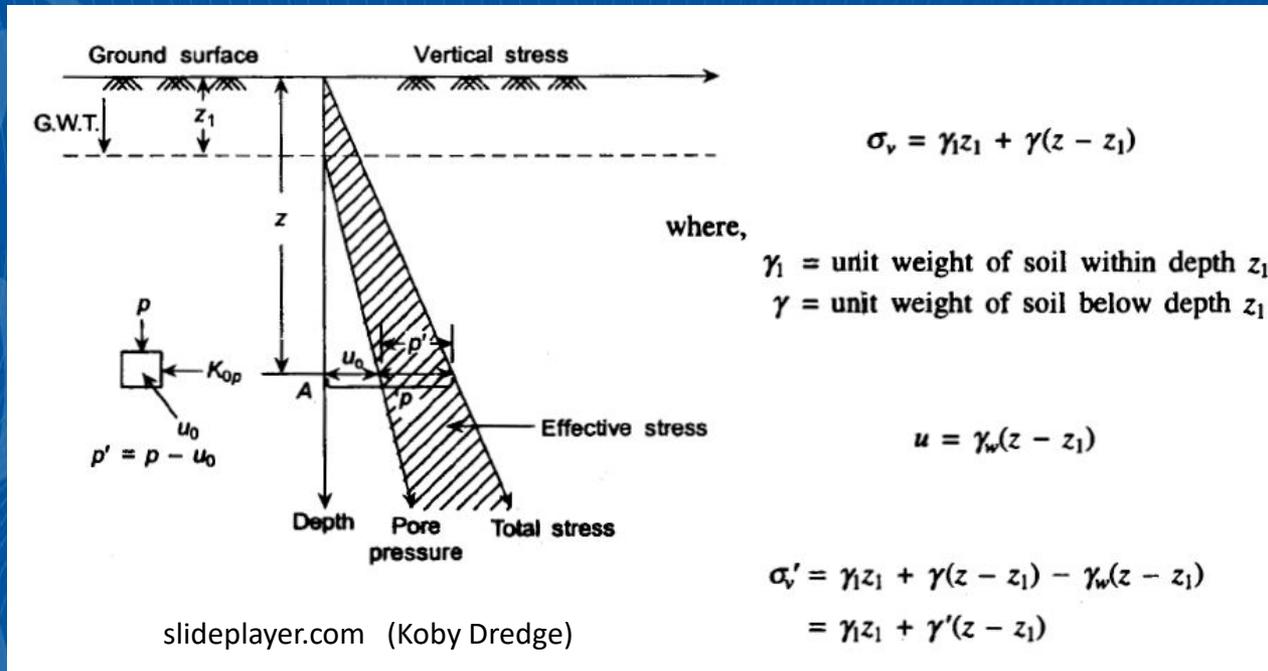


# Mecánica Avanzada de Suelos

## MCieTAT (UPCT)



## Tema 3

# Tensiones en el suelo



# ÍNDICE

## **PARTE 1: TENSIONES GEOSTÁTICAS**

**Introducción al cálculo de tensiones en suelos**

**Esfuerzo efectivo**

**Ejemplos sobre tensiones efectivas en el terreno**

**Esfuerzos horizontales**

**Fenómeno de sifonamiento**

**Ejemplos para entender**

## **PARTE 2: TENSIONES DEBIDAS A CARGAS APLICADAS**

**Nociones básicas de elasticidad**

**Esfuerzos debidos a cargas aplicadas. Bulbos de esfuerzos**

**Diagrama de Newmark**

**Ejercicios propuestos**

**Referencias**



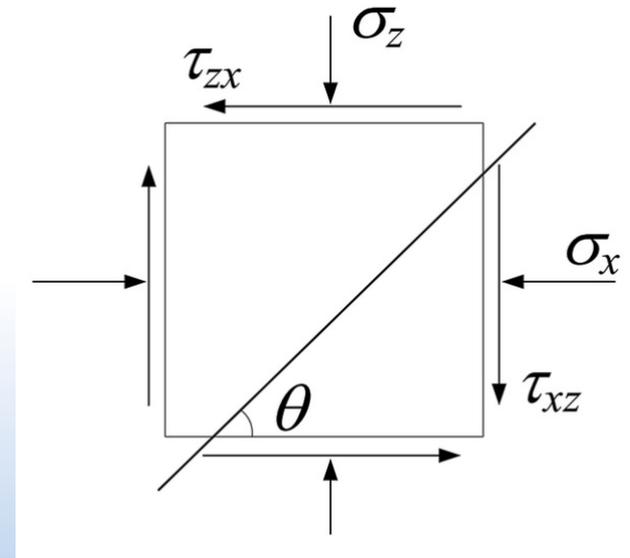
Uno de los principales problemas en mecánica de suelos es entender cómo **evaluar los esfuerzos resultantes en un punto de un suelo**. Éstos **dependen de las tensiones inducidas por la propia masa de suelo, la presencia de agua, los movimientos de tierras en superficie, la construcción de obras civiles ...**

Conocer el estado de tensiones de una masa de suelo nos **permitirá:**

- **calcular de asentamientos** del terreno.
- **evaluar la capacidad portante** del terreno para cálculo de cimentaciones.
- **diseñar muros de contención**.
- Cálculos de **estabilidad de taludes...**



¿?



Wu et al. (2019)



¿Cómo deducir matemáticamente la fórmula para obtener la **tensión vertical** en un punto del terreno?

$$\sigma_z = \rho \cdot g \cdot z$$

$$\sum_{i=1}^n F_{zi} = 0 \quad -(\sigma_z + \delta\sigma_z)A + \sigma_z A + \rho g A \delta z - \tau s \delta z = 0$$

Válido para cargas distribuidas

Setting  $\tau = 0$  and rearranging (2.7) we find:

$$\delta\sigma_z = \rho g \delta z$$

and we can integrate this to give:

Wood (2009)

$$\sigma_z = \int_0^z \rho g dz$$

For a uniform soil with density  $\rho$  constant throughout:

**Tensión normal vertical (un sólo estrato)**

$$\sigma_z = \rho g z$$

and for a layered soil with  $n$  layers of thickness  $\Delta z_i$  and density  $\rho_i$ :

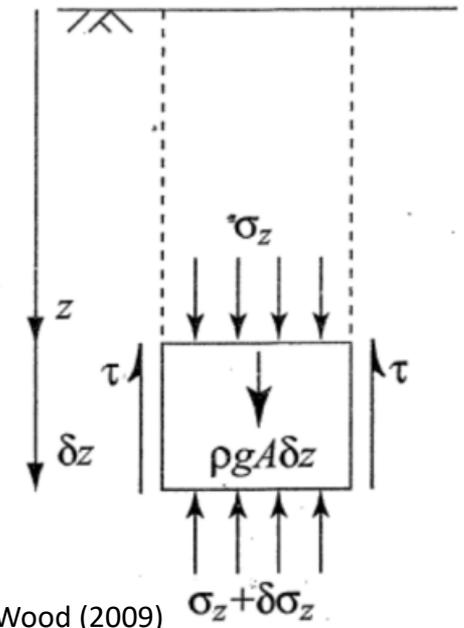
**Tensión normal vertical (varios estratos)**

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^n \rho_i g \Delta z_i$$

-Considerar un medio de extensión horizontal infinita.

-Realizar el balance de masas con otro elemento situado a la derecha y a la izquierda

-Solo podríamos resolver si consideramos  $\tau = 0$

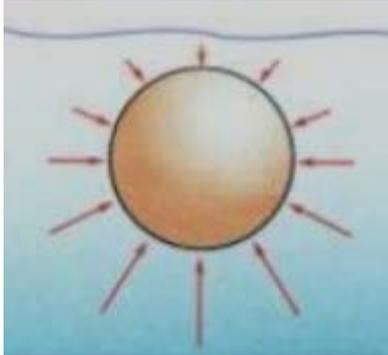


Wood (2009)



¿Qué **fuerza** actúa sobre un elemento de volumen de agua?

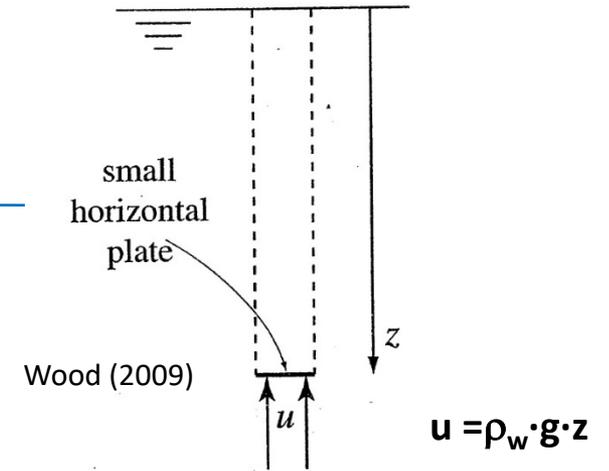
$$u = \rho_w \cdot g \cdot z$$



Presión hidrostática

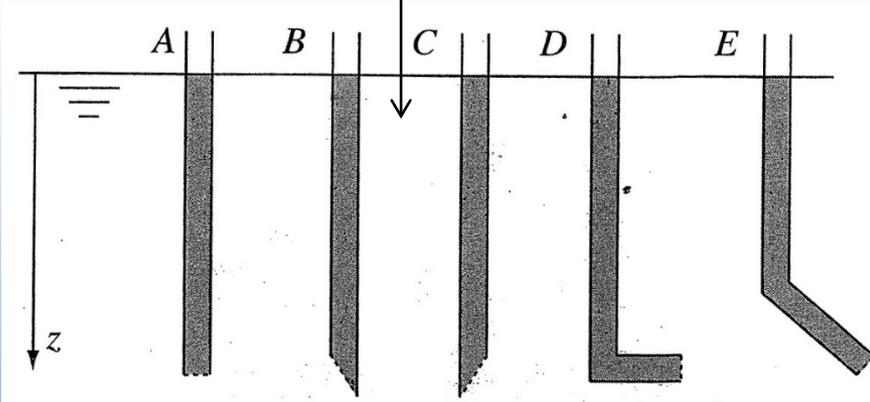
(no tiene esfuerzos de corte)

## Hidrostatica

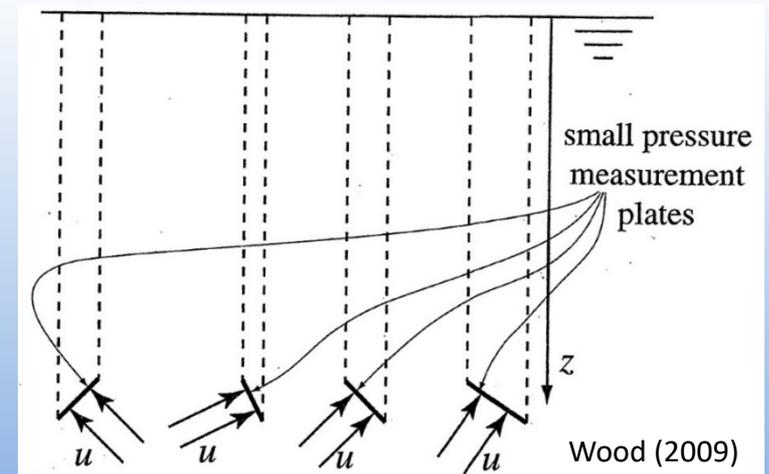


Es una propiedad de los **fluidos en reposo** que la **tensión ejercida no depende de la orientación** del pequeño plano sobre la que se mide, **sólo de la profundidad** (ver figuras ilustrativas).

Un **Fluido estacionario** no puede transmitir **tampoco un esfuerzo cortante**.



Wood (2009)



Wood (2009)



## Introducción al cálculo de tensiones en suelos

¿Qué **fuerza** actúa sobre un elemento de volumen de agua?

$$u = \rho_w \cdot g \cdot z$$

Fijémonos en un **volumen de agua infinitesimal**.

Las **fuerzas laterales** en los sentidos **x** e **y** se **anulan** por ser iguales y de sentido contrario.

Sin embargo **en sentido vertical** hay diferencia:

$$\begin{aligned} F_{z1} &= \rho_w g z \Delta x \Delta y \\ F_{z2} &= \rho_w g (z + \Delta z) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

Por tanto, el empuje vertical neto vale:

$$E_w = F_{z2} - F_{z1} = \rho_w g \Delta z \Delta x \Delta y$$

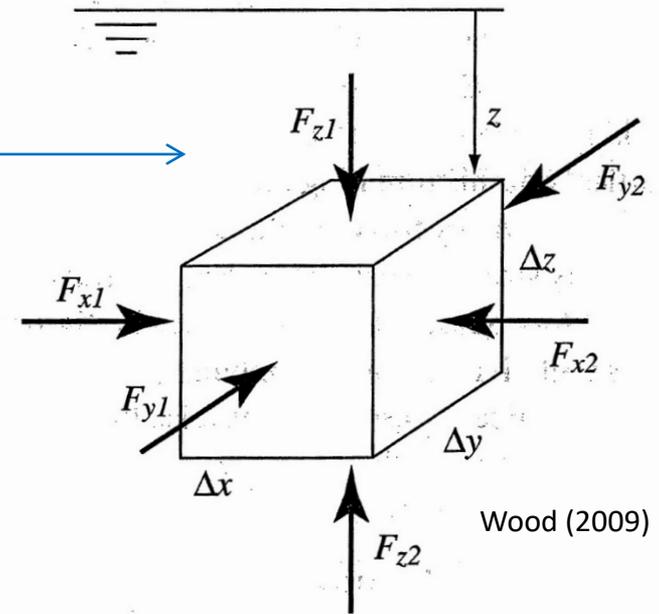
Y en términos de presión tendremos:

$$u = \frac{E_w}{A} = \rho_w g \Delta z$$

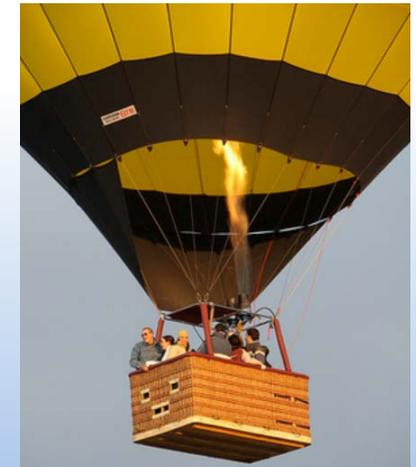
El **resultado** tiene sentido **ascendente** y es precisamente el **peso del agua desplazado por el objeto** ( $E_w$ ).

Para cualquier elemento sumergido en agua, comparando la densidad del objeto que sustituyo por la de ese volumen de agua **sabré si se vence la fuerza de empuje** (una piedra) o si por el contrario el **peso del material no es suficiente** (corcho).

### Hidrostática



Wood (2009)





### Esfuerzo o tensión efectivo (presión efectiva)

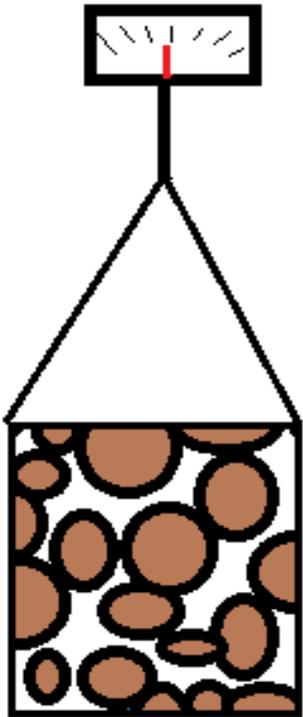
En la figura se aprecia cómo al submarinista le cuesta menos esfuerzo cuando el cofre está sumergido que cuando el cofre se encuentra fuera del agua.

Podríamos decir que la “fuerza efectiva” resulta de restar al peso del cofre, el peso de un volumen de agua que corresponde al volumen desplazado por el cofre (empuje de Arquímedes).



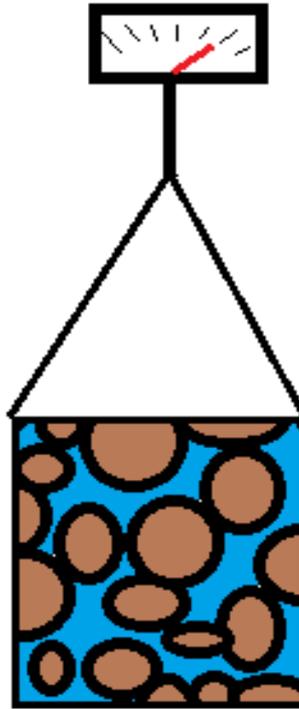


Calculamos los pesos de un volumen conocido de suelo poroso



Suponiendo una unidad de volumen de un recipiente permeable, el peso (N/m<sup>3</sup>) del suelo sería:

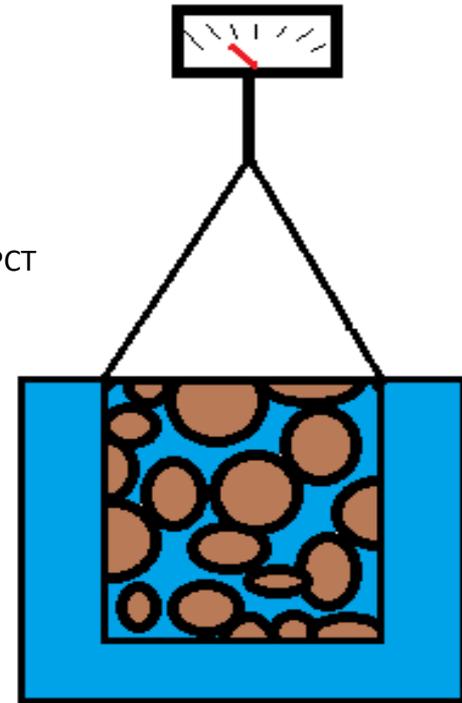
$$\text{Peso} = \rho_d \cdot g = (1-n) \cdot \rho_s \cdot g$$



Suponiendo una unidad de volumen de un recipiente estanco, el peso (N/m<sup>3</sup>) del suelo sería

$$\text{Peso} = \rho_{\text{sat}} \cdot g = n \cdot \rho_w \cdot g + (1-n) \cdot \rho_s \cdot g$$

Alhama (2013). UPCT



En este caso, con un recipiente permeable, el peso (N/m<sup>3</sup>) se obtendría de la siguiente manera

$$\text{Peso} = \rho_{\text{sat}} \cdot g - \rho_w \cdot g = \rho' \cdot g$$

o bien:

$$(1-n) \cdot \rho_s \cdot g - (1-n) \cdot \rho_w \cdot g$$

siendo:

$$(1-n) \cdot \rho_w \cdot g = \text{empuje}$$



## ¿Que sucede cuando tenemos terreno y agua?

## Suelos con contenido en agua

Las partículas del suelo que se dejan caer en la piscina desplazan un volumen de agua similar, como hemos visto con anterioridad. El agua se encuentra presente de forma continua, conectada, de manera que se puede aplicar el principio de la hidrostática visto también con anterioridad.

