\Sigma F_x = m a_x \rightarrow mg \cdot \text{sen}\,\alpha - f_r = ma$$

$$\Sigma F_y = m a_y \rightarrow N - mg\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma \tau_o = I\alpha \rightarrow f_r \cdot R = I\alpha = \tfrac{1}{2} mR^2 \alpha$$

RUEDA SIN DESLIZAR $a = \alpha \cdot R \rightarrow f_r = \tfrac{1}{2} m a$

$$mg \cdot \text{sen}\,\alpha - f_r = m a \rightarrow mg\,\text{sen}\,\alpha - \tfrac{1}{2} m a = ma$$

$$g\,\text{sen}\,\alpha = \tfrac{3}{2} a \rightarrow a = \tfrac{2}{3} g\,\text{sen}\,\alpha$$

$$f_r = \tfrac{1}{2} m a = \tfrac{1}{2} m \tfrac{2}{3} g \cdot \text{sen}\,\alpha = \tfrac{1}{3} mg\,\text{sen}\,\alpha$$

CUANDO DESLIZA $f_r \geq f_{r\,MAX}$; $f_{r\,MAX} = \mu N = \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha$

IGUALANDO LA $f_r \rightarrow \tfrac{1}{3} m g\,\text{sen}\,\alpha = \mu\, mg \cos\alpha$

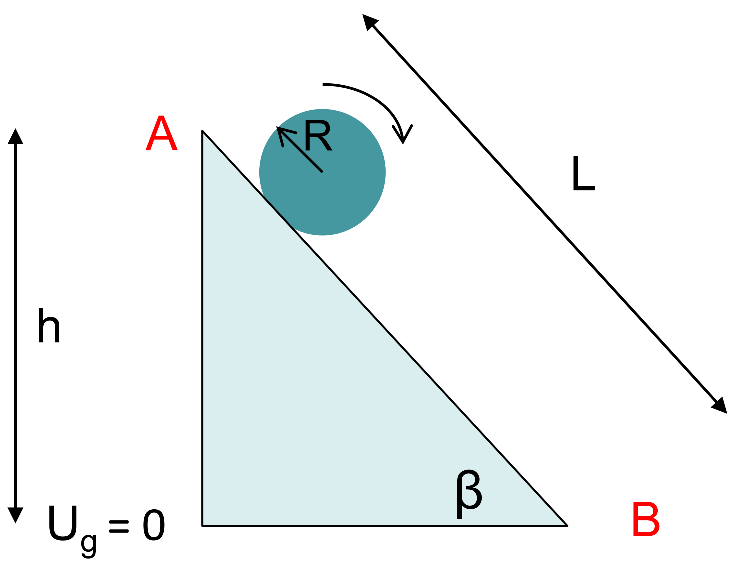
$$\text{tg}\,\alpha = 3\mu \rightarrow \alpha = \text{arc tg}(3\mu) = \text{arctg}(3 \cdot 0'4) = 50'2^\circ$$

Ejercicio

Una esfera de masa M y radio R cae rodando por un plano inclinado de longitud L y que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Determina su velocidad angular al llegar abajo, suponiendo que arriba parte del reposo y que la energía perdida por el rozamiento es despreciable. Nota: El momento de inercia de una esfera respecto de un eje que pasa por su centro es $(2/5)MR^2$

Ejercicio

Una esfera de masa M y radio R cae rodando por un plano inclinado de longitud L y que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Determina su velocidad angular al llegar abajo, suponiendo que arriba parte del reposo y que la energía perdida por el rozamiento es despreciable. Nota: El momento de inercia de una esfera respecto de un eje que pasa por su centro es (2/5)MR²



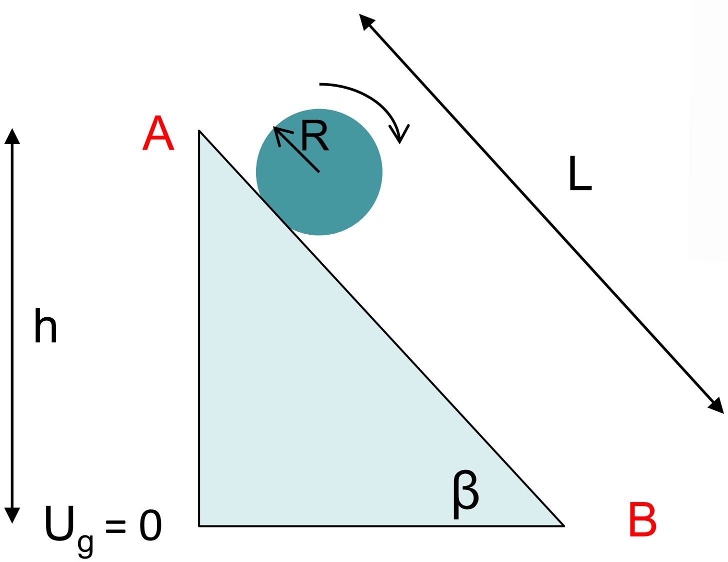
$I = \frac{2}{5} m R^2$

$h = L \cdot \text{sen}\,30° = \frac{1}{2} L$

$v = \omega \cdot R$

Ejercicio

Una esfera de masa M y radio R cae rodando por un plano inclinado de longitud L y que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Determina su velocidad angular al llegar abajo, suponiendo que arriba parte del reposo y que la energía perdida por el rozamiento es despreciable. Nota: El momento de inercia de una esfera respecto de un eje que pasa por su centro es (2/5)MR²



$$U_{g,A} = E_{cT,B} + E_{cR,B}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\cancel{m} g \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} \cancel{m} \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R^2 \omega^2$$

$$\frac{1}{2} g L = \frac{1}{2} \omega^2 R^2 = \frac{1}{5} \omega^2 R^2$$

$$\frac{1}{2} g L = \frac{7}{10} \omega^2 R^2$$

$$g L = \frac{7}{5} \omega^2 R^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{5gL}{7R^2}}$$

Bibliografía

Autor: Sánchez Pérez, Juan Francisco y Alhama López, Francisco

Título: PROBLEMAS DE FÍSICA PARA INGENIEROS. Tomo 2. Dinámica del punto, Sistemas de partículas, Sólido rígido y Movimiento plano

Editorial: Crai UPCT Ediciones

Fecha Publicación: 2016

ISBN: 978-84-16325-22-1

Autor: Tipler, Paul Allen

Título: Física para la ciencia y la tecnología. Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica

Editorial: Reverté

Fecha Publicación: 2012

ISBN: 9788429144291