$$\sigma_z = \rho g z$$

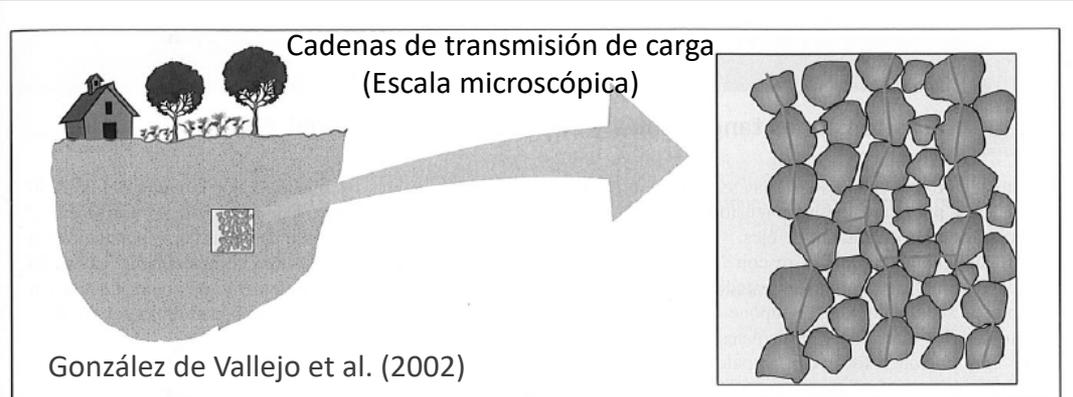
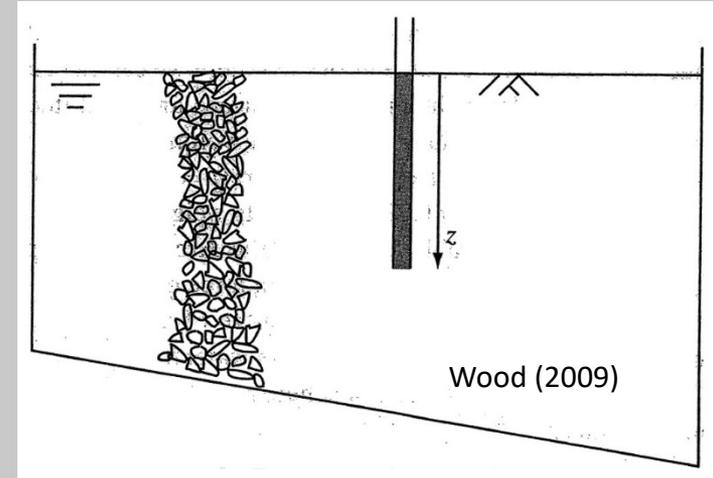
$$u = \rho_w g z$$

$$\sigma'_z = \sigma_z - u$$

Principio de tensión efectiva

La **densidad** que aparece en el **calculo del esfuerzo total**  $\sigma_z$  a la profundidad  $z$ , es la **densidad saturada** (suelo sumergido)

**En suelos saturados, la tensión efectiva es la que actúa sobre el armazón del terreno y controla las respuestas mecánicas del terreno** que se precisan para los problemas de ingeniería: **deformación, rigidez y resistencia.**



En el terreno los esfuerzos se transmiten a través de los contactos entre las partículas del suelo (el peso del material que se encuentra por encima).  
Cuando el **terreno** se encuentra **sumergido**, sobre cada diferencial de superficie ( $ds$ ) del grano en contacto con el **agua**, se **ejerce una fuerza** ( $df$ ), cuya resultante neta es el empuje. **Esta presión neutra o hidrostática depende de la altura de columna de agua, en ausencia de otros fenómenos** (sobrecargas del terreno, movimientos de fluido).



## Esfuerzo efectivo

o tensión efectiva (presión efectiva)

En suelos no tiene sentido hablar de tensiones en un punto, ya que no se trata de un medio continuo a pequeña escala. Por tanto hablamos de presiones sobre un plano.

La presión tampoco es la misma sobre cada punto de un plano ds, ya que depende de que nos encontremos en el contacto entre dos partículas o en un poro (presión = 0 en ausencia de agua).

Podemos hablar de presión en un punto ( $P_p$ ), dada un superficie orientada.

Podemos definir la presión intergranular ( $P_i$ )

$$P_p = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$$

$$P_i = \frac{P - E}{S_i}$$

$$\sigma' = \frac{P - E}{S_t}$$

Definición

También podemos definir la presión efectiva  $\sigma'$ .

Pese a carecer de sentido físico, interviene de forma definitiva en las deformaciones volumétricas que tienen lugar en el suelo.

Se cumple que cuanto mayor sea la relación  $S_i/S_t$ , mayor sentido cobra trabajar con esfuerzos efectivos en problemas asociados a deformaciones en el suelo.

Esta relación aumenta conforma disminuye el tamaño de grano (arcillas vs gravas).

Cuando hay un cambio en las tensiones efectivas en un suelo, es entonces cuando se puede producir un cambio de volumen, distorsión y/o modificación de la resistencia al corte (o resistencia friccional).

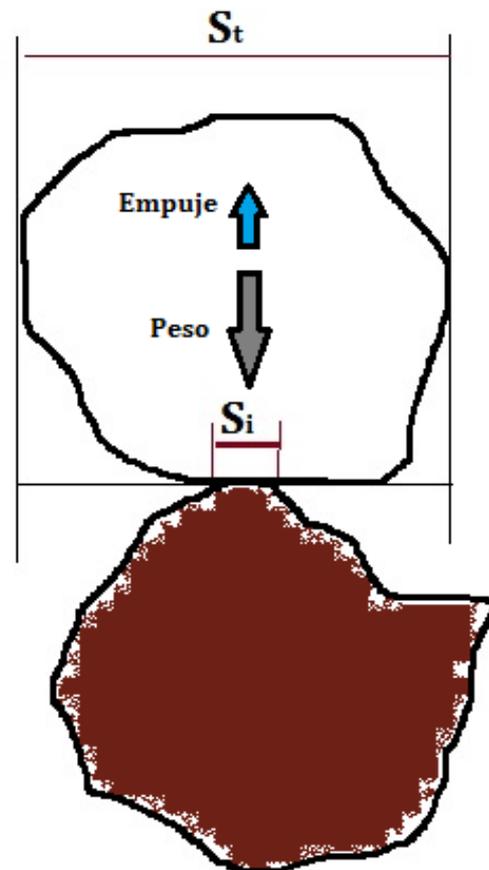
Si el nivel freático asciende o desciende, entonces la tensión efectiva disminuye o aumenta, respectivamente.

E=empuje.

P=peso.

$S_t$ =superficie total.

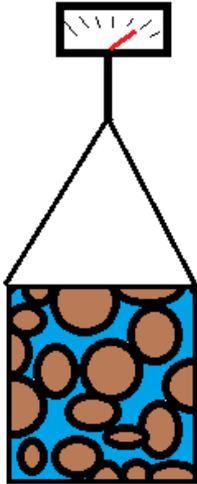
$S_i$ = superficie de contacto entre granos.



Alhama (2013). UPCT



¿Cómo se calcula el esfuerzo total?



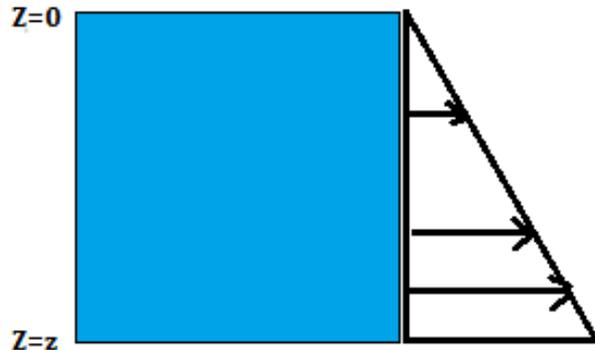
Suponiendo una unidad de volumen de un recipiente estanco, el peso ( $\text{N/m}^3$ ) del suelo sería

$$\text{Peso} = n \cdot \rho_w \cdot g + (1-n) \cdot \rho_s \cdot g = \rho_{\text{sat}} \cdot g$$

En términos de presión ( $\text{N/m}^2$ ), para un volumen de espesor z

$$\sigma_t = \rho_{\text{sat}} \cdot g \cdot z$$

¿Cómo se calcula la presión intersticial?



Para el caso hidrostático, en términos de presión ( $\text{N/m}^2$ ), para un volumen de espesor z

$$u = \rho_w \cdot g \cdot z$$

**Esfuerzo efectivo**

¿Cómo se calcula el esfuerzo efectivo?

$$\sigma' = \sigma_t - u$$

La tensión efectiva no se puede calcular directamente, sino que hay que estimarla a partir de la tensión total y la presión intersticial. A partir de las expresiones anteriores:

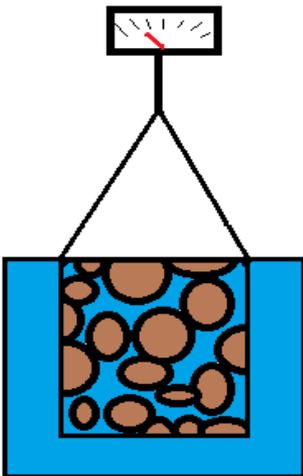
$$\sigma_t = \rho_{\text{sat}} \cdot g \cdot z$$

$$u = \rho_w \cdot g \cdot z$$

$$\sigma' = \sigma_t - u = \rho_{\text{sat}} \cdot g \cdot z - \rho_w \cdot g \cdot z = \rho' \cdot g \cdot z$$

Sólo para suelos completamente saturados ( $V_g = 0$ )

Otra forma de llegar a la expresión de la tensión efectiva (trabajamos con presiones igual que con fuerzas, ya que consideramos superficie unidad), es:



con un recipiente permeable, el peso ( $\text{N/m}^3$ ) del suelo sería

$$\text{Peso} = \rho_{\text{sat}} \cdot g - \rho_w \cdot g = \rho' \cdot g$$

En términos de presión ( $\text{N/m}^2$ ), para un volumen de espesor  $z$

$$\sigma' = \rho' \cdot g \cdot z$$

Sólo para suelos completamente saturados ( $V_g = 0$ )



$$\sigma_{\text{tot}} = \rho_{\text{sat}} g z$$

$$u = \rho_w g z$$

(hidrostática)

$$\sigma' = \sigma_{\text{tot}} - u$$

$$\sigma' = \rho' g z$$

$$\rho' = \rho_{\text{sat}} - \rho_w$$



## Ejemplos sobre tensiones efectivas en el terreno

### Elemento A

$$\sigma_{zA} = \rho_{sat} g z$$

$$u_A = \rho_w g z$$

$$\sigma'_{zA} = \rho' g z$$

### Elemento B

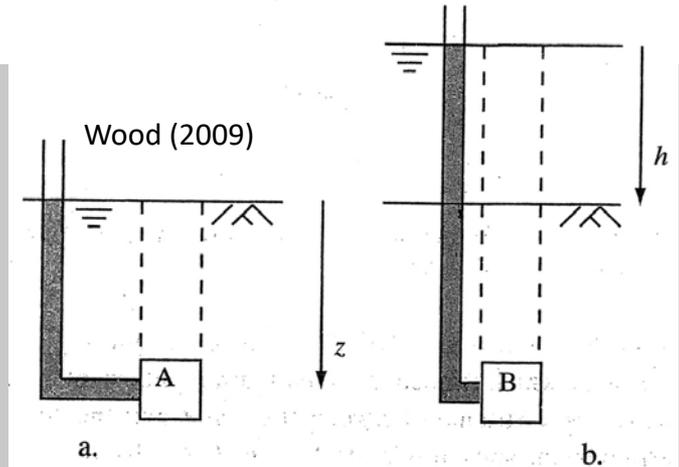
$$\sigma_{zB} = \rho_{sat} g z + \rho_w g h$$

$$u_B = \rho_w g (z + h)$$

$$\sigma'_{zB} = \rho' g z$$

$$\sigma'_{zA} = \sigma'_{zB}$$

### Suelos con contenido en agua



En ambos casos, la tensión efectiva en un punto es la misma.

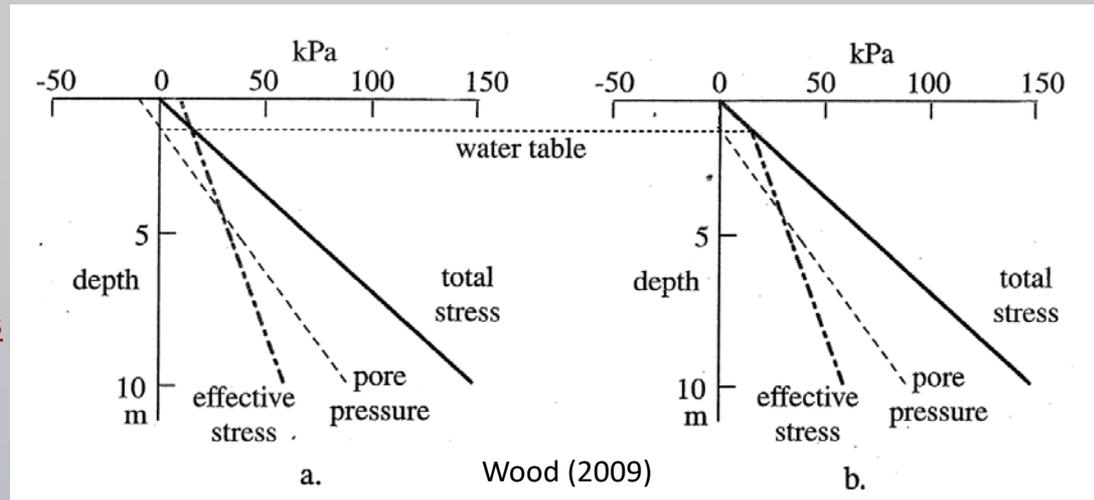
La densidad que aparece en el cálculo de la total, es la saturada (que tiene en cuenta la masa de agua y la de sólidos).

### EFFECTO DE LA CAPILARIDAD

En materiales granulares podemos considerar que las presiones negativas que se generan por capilaridad son nulas (**caso b.**) y que el terreno se encuentra seco Por encima del nivel freático.

Si comparamos las siguientes gráficas, podemos ver como al considerar la presión capilar (que es negativa, caso a.), la tensión efectiva del terreno es mayor que la total.

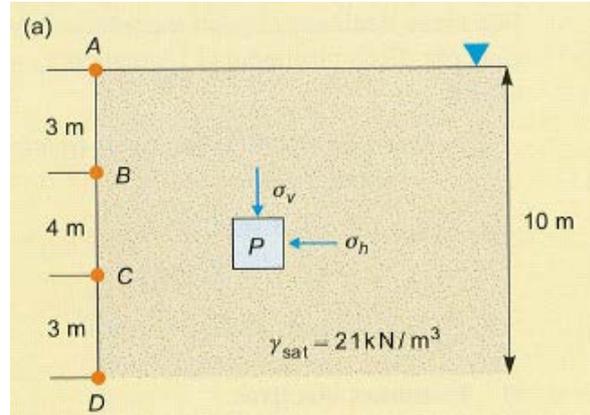
NOTA: En la imagen, no se aprecia el cambio de pendiente de la tensión total al tocar el nivel freático, aunque sí existe (cambio de densidad seca a densidad saturada en el cálculo de la tensión total).





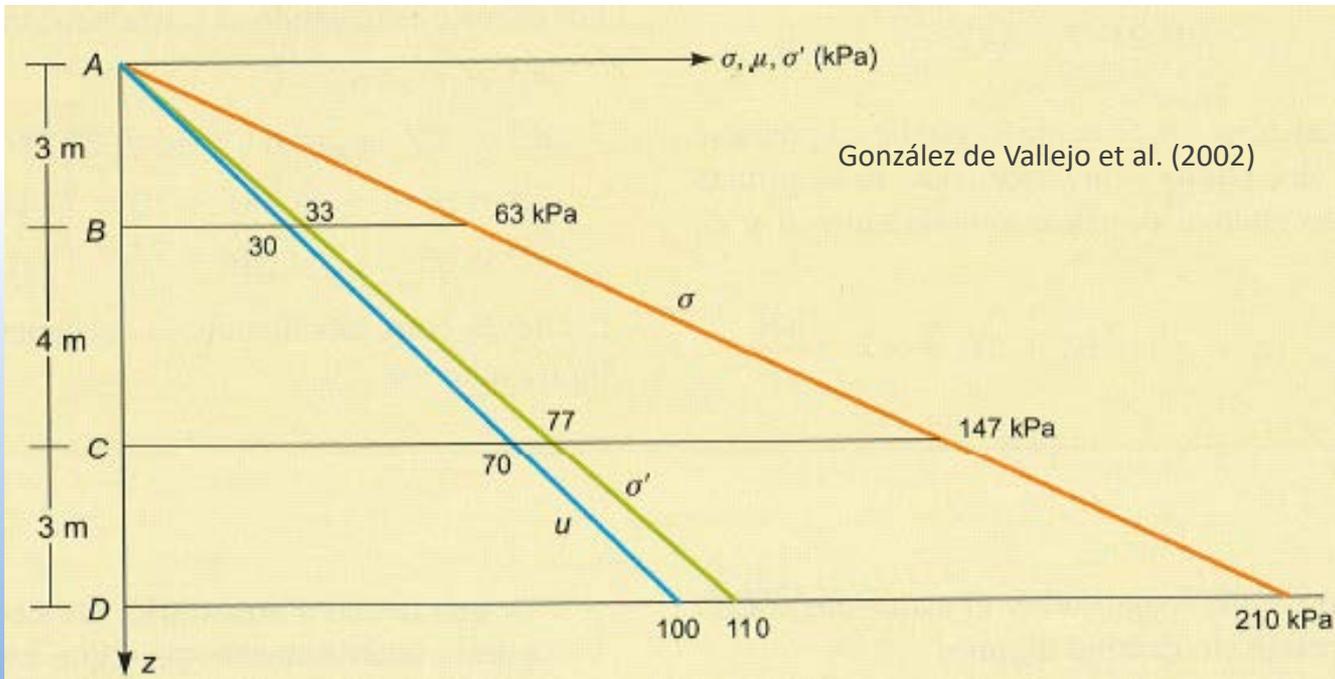
Determina la ley de tensiones (o tensiones geostáticas) en el perfil de suelo mostrado (construye un diagrama con los valores de  $\sigma_{tot}$ ,  $\sigma'$  y  $u$ )

$$\sigma' = \sigma_{tot} - u$$



González de Vallejo et al. (2002)

Solución



González de Vallejo et al. (2002)

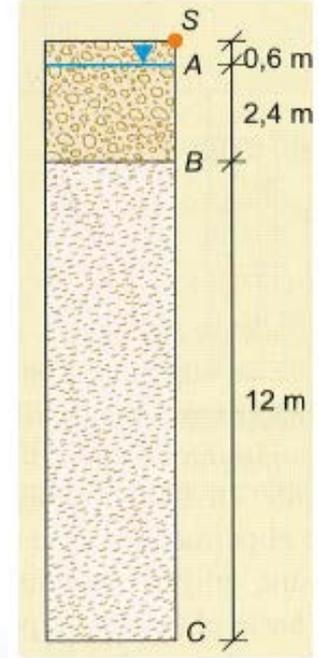


Determina la ley de tensiones (o tensiones geostáticas) en el perfil de suelo mostrado (construye un diagrama con los valores de  $\sigma_{tot}$ ,  $\sigma'$  y  $u$ )

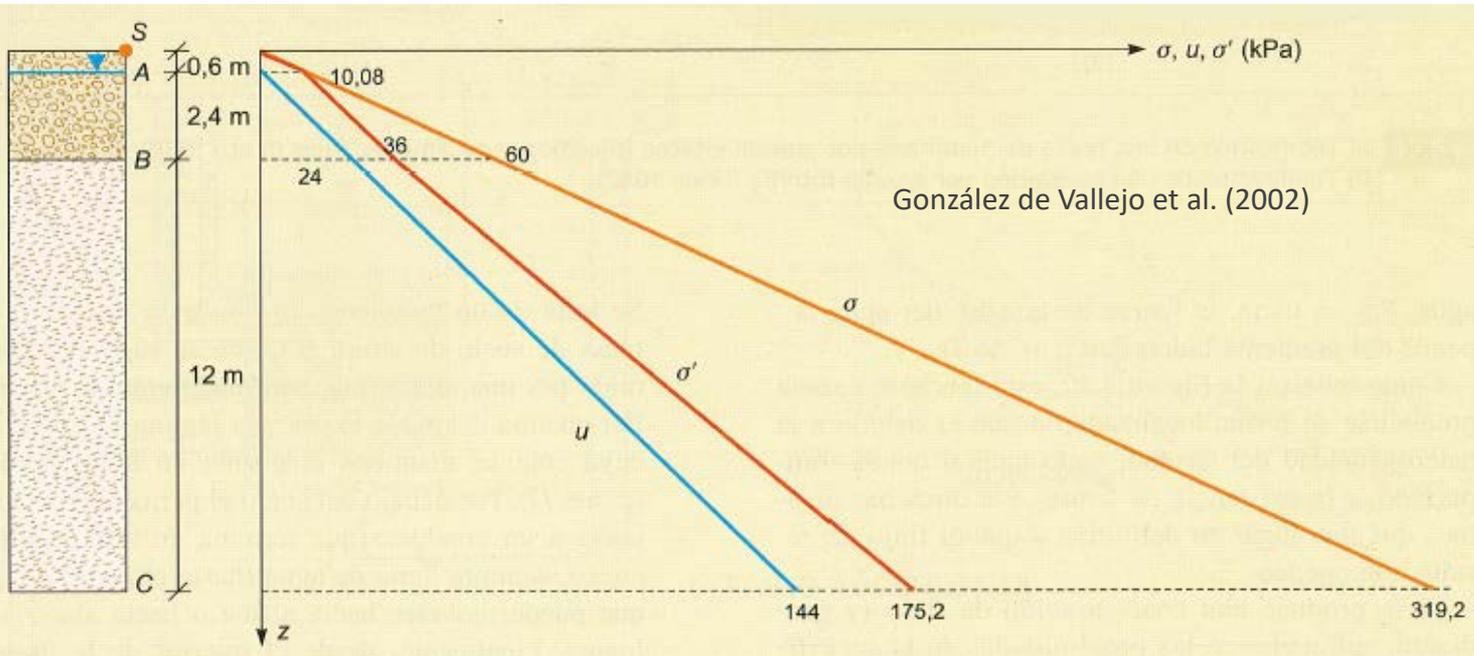
González de Vallejo et al. (2002)

$$\sigma' = \sigma_{tot} - u$$

- Gravas (por encima del N.F.):  $\gamma_g^1 = 16,8 \text{ kN/m}^3$
- Gravas saturadas (por debajo del N.F.):  $\gamma_g^2 = 20,8 \text{ kN/m}^3$
- Arcilla (saturada):  $\gamma_a = 21,6 \text{ kN/m}^3$   
( $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$ ).



Solución



González de Vallejo et al. (2002)

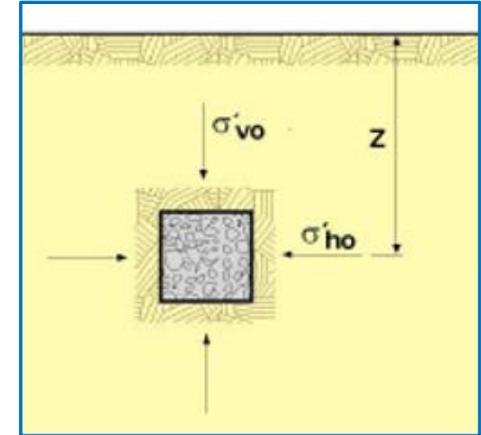


Las tensiones horizontales, al igual que el índice de poros, dependen directamente del tipo de suelo y del historial geológico de tensiones (erosión, tectónica, actividad antrópica...)

En **condiciones unidimensionales** (con deformación lateral nula), la **tensión efectiva horizontal** ( $\sigma'_h$ ) resulta **proporcional a la vertical** ( $\sigma'_v$ ).

Al **coeficiente de proporcionalidad** se le denomina **coeficiente de empuje al reposo** ( $K_o$ ).

$$\sigma'_h = K_o \sigma'_v$$



González de Vallejo et al. (2002)

En **suelos normalmente consolidados** (lo veremos más adelante)  $K_o$  es **constante**, pudiendo estimarse **empíricamente** a partir de la **expresión de Jaky (1944)**.

$$K_o^{NC} = 1 - \sin \phi'$$

con  $\phi'$  = **ángulo de rozamiento interno del material** (lo veremos más adelante).



Cuando el **agua circula por el terreno con una componente ascendente**, puede suceder que la fuerza de arrastre (debida a la viscosidad del fluido y la fricción con la superficie de las partículas) **compense la tensión que produce el peso de las partículas del terreno** (debido a la masa del material).

En esta situación, el suelo pierde su estructura, las partículas se separan unas de otras (se pierde la cohesión del terreno) y se produce una suspensión de las partículas en el fluido; la masa de suelo empieza a bullir (arenas movedizas).

### FLUJO VERTICAL ASCENDENTE

En la base de la arena el esfuerzo vertical total  $\sigma_v$  está dado por:

$$\sigma_v = \rho_s g \Delta D$$

La presión intersticial  $u$  asociada es:

$$u = \rho_w g (\Delta D + \Delta h)$$

Si se aplica el principio de esfuerzos efectivos se obtiene el esfuerzo vertical efectivo  $\sigma'_v$  dado por:

$$\begin{aligned} \sigma'_v &= \sigma_v - u = \rho_s g \Delta D - \rho_w g (\Delta D + \Delta h) = \\ &= \rho' g \Delta D - \rho_w g \Delta h \end{aligned}$$

En donde  $\rho' =$  densidad efectiva de la arena  $= \rho_s - \rho_w$ .

$$\text{Entonces } \sigma'_v = \rho' g \Delta D \left[ 1 - \frac{\rho_w}{\rho'} \frac{\Delta h}{\Delta D} \right] = \rho' g \Delta D \left[ 1 - \frac{\rho_w}{\rho'} i \right]$$

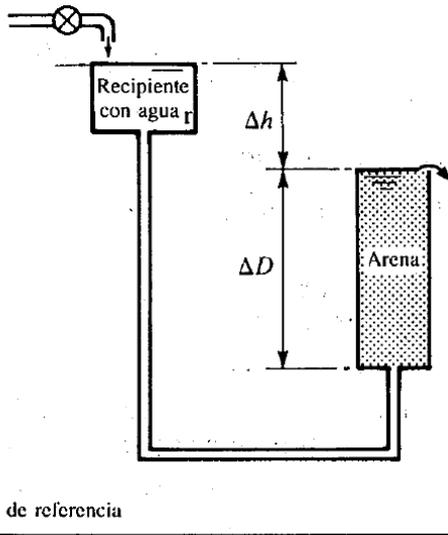
Al elevar el recipiente con agua, el gradiente hidráulico  $i$  a través de la arena aumenta, y en la ecuación (3.10) se observa que el esfuerzo vertical efectivo disminuye. Esta ecuación indica que el esfuerzo vertical efectivo se reduce a cero cuando el gradiente hidráulico alcanza el valor de  $\rho'/\rho_w$ . Este valor se denomina *gradiente hidráulico crítico*,  $i_c$ . Entonces:

$$i_c = \frac{\rho'}{\rho_w}$$

Berry y Reid (1993)

Gradiente hidráulico crítico

$$i_c = \frac{\rho'}{\rho_w}$$





## FLUJO VERTICAL ASCENDENTE

Gradiente  
hidráulico crítico

$$i_c = \frac{\rho'}{\rho_w}$$

Los **problemas relacionados con el sifonamiento** se pueden abordar bien comparando el gradiente hidráulico ( $i$ ) con el gradiente crítico  $i_c$  (**siempre y cuando  $i < i_c$  no habrá sifonamiento**) **o bien** calculando esfuerzos verticales totales y presiones intersticiales para averiguar **si la tensión efectiva se anula (o se torna negativa)\***.

**G. García. UPCT**



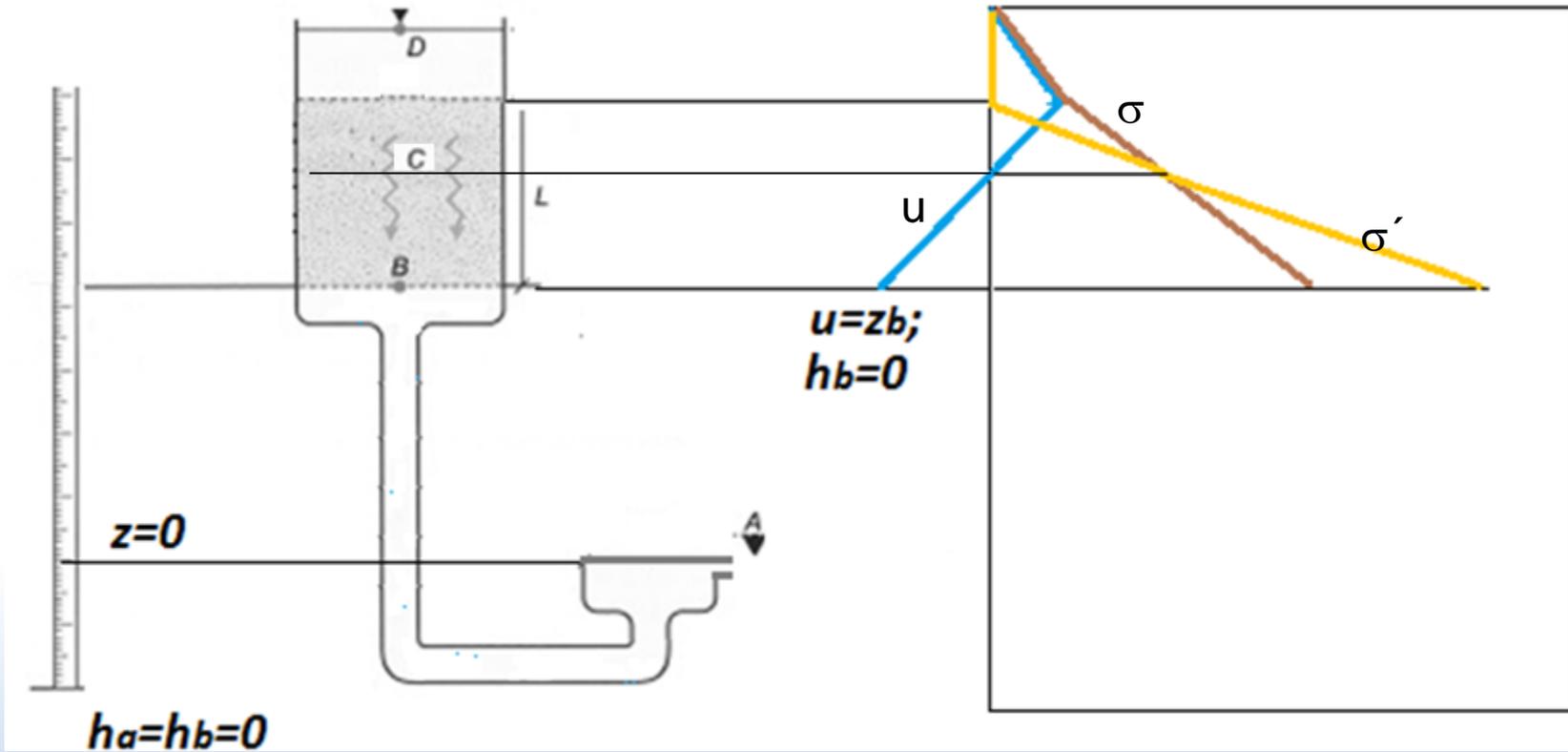
\* A la hora de resolver problemas de sifonamiento, el valor de tensión vertical y el de presión intersticial **se evalúan en la base del estrato** sobre el que se puede producir el sifonamiento.

NOTA: cuando se estudia el **fenómeno de sifonamiento en una red de flujo** (como veremos más adelante), la **zona de mayor riesgo se concentra donde las líneas equipotenciales estén más próximas o el canal de flujo sea más estrecho** (mayor es la velocidad del agua)

NOTA: el sifonamiento es más común en limos y en arenas finas y medias. La cementación (carbonatos, sílice) y la "stiction" en arcillas contrarrestan el fenómeno de sifonamiento.



## FLUJO VERTICAL DESCENDENTE

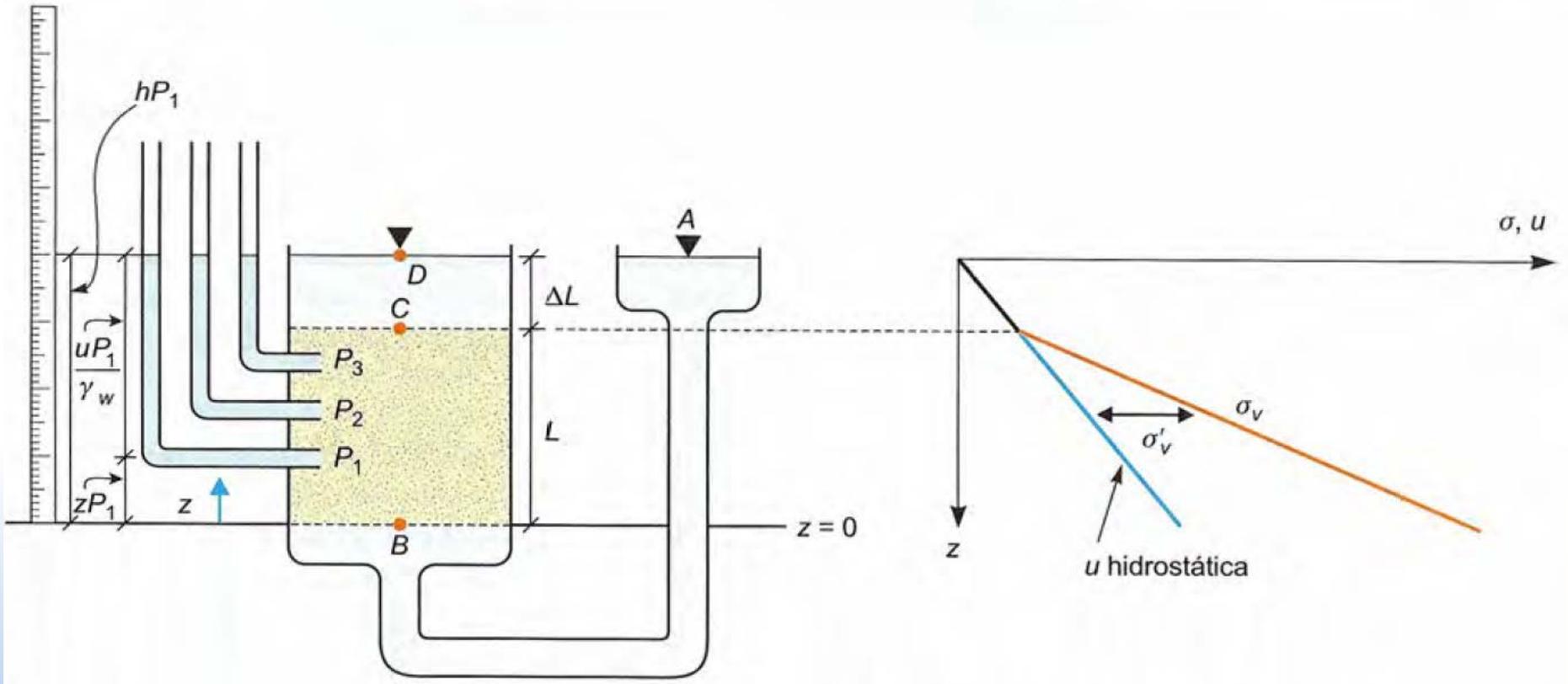


En este caso, el agua circula en dirección descendente y se desarrollan presiones intersticiales negativas.



Comparemos 3 casos:

**Caso 1: CONDICIONES HIDROSTÁTICAS**

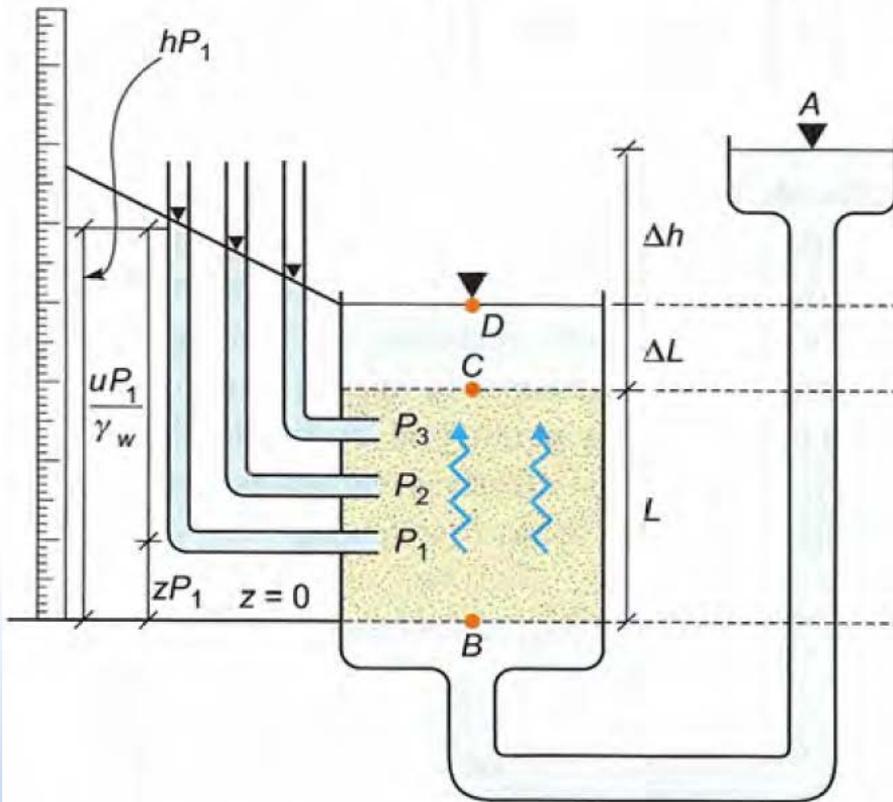


González de Vallejo et al. (2002)



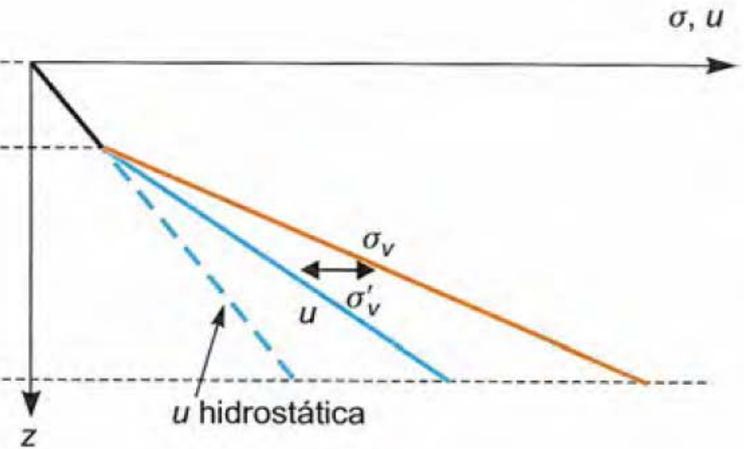
Comparemos 3 casos:

**Caso 2: FLUJO ASCENDENTE**



La presión ejercida por el peso del terreno  $\sigma$  se mantiene constante.

Cuanto más se acerque la línea de presiones intersticiales a la de tensiones totales del terreno, mayor es el riesgo de sifonamiento ( $\sigma'_v$  descende respecto del caso 1).



**IMPORTANTE:** al no tener condiciones hidrostáticas, no podemos evaluar la tensión intersticial a partir del peso de la columna de agua que se encuentra sobre el punto (B).

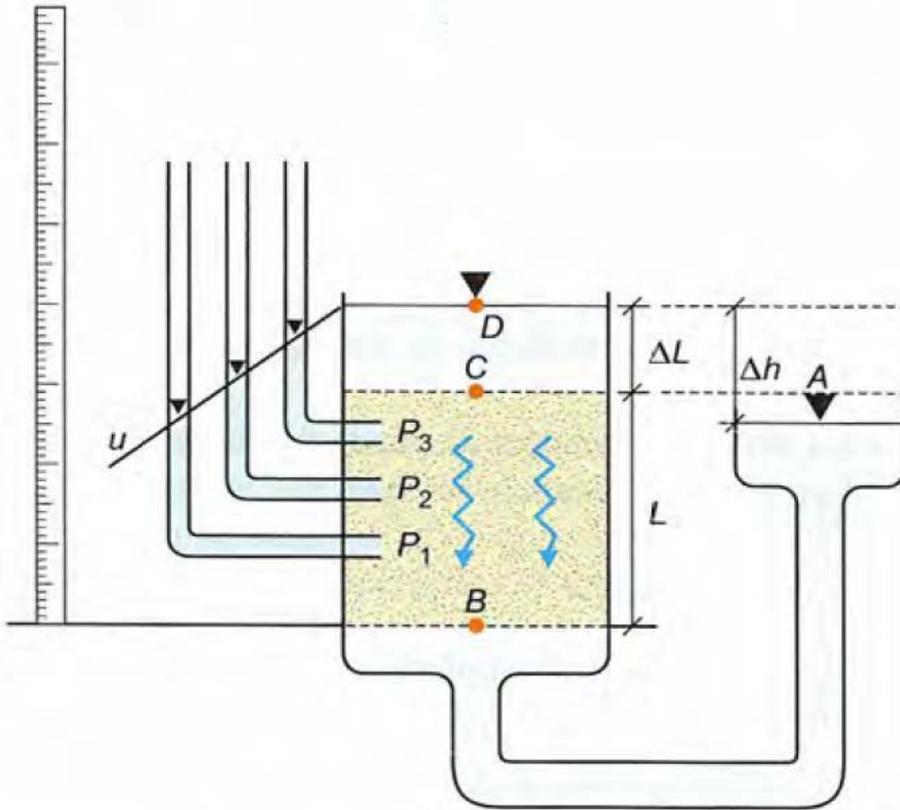
Fíjate como, de ser así, tendríamos 2 valores de  $u$  en el punto B, lo cual no es cierto.

González de Vallejo et al. (2002)



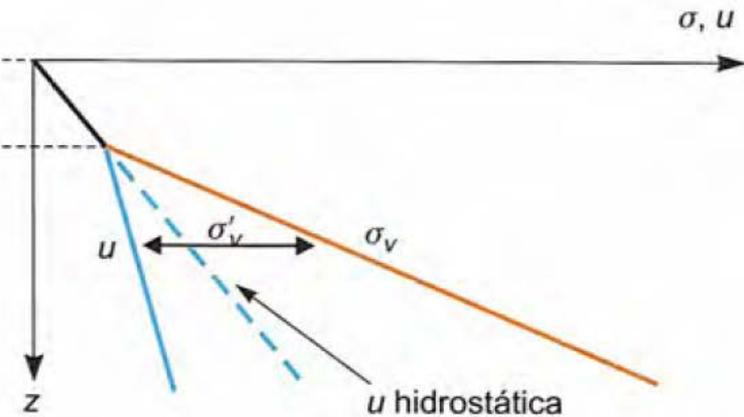
Comparemos 3 casos:

### Caso 3: FLUJO DESCENDENTE



**$\sigma'_v$  aumenta respecto del caso 1.**

En este caso, el agua circula en dirección descendente pero no se desarrollan presiones intersticiales negativas.



**IMPORTANTE:** al no tener condiciones hidrostáticas, no podemos evaluar la tensión intersticial a partir del peso de la columna de agua que se encuentra sobre el punto (B).

Fíjate como, de ser así, tendríamos 2 valores de u en el punto B, lo cual no es cierto.

González de Vallejo et al. (2002)

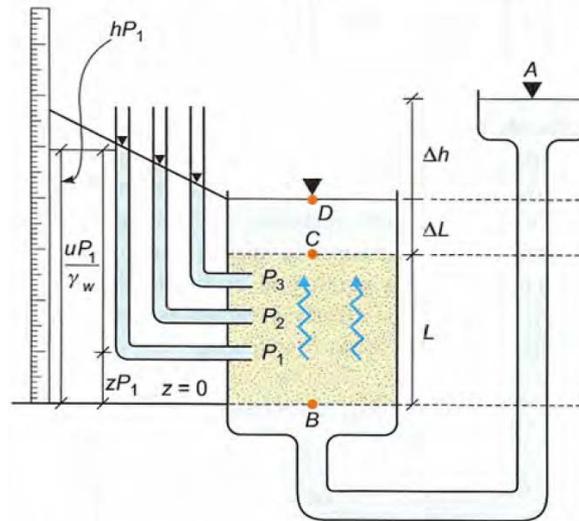


Comparemos 3 casos:

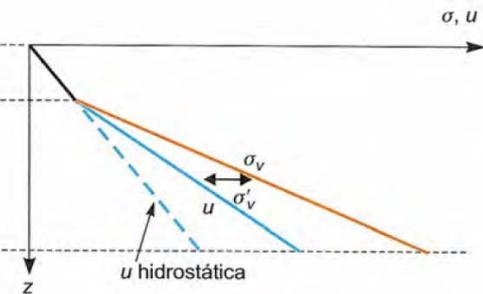
### Caso 2: FLUJO ASCENDENTE

#### PROBLEMA

Determina la altura del depósito de recarga para que se produzca sifonamiento



(plantea la ecuación).  
Dibuja el perfil de tensiones justo cuando comienza el sifonamiento.



González de Vallejo et al. (2002)

#### PROCEDIMIENTO

- Análisis del punto B.
- Cálculo de la tensión total.
- Cálculo de la intersticial (función de la incógnita  $\Delta h$ ).
- Hago valer la condición  $\sigma'_v=0$

$$\sigma'_v = \sigma_{total} - u = \rho_{sat} \cdot g \cdot L + \rho_w \cdot g \cdot \Delta L - \rho_w \cdot g \cdot (L + \Delta L + \Delta h) = 0$$

El mayor riesgo se da en la superficie del terreno (punto C), donde la tensión efectiva es menor.



### Caracterización de suelos

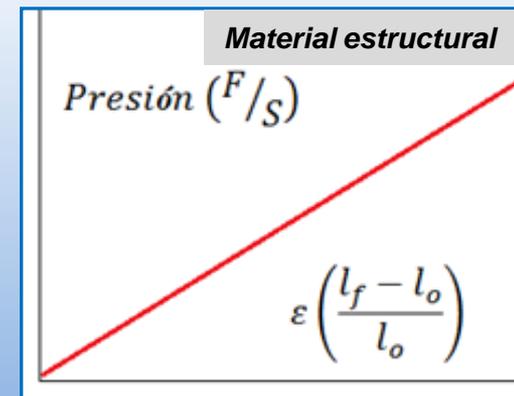
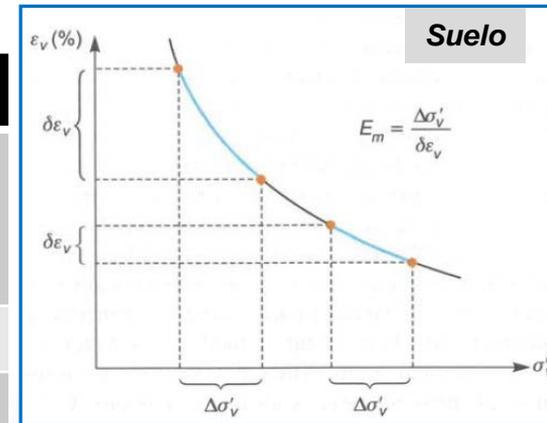
En suelos existen **más de dos parámetros independientes** para definir su comportamiento mecánico de acuerdo al tipo de sollicitación al que se someten.

El comportamiento de los suelos es más **complejo** que el de los materiales estructurales. Merced a esta complejidad, la **mecánica de suelos** (Terzaghi) **ha combinado experiencias de laboratorio, campo** y metodologías de ensayos (**bases empíricas**) **con las teorías existentes en elasticidad**, construyendo su propio cuerpo doctrinal.

### Diferencias entre materiales estructurales y suelos

	M. Estructural	Suelo
<u>Cualitativas</u>	<b>Deformación inmediata</b> (cierta capacidad de seguir deformándose con el tiempo)	<b>Deformación inmediata</b> (permanente y/o elástica) <b>y/o deformación a lo largo del tiempo</b> en suelos saturados (deformación permanente, consolidación)
	<b>Permite deformación a tracción</b>	<b>Deformación a tracción nula</b>
	<b>Deformación en volumen despreciable</b>	<b>Deformación en volumen y en forma</b>
	Un área cualquiera es representativa del esfuerzo	Se requiere un área mínima para englobar suficientes partículas de suelo
	Soporta esfuerzo a tracción,	No soporta esfuerzo a tracción
	<b>Compresión negativa</b>	<b>Compresión positiva</b>
<u>Cuantitativas</u>	<b>Deformaciones pequeñas</b>	<b>Deformaciones grandes</b>
	<b>Parámetros elásticos constantes</b>	<b>Parámetros elásticos dependientes de la carga y de la historia</b>

desdeelmurete.com

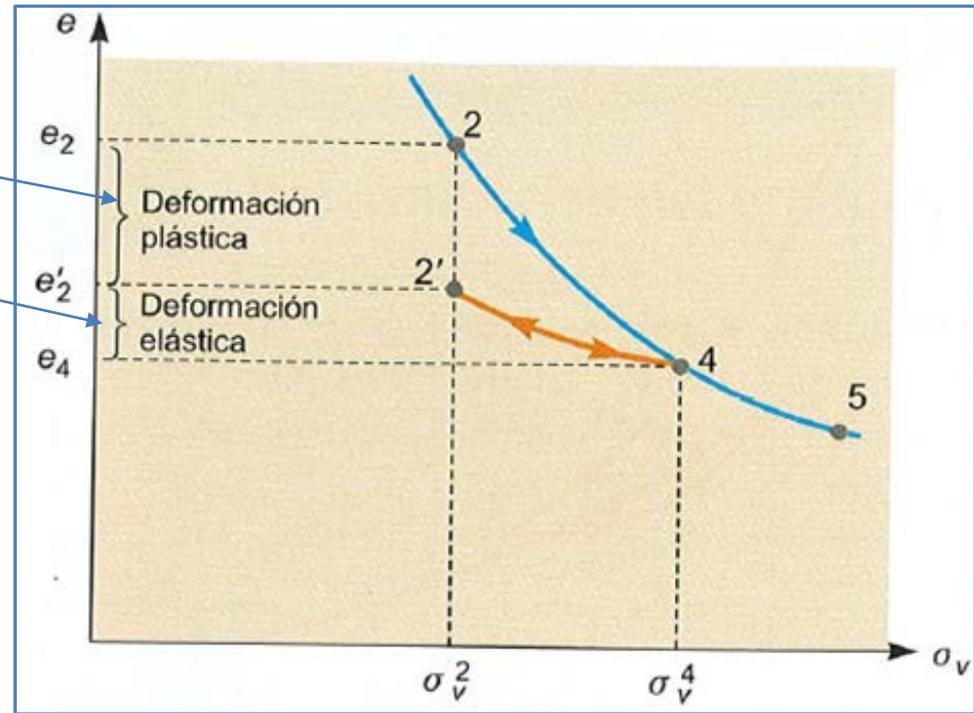




## Diferencias entre materiales estructurales y suelos

**Deformación plástica:** corresponde con la deformación adquirida por **deslizamiento entre partículas** del suelo, **expulsión de agua**, **consolidación secundaria**.

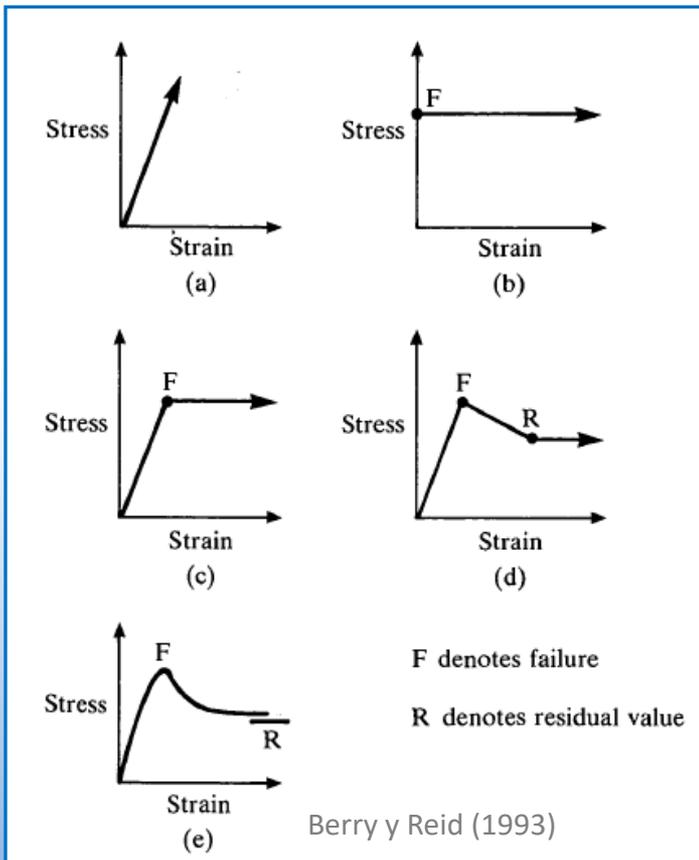
**Deformación elástica:** Corresponde sobre todo con la **deformación adquirida por las partículas** del suelo (sin cambio de volumen).  
Restitución elástica



González de Vallejo et al. (2002)

### Relaciones esfuerzo-deformación para materiales ideales:

- a) Elástico
- b) Plástico-rígido
- c) Elasto-plástico
- d) Elasto-plástico con ablandamiento
- e) Típica relación esfuerzo-deformación para un suelo real





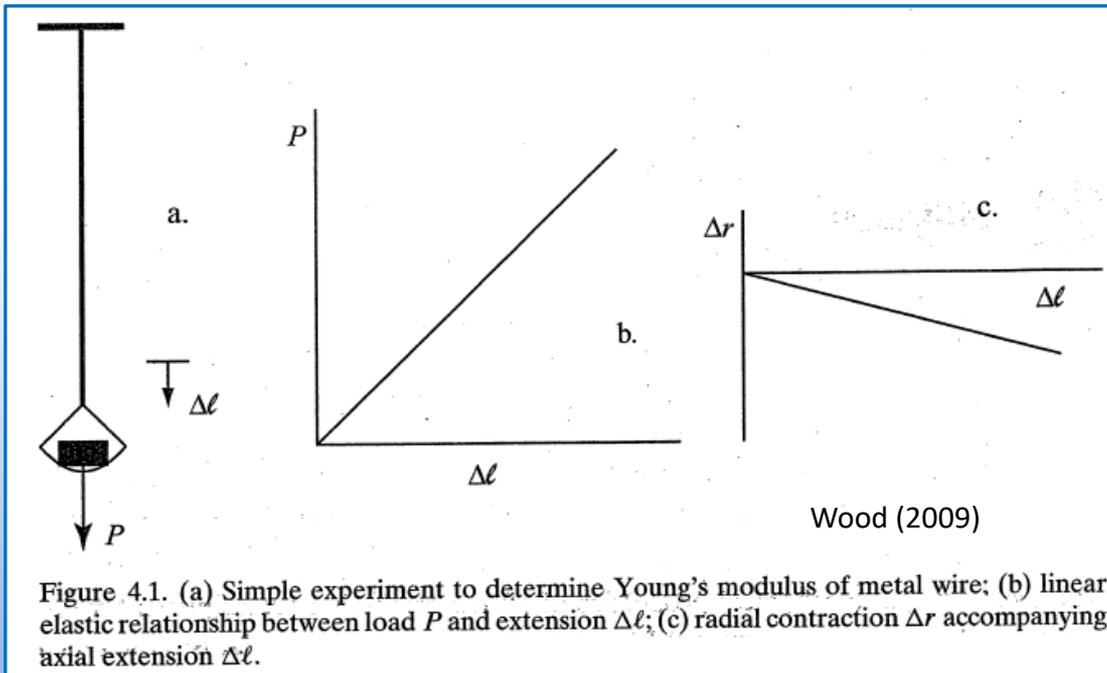
### Elasticidad. Parámetros elásticos. Módulo de Young (E)

Predecir las deformaciones del terreno es importante, **de cara al diseño de las estructuras** geotécnicas. Se asume que el terreno se deforma, pero tenemos que **conocer la respuesta** antes los esfuerzos previsibles, para evaluar si se encuentra dentro de la función de serviciabilidad de la estructura

Por ejemplo, una zapata se diseña de acuerdo con la **carga** que se prevé que cargue, las **propiedades resistentes del terreno** (que no rompa) y las deformaciones que se producen (**asientos**)

El modelo elástico (ley de Hooke:  $\sigma = \epsilon E$ ), que se aplica a medios homogéneos e isótropos, **reproduce de manera parcial la realidad** de la mecánica del suelo. Es un modelo sencillo y fácil de implementar a muchos problemas geotécnicos. Su **sencillez** radica en que **sólo es necesario asignar valores a dos parámetros**, el módulo de Young (E) y el coeficiente de Poisson ( $\nu$ )

En elasticidad es **necesario conocer dos coeficientes (entre K,  $\nu$ , G y E) para poder conocer el resto**. Además, se aplica el **principio de superposición** (la deformación que resulta de aplicar varios esfuerzos es la suma de las deformaciones resultantes al aplicar cada esfuerzo de forma individual).



El esfuerzo axial en la varilla vale:

$$\sigma_a = P/\pi r^2.$$

Y la deformación axial en la varilla:

$$\epsilon_a = \Delta l/l.$$

$$E = \frac{P}{\pi r^2} \frac{l}{\Delta l} = \frac{\sigma_a}{\epsilon_a}$$

Módulo de Young



## Elasticidad. Parámetros elásticos. Coeficiente de Poisson ( $\nu$ )

$$\nu = -\frac{\Delta r/r}{\Delta l/l} = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_a}$$

Módulo de Poisson ( $\nu$  = entre 0 y 0,5)

Relación entre  $\nu$  y E

$$\frac{P}{\pi r^2} \Big/ \frac{\Delta r}{r} = \frac{P}{\pi r^2} \frac{r}{\Delta r} = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_r} = -\frac{E}{\nu}$$

En general el módulo de Young es más determinante que el de Poisson. Éste ( $\nu$ ) lo es cuando se calculan empujes horizontales: pantallas, muros, pilotes o excavaciones

A partir de la relación entre  $\nu$  y E, se demuestra:

$$\varepsilon_{vol} = \frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\nu)\varepsilon_a$$

Ya que, si se considera que el comportamiento en el plano horizontal es isótropo ( $\varepsilon_a \varepsilon_b = \varepsilon_a \varepsilon_c = \varepsilon_b \varepsilon_c = 0$ ):

$$\varepsilon_{vol} = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c$$



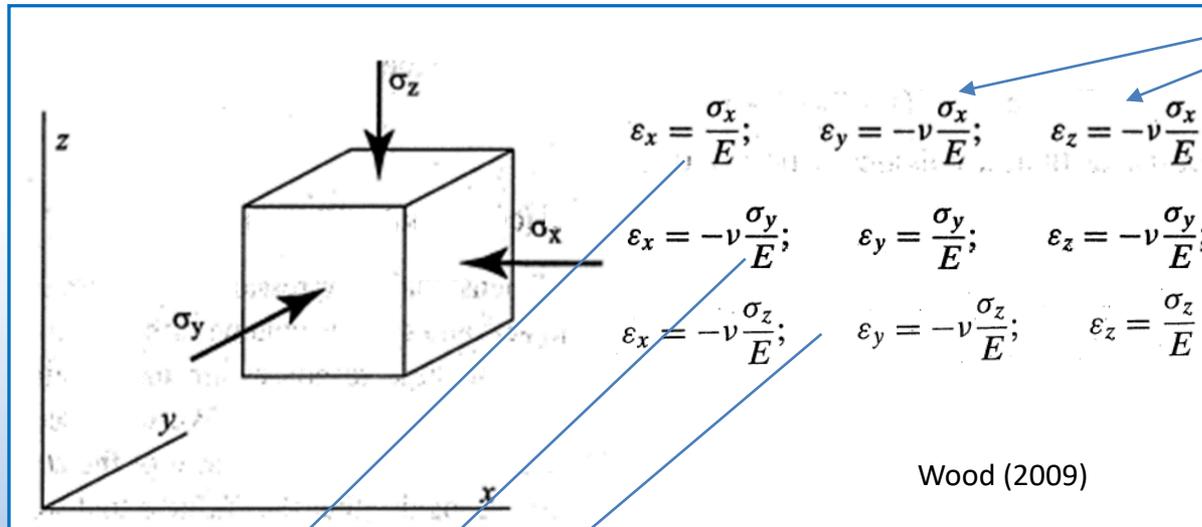
### Elasticidad. Parámetros elásticos

#### IDEAS:

- Cuando  $\nu = 0,5$  el material se deforma a volumen constante ( $\epsilon_{vol}=0$ )
- Cuando  $\nu = 0,5$  las deformaciones horizontales son la mitad de la que se producen verticalmente

$$\epsilon_{vol} = \frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\nu)\epsilon_a = 0 \Rightarrow \epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = 0 \quad \epsilon_a = -2 \epsilon_r \quad (a, b, c) = (x, y, z)$$

#### CASO GENERAL:



$$\frac{\sigma_a}{\epsilon_r} = -\frac{E}{\nu}$$

Relación entre  $\nu$  y  $E$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}; \quad \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}; \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$



## Elasticidad. Parámetros elásticos. Módulo de rigidez volumétrica (K) y módulo de rigidez transversal (G)

Módulo de compresibilidad o de deformación volumétrica K = bulk modulus

- Tiene unidades de presión, se utiliza para presiones de confinamiento, en las tres direcciones.
- Expresa el cambio de tamaño, pero no de forma.
- El aumento del coeficiente de compresibilidad volumétrica significa que se precisa más fuerza para conseguir la misma deformación volumétrica unitaria.

En suelos, como  $\nu \approx 0.3$ , K y E son del mismo orden de magnitud (**Ejercicio 1**). K tiende a infinito cuando no hay cambio de volumen en el suelo, condiciones no drenadas,  $\nu \approx 0.5$ .

Módulo de rigidez

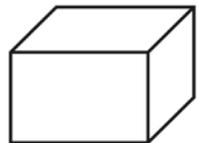
En un sólido elástico puro, como la goma de borrar, el módulo de rigidez transversal G expresa la resistencia a la deformación sin cambio de volumen.

La relación entre el módulo de rigidez transversal con los dos coeficientes es

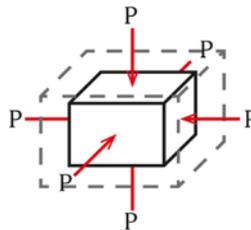
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Módulo de rigidez volumétrica (Bulk modulus), K

$$K = \frac{\Delta P}{-\frac{\Delta V}{V}}$$



wikipedia.org



Módulo de rigidez transversal o de corte

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$



OJO! P es tensión, y no fuerza nomenclatura según el autor.



## Ejercicio 1

Deducir la relación entre E y K. Comprobar que son del mismo orden de magnitud para la mayoría de suelos ( $\nu \approx 0,3$ )

- Se ha de calcular de forma independiente la deformación en una misma dirección debida a las tres fuerzas (una actuando en paralelo y dos perpendicularmente). Principio de superposición.
- Utilizar la definición del módulo de Poisson

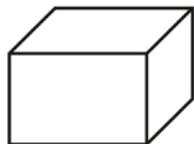
$$\nu = -\frac{\Delta r/r}{\Delta l/l} = -\frac{\epsilon_r}{\epsilon_a}$$

- Recuerda

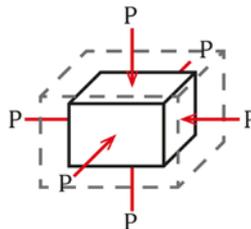
$$\epsilon_{vol} = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c$$

Módulo de rigidez volumétrica (Bulk modulus). K

$$K = \frac{\Delta P}{-\frac{\Delta V}{V}}$$



wikipedia.org



Módulo de rigidez transversal o de corte

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

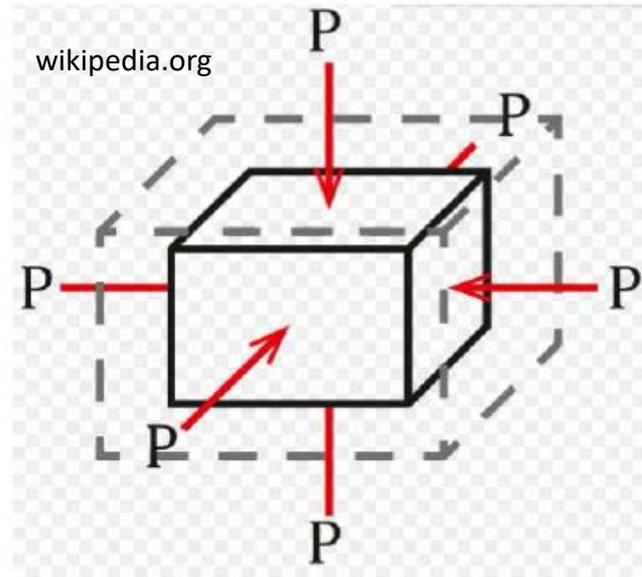




Ejercicio 1

Solución

Tensión aplicada:  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = P$



$$K = \frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V_0}} = \text{con los datos del problema} = \frac{P}{-\varepsilon_{\text{vol}}}$$

Como  $\varepsilon_{\text{vol}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

Pero tenemos una presión en las 3 direcciones (x,y,z)



## Ejercicio 1

Tenemos que:

- 1) Debido a la tensión  $\sigma_x$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Es decir:

$$\varepsilon_{\text{vol},\sigma_x} = \varepsilon_{x,\sigma_x} + \varepsilon_{y,\sigma_x} + \varepsilon_{z,\sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} (1 - 2\nu) = \frac{P}{E} (1 - 2\nu)$$

- 2) Debido a la tensión  $\sigma_y$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

Es decir:

$$\varepsilon_{\text{vol},\sigma_y} = \varepsilon_{x,\sigma_y} + \varepsilon_{y,\sigma_y} + \varepsilon_{z,\sigma_y} = \frac{\sigma_y}{E} (1 - 2\nu) = \frac{P}{E} (1 - 2\nu)$$

- 3) Debido a la tensión  $\sigma_z$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

Es decir:

$$\varepsilon_{\text{vol},\sigma_z} = \varepsilon_{x,\sigma_z} + \varepsilon_{y,\sigma_z} + \varepsilon_{z,\sigma_z} = \frac{\sigma_z}{E} (1 - 2\nu) = \frac{P}{E} (1 - 2\nu)$$

Y, por tanto, sumando todas las componentes de  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,\sigma_x} + \varepsilon_{x,\sigma_y} + \varepsilon_{x,\sigma_z}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y,\sigma_x} + \varepsilon_{y,\sigma_y} + \varepsilon_{y,\sigma_z}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z,\sigma_x} + \varepsilon_{z,\sigma_y} + \varepsilon_{z,\sigma_z}$$



## Ejercicio 1

Entonces

$$\varepsilon_{\text{vol}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{3P}{E}(1 - 2\nu)$$

Como, por la definición de K:

$$K = \frac{P}{-\varepsilon_{\text{vol}}}$$

Entonces

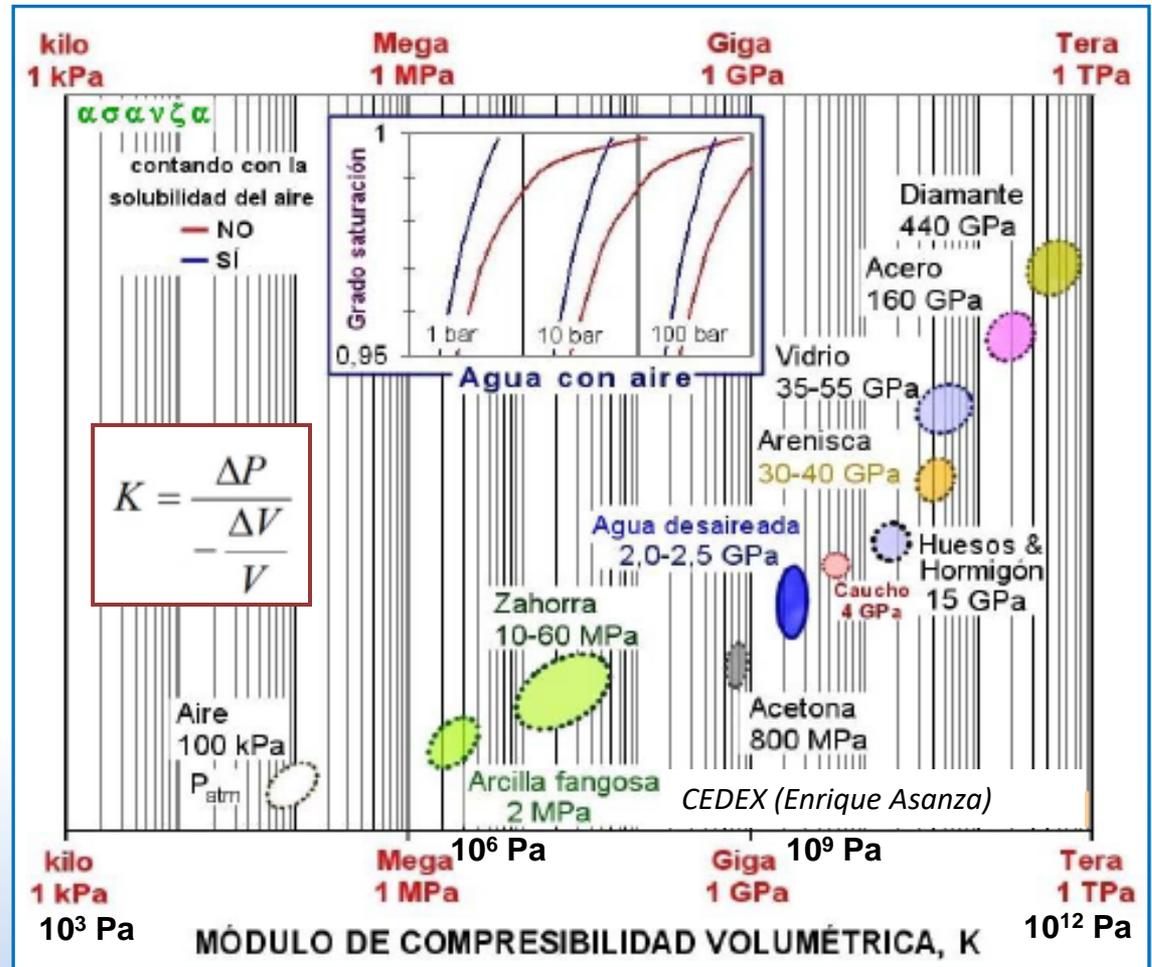
$$K = \frac{P}{-\varepsilon_{\text{vol}}} = -\frac{P}{\frac{3P}{E}(1-2\nu)} = -\frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Y si  $\nu = 0.3$

$$K = -\frac{E}{3(1-2\nu)} = -\frac{E}{1.2} \quad \text{K y E son del mismo orden de magnitud}$$



Elasticidad. Parámetros elásticos.  
Valores habituales en suelos



	Arcillas blandas y fangos	Limos arenosos	Arenas de compacidad media	Arenas y gravas muy densas
E (T/m <sup>2</sup> )	< 1000	1000 a 2500	2500 a 6000	> 6000
v	0.35 a 0.4	0.3 a 0.35	≈0.3	0.25 a 0.3



## El estado tensional de un suelo

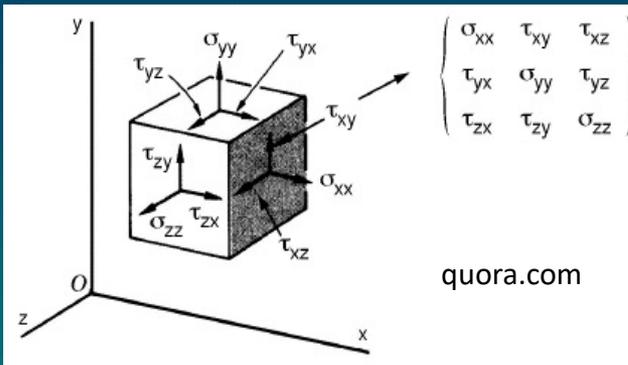
### Principios fundamentales de la mecánica de medios continuos:

- En cualquier sólido que no experimenta aceleración, sus **fuerzas y momentos deben estar en equilibrio**
- Para cualquier sólido que está experimentando deformación, las **deformaciones deben ser compatibles entre si**

### La mecánica de sólidos asume un comportamiento ideal de los materiales:

- **Isotropía** (mismas propiedades en todas las direcciones que parten de un mismo punto)
- **Homogeneidad** (mismas propiedades en todos los puntos del sólido)
- **Continuidad** (no existen huecos en el sólido)

Sea un punto cualquiera de un medio continuo o sólido en equilibrio:



$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

quora.com

- Por equilibrio de fuerzas se considera que las tensiones normales y tangenciales en dos caras opuestas son iguales en módulo y de sentido contrario.

- Al tomar momentos respecto a los ejes coordenados se tiene que  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

TENSIONES EN FORMA MATRICIAL:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

**TENSOR DE TENSIONES**

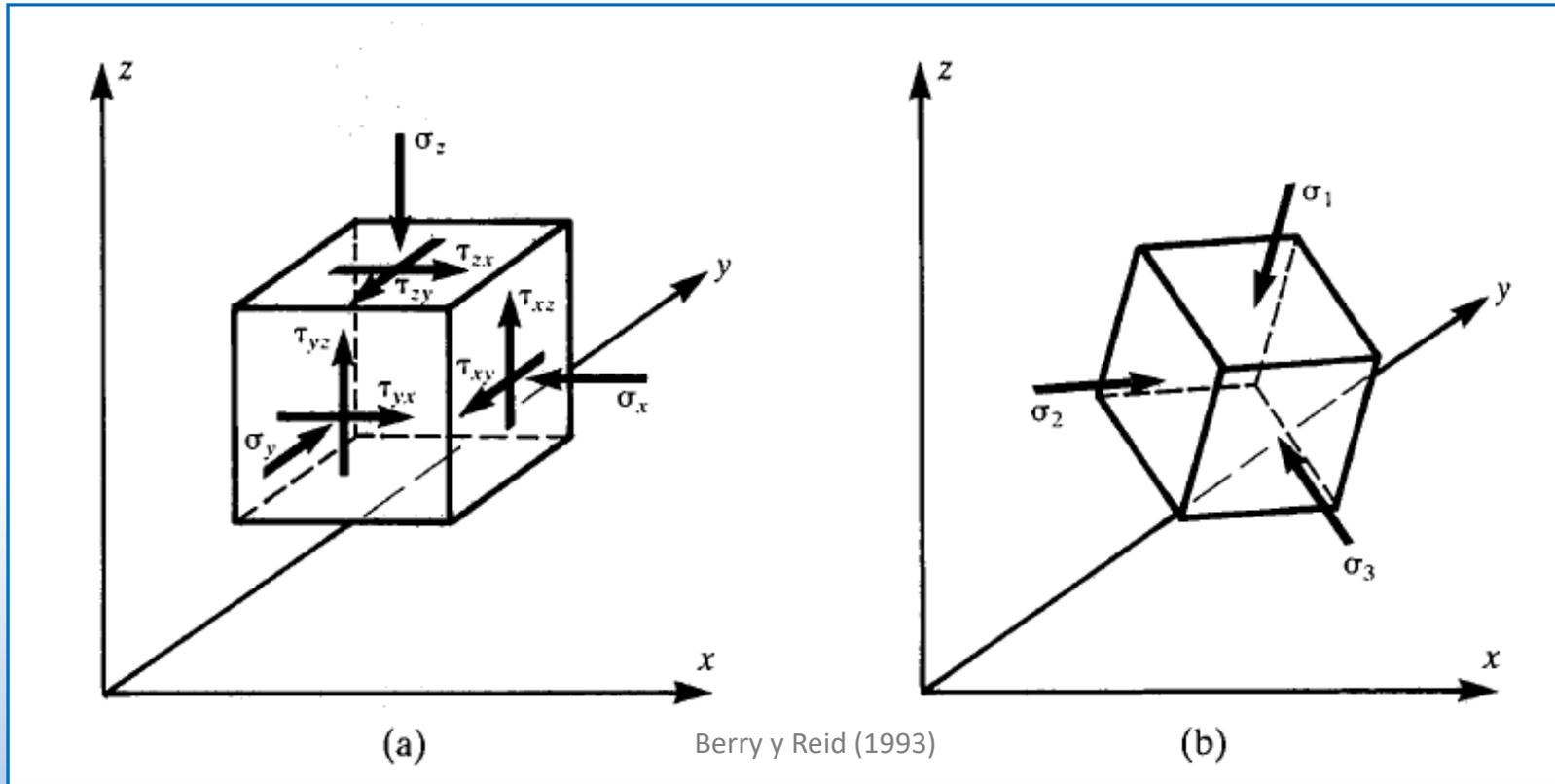
Los **valores de tensiones en tres planos perpendiculares cualesquiera** se representan mediante el **tensor de tensiones**

Es **simétrico** por la **condición de equilibrio**, de manera que  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Esto hace que **sólo se precisen 6 componentes** para determinar el estado de esfuerzos en un punto determinado



El estado tensional de un suelo

Para cada estado de esfuerzos en un sólido en equilibrio, debe existir en el elemento un conjunto de planos perpendiculares entre si para los que el esfuerzo cortante es nulo (planos principales)



(a) Estado general de esfuerzos en un elemento de suelo

(b) Esfuerzos principales



## El estado tensional de un suelo

El estado tensional de un suelo se puede descomponer en la suma de la **matriz de compresión isótropa** (tensor esférico, octaédrico) y la **de cizallamiento** (tensor desviador). La **primera componente** es responsable de los **cambios de volumen**, mientras que la **parte desviadora** lo es de los **cambios de forma, cizallamiento o distorsión**

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

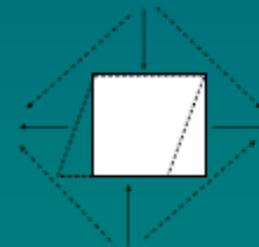
: Este tensor representa una compresión isótropa



Varía el volumen, mientras la forma permanece constante

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - p \end{pmatrix}$$

: Este tensor representa una cizalladura pura



Varía la forma

El cortante puro tiene el mismo efecto que la aparición de cortantes sobre los planos, que en realidad son planos principales

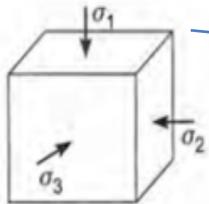


## El estado tensional de un suelo

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - u & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - u & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - u \end{bmatrix}$$

Las **presiones intersticiales** y sus **variaciones sólo afectan al tensor de compresión isótropa** (sólo cambios de volumen)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 - u & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - u & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - u \end{bmatrix}$$

Sea  $(\sigma)$  el estado tensional en un punto de suelo y  $(u)$  el incremento de presión intersticial debido a cambios en el N.F.:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + u & 0 & 0 \\ 0 & 6 + u & 0 \\ 0 & 0 & 7 + u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$



## Relación de tensiones: caso geostático

El **estado geostático** de tensiones es el **debido al peso específico** del terreno y la posición del **nivel freático** (tensión efectiva, Terzaghi 1923). Es habitual asumir que la superficie del terreno es horizontal.

A esto puede añadirse, además, la aparición de otras fuerzas externas de tipo tectónico, sísmico o antrópico (movimientos de tierras, bulones, cimentaciones...)

### Coefficiente de empuje al reposo ( $k_o$ )

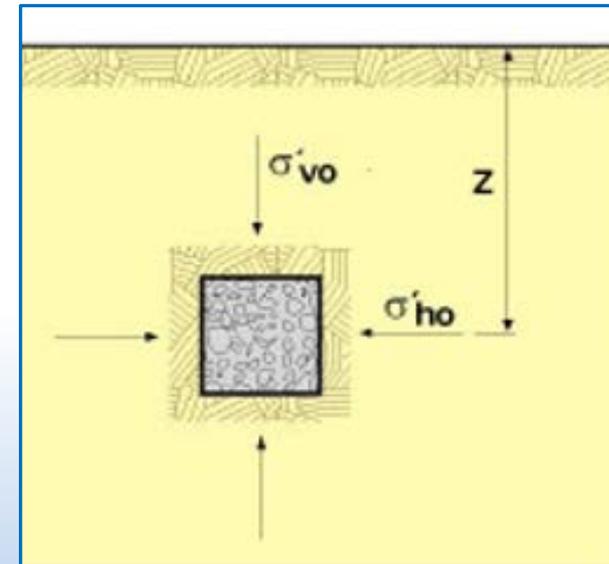
$$k_o = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_v}$$

Las **hipótesis** de partida habituales son: **no hay deformación lateral** aunque se desarrollen esfuerzos (condiciones edométricas), el suelo tiene un **comportamiento elástico, es homogéneo e isótropo** (es **habitual** también **suponer**, a la hora de determinar  $\sigma'_h$ , un **suelo seco**).

$K_o$  en arenas normalmente sedimentadas tiene un valor **entre 0.4 – 0.5**. Si el material se encuentra **sobreconsolidado**, puede llegar a 3.

Existen **distintas expresiones experimentales** para el valor de  $k_o$

En todas depende de la historia tensional del suelo



González de Vallejo et al. (2002)



## Relación de tensiones: caso geostático

### • Empujes al reposo

\* En su estado natural existen en el terreno presiones efectivas verticales y horizontales cuyos valores dependen de que el suelo se encuentre normalmente consolidado o preconsolidado.

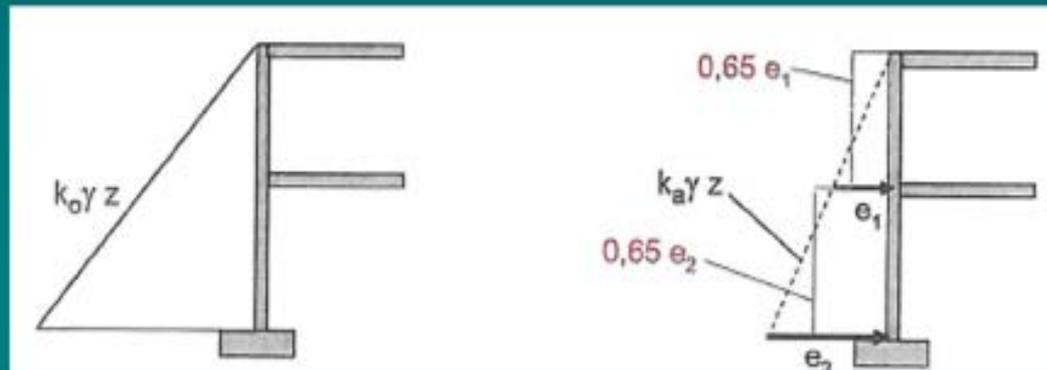
\* Si se supone que la excavación se realiza rápidamente y se construye también rápidamente contra el terreno una estructura que no permite movimientos significativos, por ejemplo, un muro muy rígido con movimientos despreciables, los empujes deberían ser similares a las presiones horizontales que existieran en el terreno en su estado natural.

### Terrenos Normalmente Consolidadas (NC):

\* En el caso de los muros hormigonados contra el terreno, con movimientos despreciables, la ley de empujes horizontales en terrenos normalmente consolidados, sería linealmente creciente con la profundidad, con valores correspondientes al coeficiente de empuje al reposo con la expresión de Jaky:

$$k_o^{NC} = 1 - \text{sen}\phi'$$

$$e = k_o^{NC} \cdot \gamma \cdot z$$





## Relación de tensiones: caso geostático

Terrenos Preconsolidados (sobreconsolidados, OC):

### Empujes al reposo

En el caso de los muros hormigonados contra el terreno, en los que no se hayan producido prácticamente movimientos antes de la construcción, la ley de empujes horizontales en terrenos preconsolidados, sería linealmente creciente con la profundidad, con valores correspondientes al coeficiente de empuje al reposo determinados con la siguiente expresión recomendada por el CTE:

$$k_o^{OC} = (1 - \text{sen } \phi') \cdot \sqrt{OCR}$$

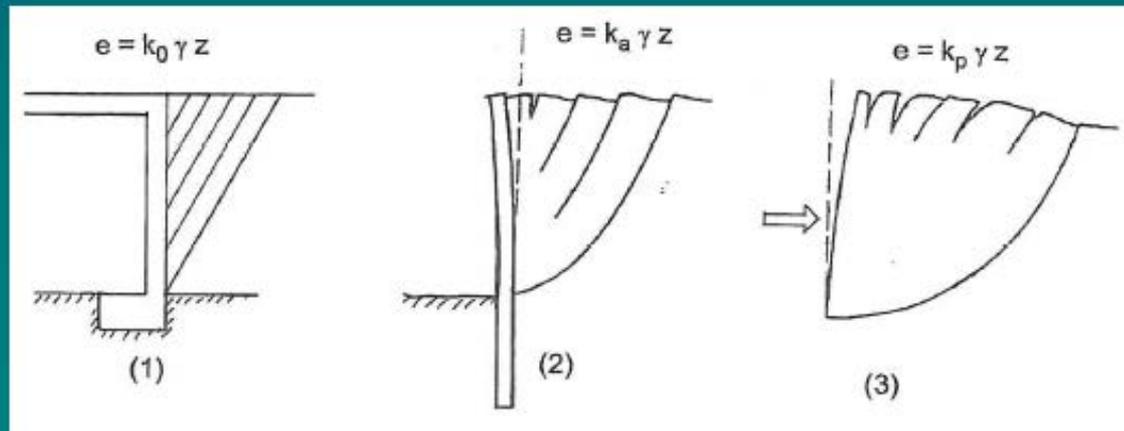
$$OCR = \frac{\sigma'_{vmax}}{\sigma'_{v0}}$$



## Relación de tensiones: caso geostático

### Influencia de la existencia de muros: empuje al reposo, empuje activo y empuje pasivo

- **Influencia de los movimientos de los muros en los empujes generados**
- Cuando los desplazamientos de la estructura son muy pequeños, las presiones provocadas por los empujes tienden a ser similares a las tensiones que existían en el terreno antes de construir la estructura, por lo que se denominan **empujes al reposo**.
- Si los movimientos alcanzan un cierto valor, que depende del tipo de terreno, el suelo puede llegar a plastificarse al acompañar a la estructura en su movimiento y los empujes resultan menores, reduciéndose hasta un valor que se denomina **empuje activo**.
- Cuando la estructura empuja contra el terreno, invirtiendo el sentido del movimiento y llega a plastificar a éste, se produce un empuje resistente del terreno, que se denomina **empuje pasivo**.





## Relación de tensiones: caso geostático

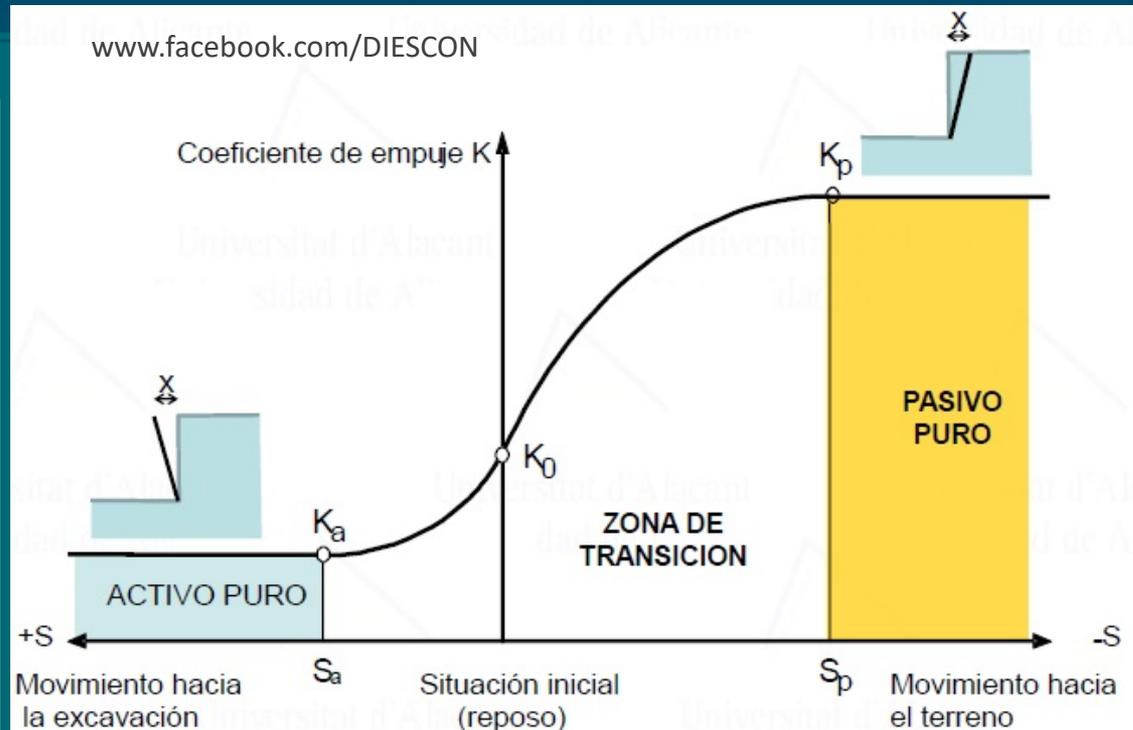
### Influencia de la existencia de muros: empuje al reposo, empuje activo y empuje pasivo

La figura adjunta sintetiza las situaciones de interacción suelo-estructura en función de los desplazamientos correspondientes.

Hace falta **muy poca relajación** (desplazamiento o deformación) para que se movilice el empuje **activo**.

Precisamos **mucho desplazamiento** para que se movilice todo el empuje **pasivo**.

Si la magnitud del desplazamiento es la misma (se afloja en trasdós lo mismo que se comprime el pie), sólo se activa **parcialmente el empuje pasivo**.



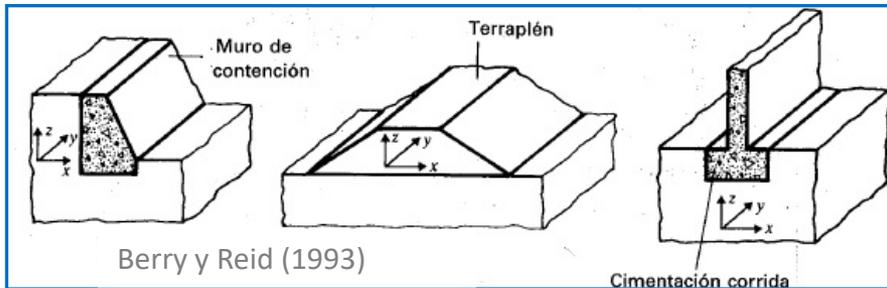
Desplazamiento del muro a partir del estado de reposo



### Introducción

### Deformación plana

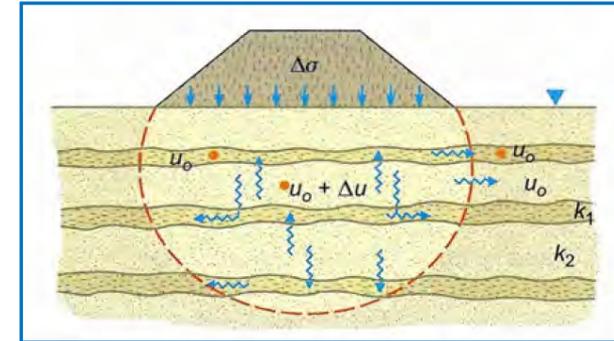
La **estructura** que apoya sobre el terreno tiene **una dimensión muy desarrollada respecto a las otras**, por lo que la deformación en ese sentido sólo se produce en los bordes de la estructura.



Berry y Reid (1993)

Cimentación corrida

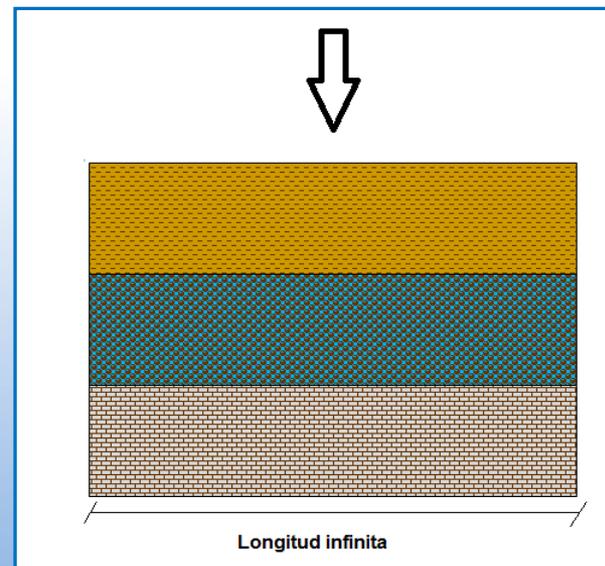
Problemas típicos de deformación plana



González de Vallejo et al. (2002)

### Deformación unidimensional

La **longitud máxima de apoyo de la estructura es muy grande** en relación con el espesor del estrato que se deforma → **Condiciones edométricas**, los **incrementos de tensiones debidos a las cargas en superficie son constantes para todo el espesor del estrato**



$\Delta\sigma'$  debido a variaciones de N.F., sedimentación, cargas repartidas sobre un área muy extensa ...



No hay deformación lateral



# ESFUERZOS DEBIDOS A CARGAS APLICADAS. BULBOS DE ESFUERZOS

## Introducción

El **problema de la distribución** y predicción **de esfuerzos y deformaciones**:

- Se estudia para un **rango de esfuerzos por debajo de la falla**, campo **lineal**, de **equilibrio elástico**, siendo el suelo un **material homogéneo, isótropo** y linealmente elástico
- Las **propiedades del suelo** están definidas por el **módulo de elasticidad E** y por el **coeficiente de Poisson  $\nu$**

**Boussinesq** desarrolló en 1885 las **expresiones matemáticas para obtener el incremento de esfuerzos** en un punto cualquiera de una **masa semi-infinita** (el espacio de Boussinesq se caracteriza por extenderse de forma infinita en profundidad y lateralmente) debido a la aplicación de una **carga puntual en una superficie horizontal de suelo**

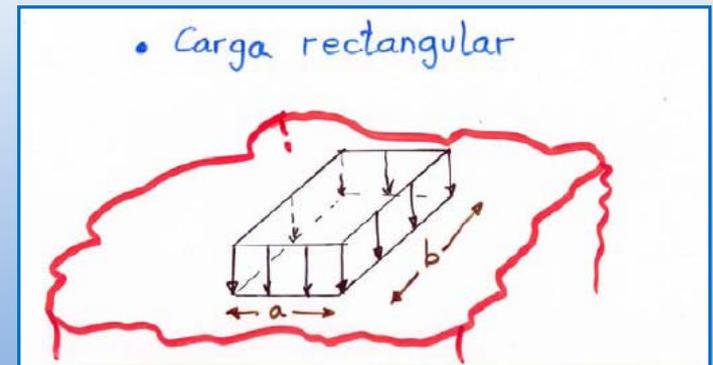
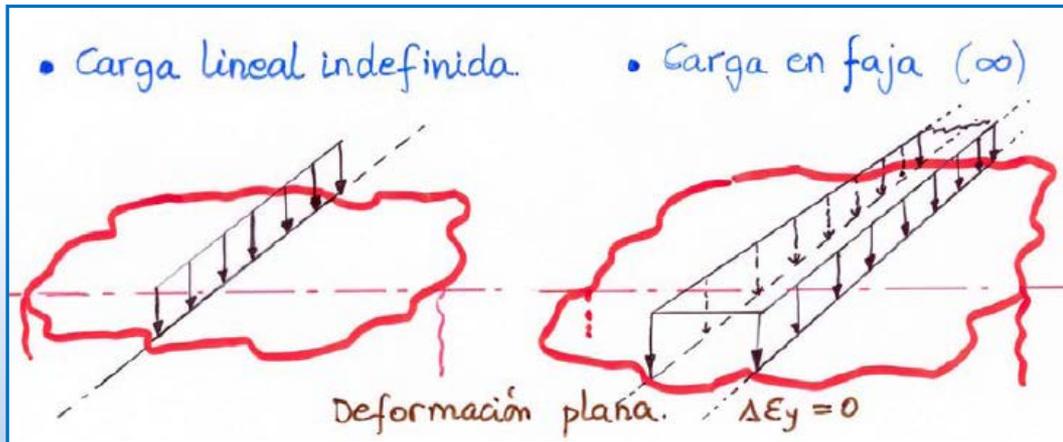
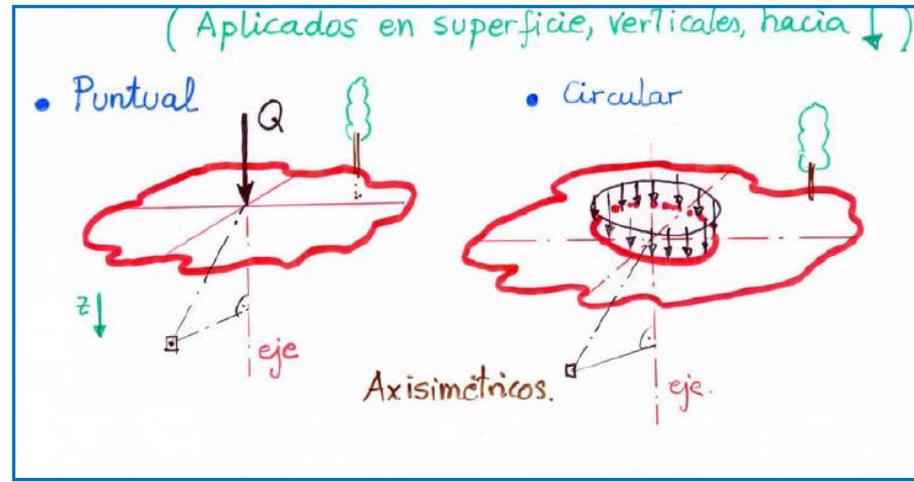
Posteriormente, **aplicando el principio de superposición** e integrando las soluciones de Boussinesq, **otros autores** [Scott (1963), Poulos y Davis (1974), Harr (1996)] obtuvieron **expresiones para distintas geometrías de suelo y condiciones de cimentación (distribuciones de carga)**

**Los cálculos**, que se obtienen a partir de las formulaciones o de los ábacos, **no tienen en consideración las tensiones geostáticas, que habrá que sumar. Tampoco** que existan **otro tipo de tensiones iniciales**, como las ocasionadas por obras de ingeniería o por procesos tectónicos.

**Se supone**, en todos los casos, que las **estructuras de apoyo son flexibles** (se deforman con el terreno)



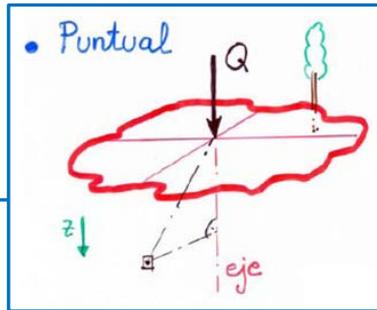
Tipos de carga





# ESFUERZOS DEBIDOS A CARGAS APLICADAS. BULBOS DE ESFUERZOS

## Carga puntual vertical



$$\Delta\sigma_v = \frac{3Q}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\Delta\sigma_r = \frac{Q}{2\pi} \left[ \frac{3r^2z}{(r^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1 - 2\nu}{r^2 + z^2 + z\sqrt{r^2 + z^2}} \right]$$

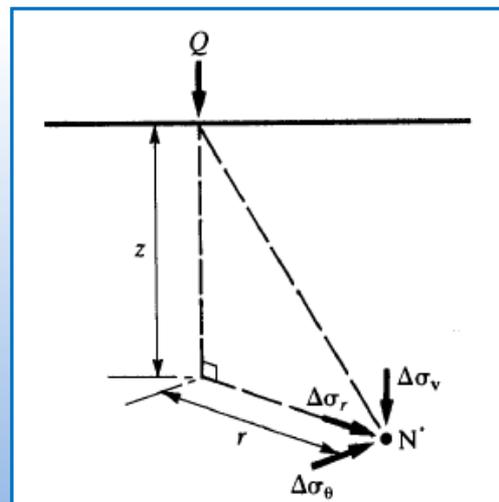
$$\Delta\sigma_\theta = -\frac{Q}{2\pi} (1 - 2\nu) \left[ \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{r^2 + z^2 + z\sqrt{r^2 + z^2}} \right]$$

$$\Delta\tau_{rz} = \frac{3Q}{2\pi} \frac{rz^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}}$$

**z = profundidad** desde la superficie del suelo al punto N

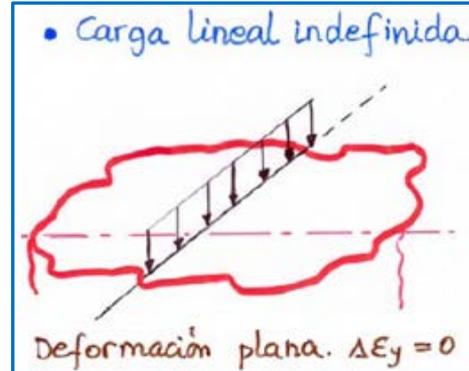
**r = distancia radial** desde N hasta la línea de acción de Q

$\nu$  = coeficiente de Poisson



Berry y Reid (1993)

## Carga lineal

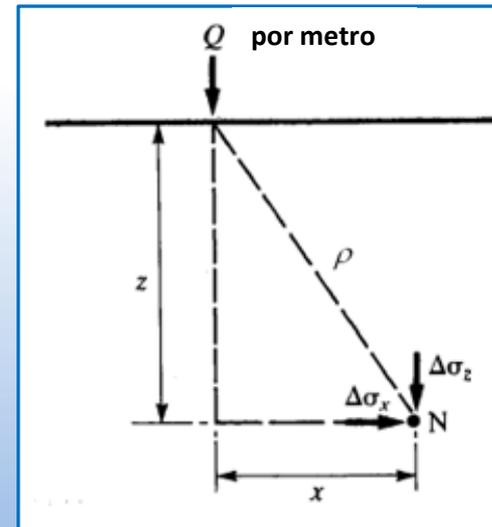


$$\Delta\sigma_z = \frac{2Q}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2}$$

$$\Delta\sigma_x = \frac{2Q}{\pi} \frac{x^2z}{(x^2 + z^2)^2}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{2Q\nu}{\pi} \frac{z}{(x^2 + z^2)}$$

$$\Delta\tau_{xz} = \frac{2Q}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}$$



Berry y Reid (1993)

Tensiones principales

$$\sigma_1 = \sigma_\rho = \frac{2q}{\pi} \frac{z}{\rho^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_\psi = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_y$$

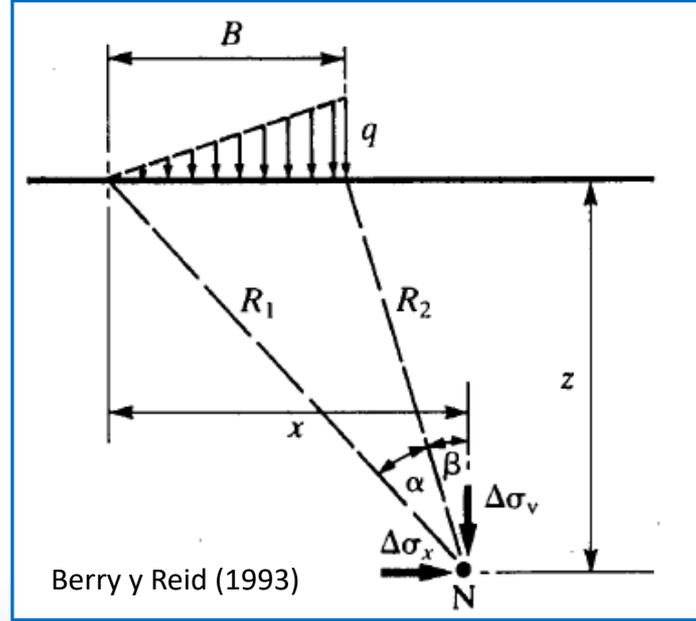
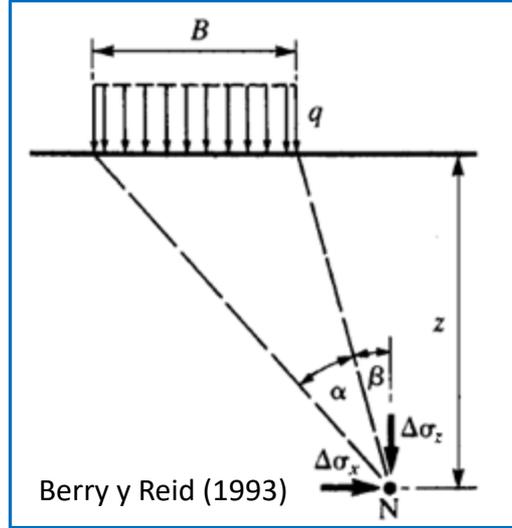
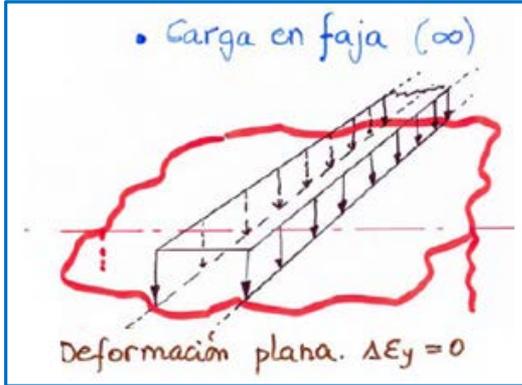


# ESFUERZOS DEBIDOS A CARGAS APLICADAS. BULBOS DE ESFUERZOS

**G. García. UPCT**

**Carga de distribución rectangular sobre franja infinita de anchura B**

**Carga de distribución triangular sobre franja infinita de anchura B**



$$\Delta \sigma_z = \frac{q}{\pi} [\alpha + \sin \alpha \cos (\alpha + 2\beta)]$$

$$\Delta \sigma_x = \frac{q}{\pi} [\alpha - \sin \alpha \cos (\alpha + 2\beta)]$$

$$\Delta \sigma_y = \frac{2q}{\pi} \nu \alpha$$

$$\Delta \tau_{xz} = \frac{q}{\pi} \sin \alpha \sin (\alpha + 2\beta)$$

Tensiones principales

$$\sigma_1 = \frac{q}{\pi} (\alpha + \operatorname{sen} \alpha)$$

$$\sigma_3 = \frac{q}{\pi} (\alpha - \operatorname{sen} \alpha)$$

$$\sigma_2 = \sigma_y$$

**$q =$  carga máxima (peso específico por altura máxima del terraplén)**

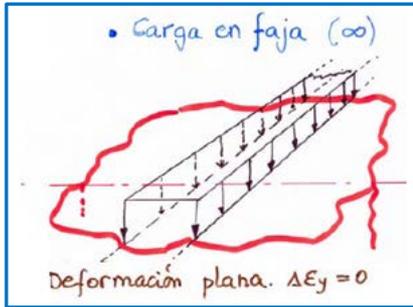
$$\Delta \sigma_z = \frac{q}{\pi} \left[ \frac{x}{B} \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right]$$

$$\Delta \sigma_x = \frac{q}{\pi} \left[ \frac{x}{B} \alpha - \frac{z}{B} \ln \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right]$$

$$\Delta \tau_{xz} = \frac{q}{2\pi} \left[ 1 + \cos 2\beta - \frac{2z}{B} \alpha \right]$$



Carga de distribución rectangular sobre franja infinita. Esfuerzo vertical



La profundidad hasta la cuál es esfuerzo es significativo se denomina **zona de influencia**, se encuentra en la vertical del centro geométrico del área cargada y puede tomarse entonces como aproximadamente:

- 10 veces el ancho en el caso de una franja infinitamente larga (un terraplén)
- 3 veces el ancho de un área cuadrada cargada (losa)
- 3 veces el diámetro para un área circular

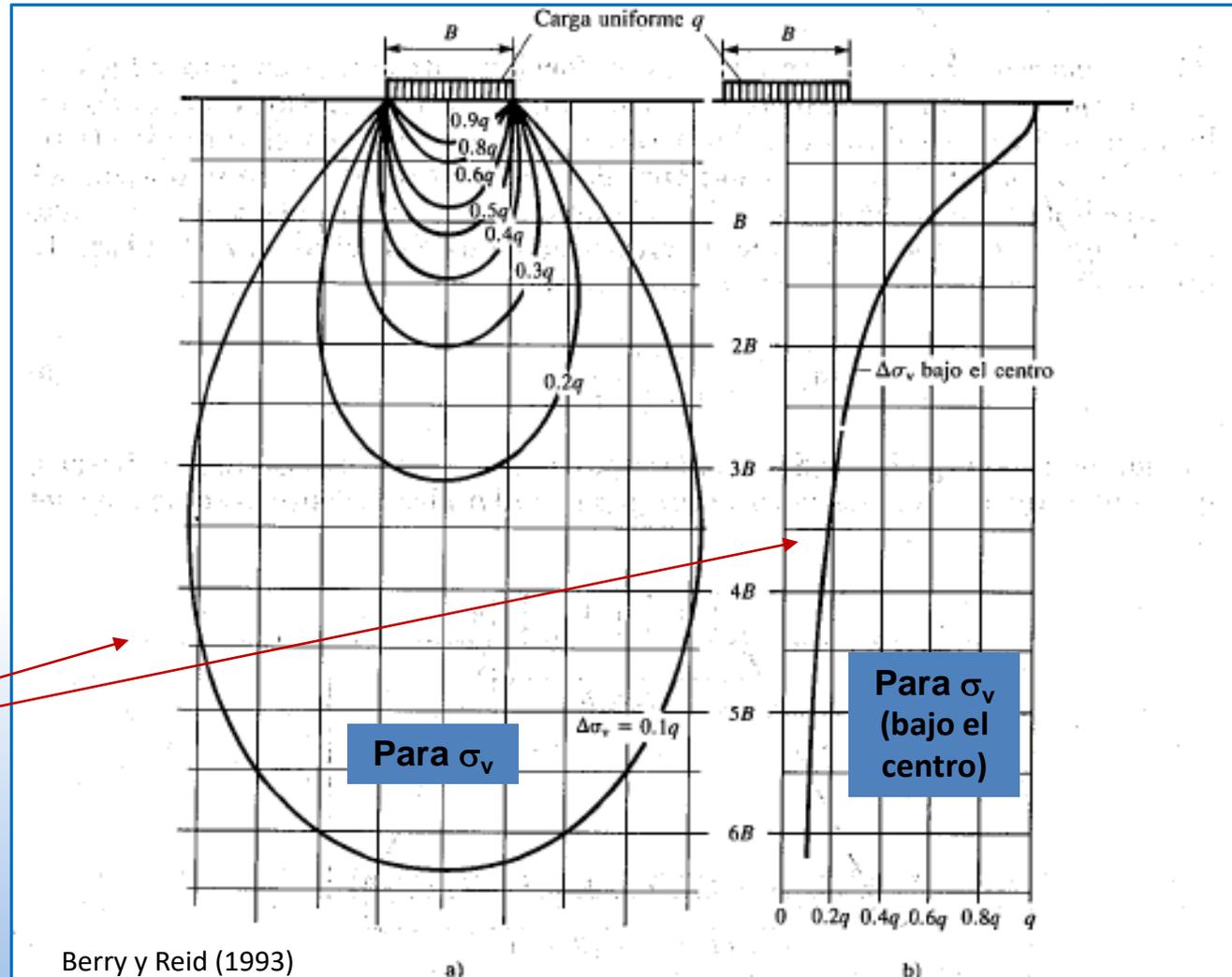


Figura 2.16. Franja infinita con carga uniformemente distribuida: a) líneas de igual incremento de esfuerzo vertical total, b) incremento del esfuerzo vertical total bajo el centro.



# ESFUERZOS DEBIDOS A CARGAS APLICADAS. BULBOS DE ESFUERZOS

## Carga de distribución rectangular sobre franja infinita. Esfuerzos principales

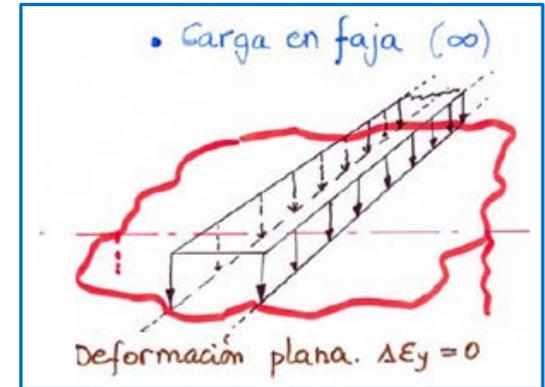
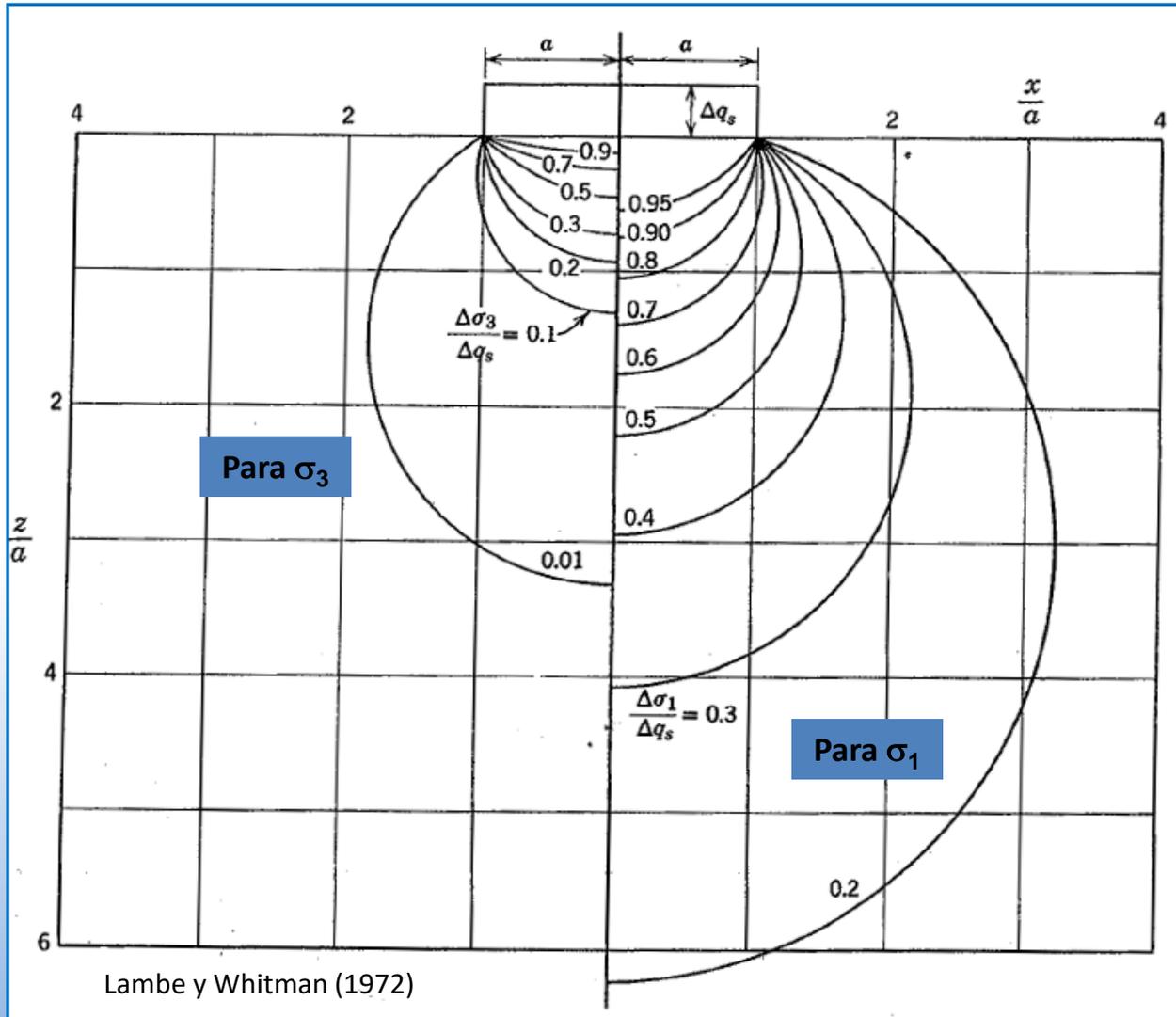


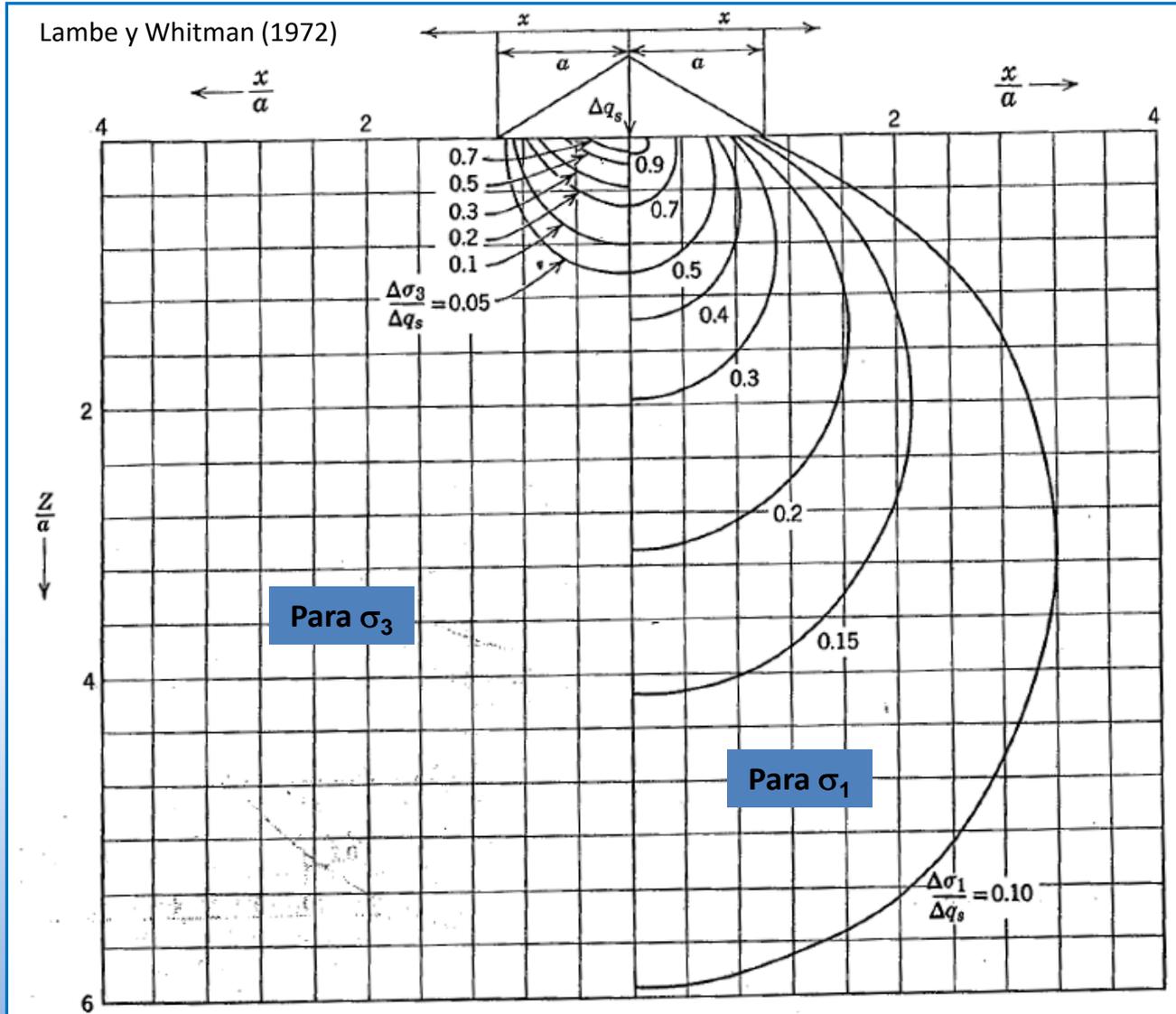
Gráfico para el cálculo de  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$   
Coinciden con  $\sigma_z$  y  $\sigma_x$  sólo en la vertical.

### Ejercicio 2

Comprueba que esta sentencia es cierta



Carga de distribución triangular sobre franja infinita. Esfuerzos principales





# ESFUERZOS DEBIDOS A CARGAS APLICADAS. BULBOS DE ESFUERZOS

G. García. UPCT

## Carga flexible uniformemente distribuida sobre un área rectangular

### Fadum (1948)

La solución para el incremento de tensión vertical total debajo de una esquina de un área rectangular flexible tiene la forma:

Es necesario despejar  $I_\sigma$  (factor de influencia de esfuerzo) a partir de los parámetros geométricos  $L$ ,  $B$ ,  $z$ ,  $m$  y  $n$

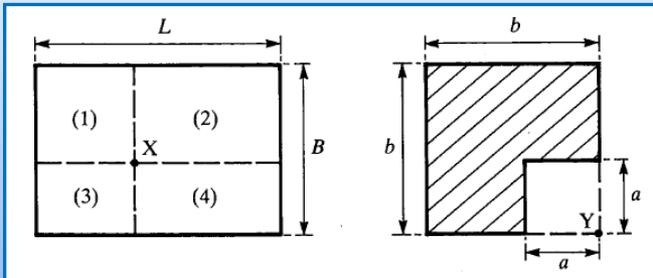
$m = B/z$ ,  $n=L/z$  son intercambiables

### Steinbrenner (1936)

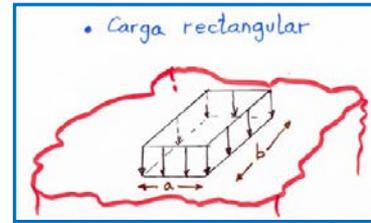
La expresión analítica de la tensión vertical bajo una esquina del cuadrado es

$$\sigma_z = \frac{q}{4\pi} \cdot \left[ \frac{2 \cdot mn \cdot \sqrt{1+m^2+n^2}}{1+m^2+n^2+m^2n^2} \cdot \frac{2+m^2+n^2}{1+m^2+n^2} + \arctg \left( \frac{2mn \cdot \sqrt{1+m^2+n^2}}{m^2+n^2-m^2n^2+1} \right) \right]$$

Aplicando superposición, es posible conocer el incremento de tensión vertical de cualquier punto bajo el terreno



Berry y Reid (1993)



$$\Delta\sigma_v = qI_\sigma$$

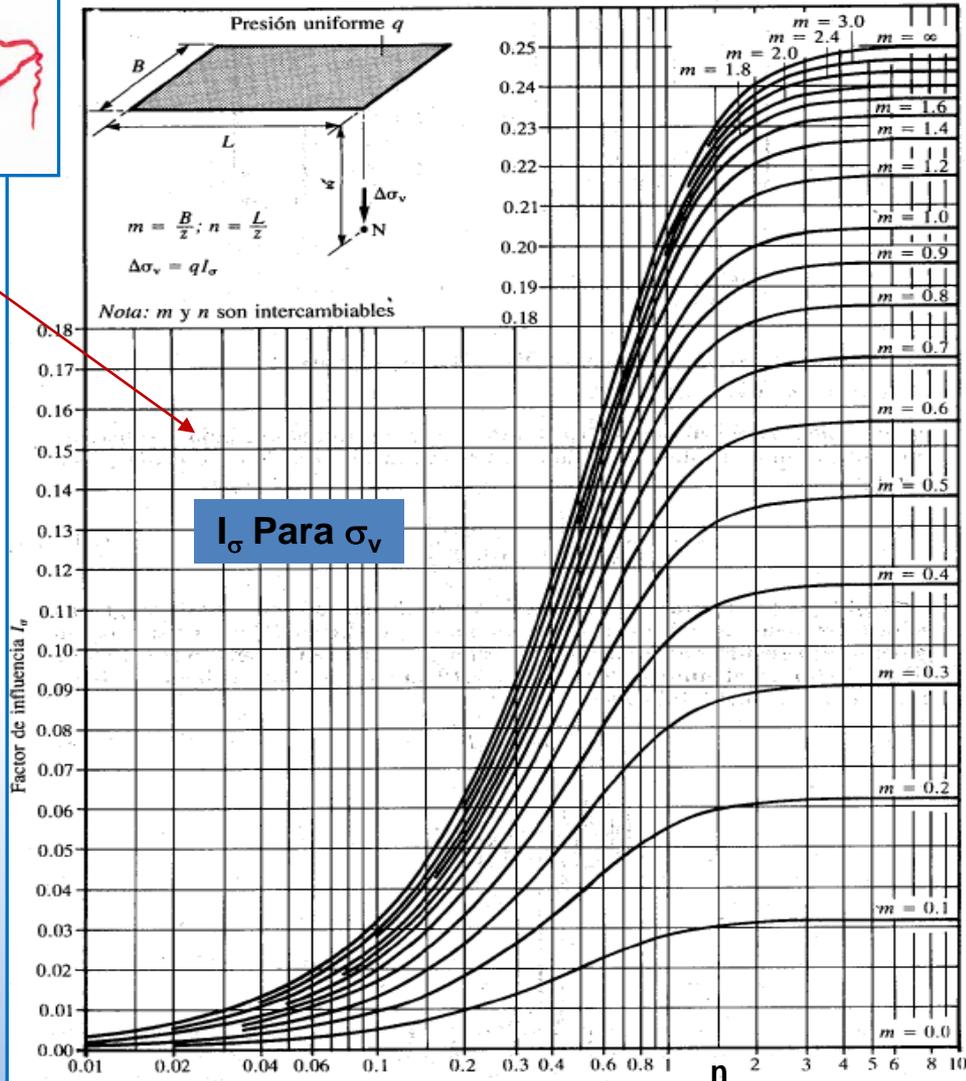


Figura 2.10. Valores del factor de influencia  $I_\sigma$  para calcular el incremento de esfuerzo vertical total  $\Delta\sigma_v$  bajo la esquina de un área rectangular uniformemente cargada (Según Fadum, 1948, y reproducida con la autorización del profesor Fadum).

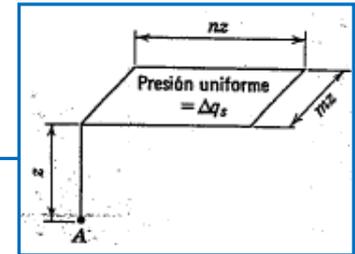
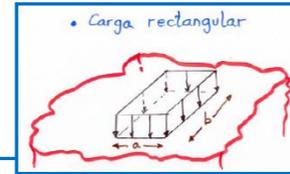
Berry y Reid (1993)



# ESFUERZOS DEBIDOS A CARGAS APLICADAS. BULBOS DE ESFUERZOS

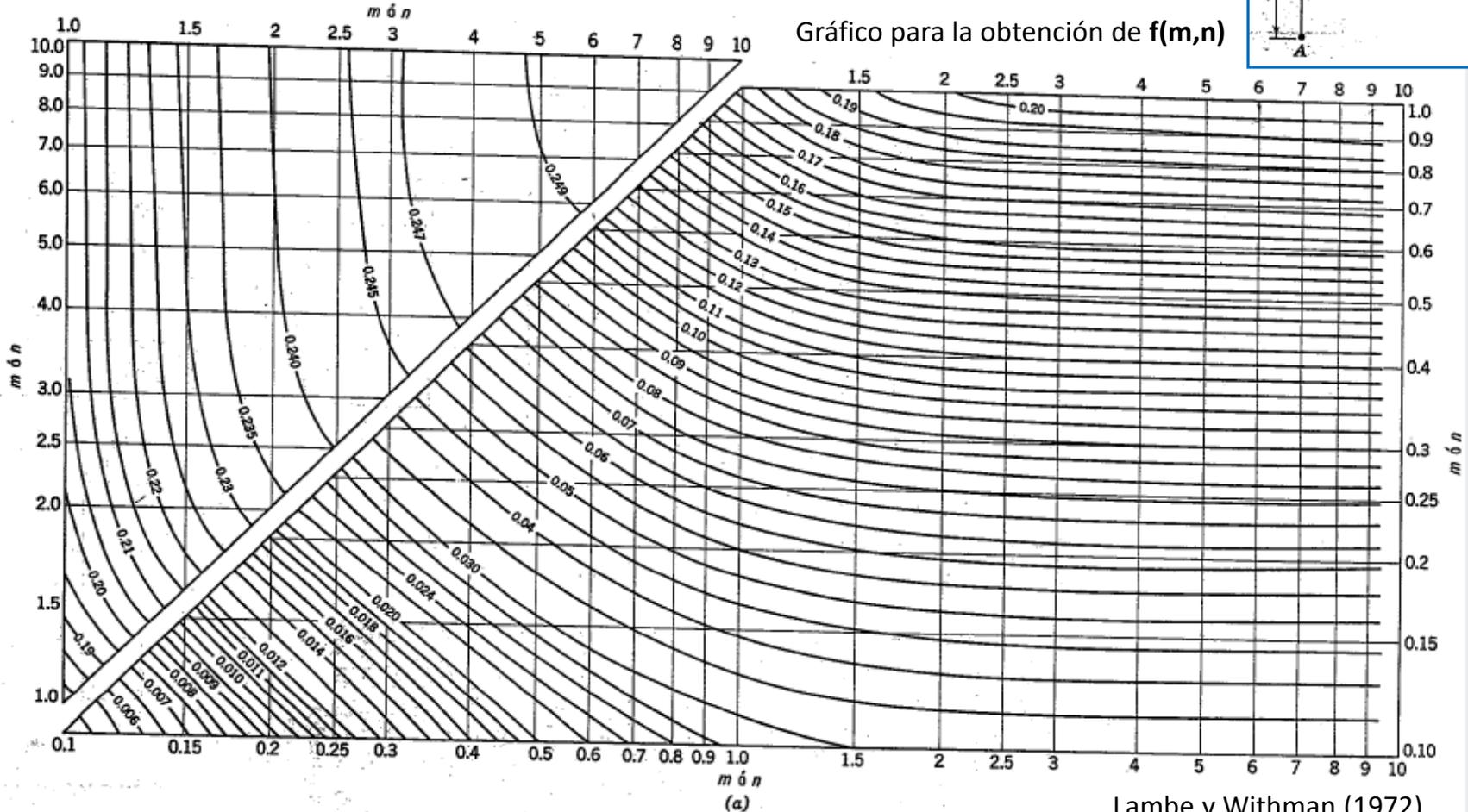
Carga flexible uniformemente distribuida sobre un área rectangular

$$\Delta\sigma_v = \Delta q_s f(m, n)$$



Newmark (1942)

Gráfico para la obtención de  $f(m, n)$

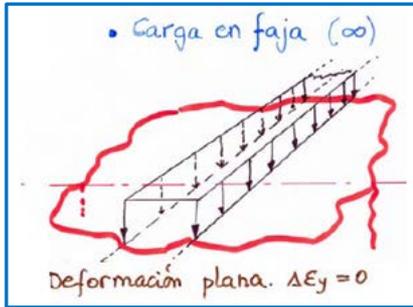


Lambe y Withman (1972)

Fig. 8.6. a) Abaco para la determinación de esfuerzos verticales bajo las esquinas de una superficie rectangular con carga uniforme en un material elástico e isótropo. Del ábaco se obtiene  $f(m, n)$ . b) Para el punto A,  $\Delta\sigma_v = \Delta q_s \times f(m, n)$ . (Según Newmark, 1942).



### Carga de distribución rectangular sobre franja infinita. Esfuerzo vertical



La profundidad hasta la cuál es esfuerzo es significativo se denomina **zona de influencia**, se encuentra en la vertical del centro geométrico del área cargada y puede tomarse entonces como aproximadamente:

- 10 veces el ancho en el caso de una franja infinitamente larga (un terraplén)
- 3 veces el ancho de un área cuadrada cargada (losa)
- 3 veces el diámetro para un área circular

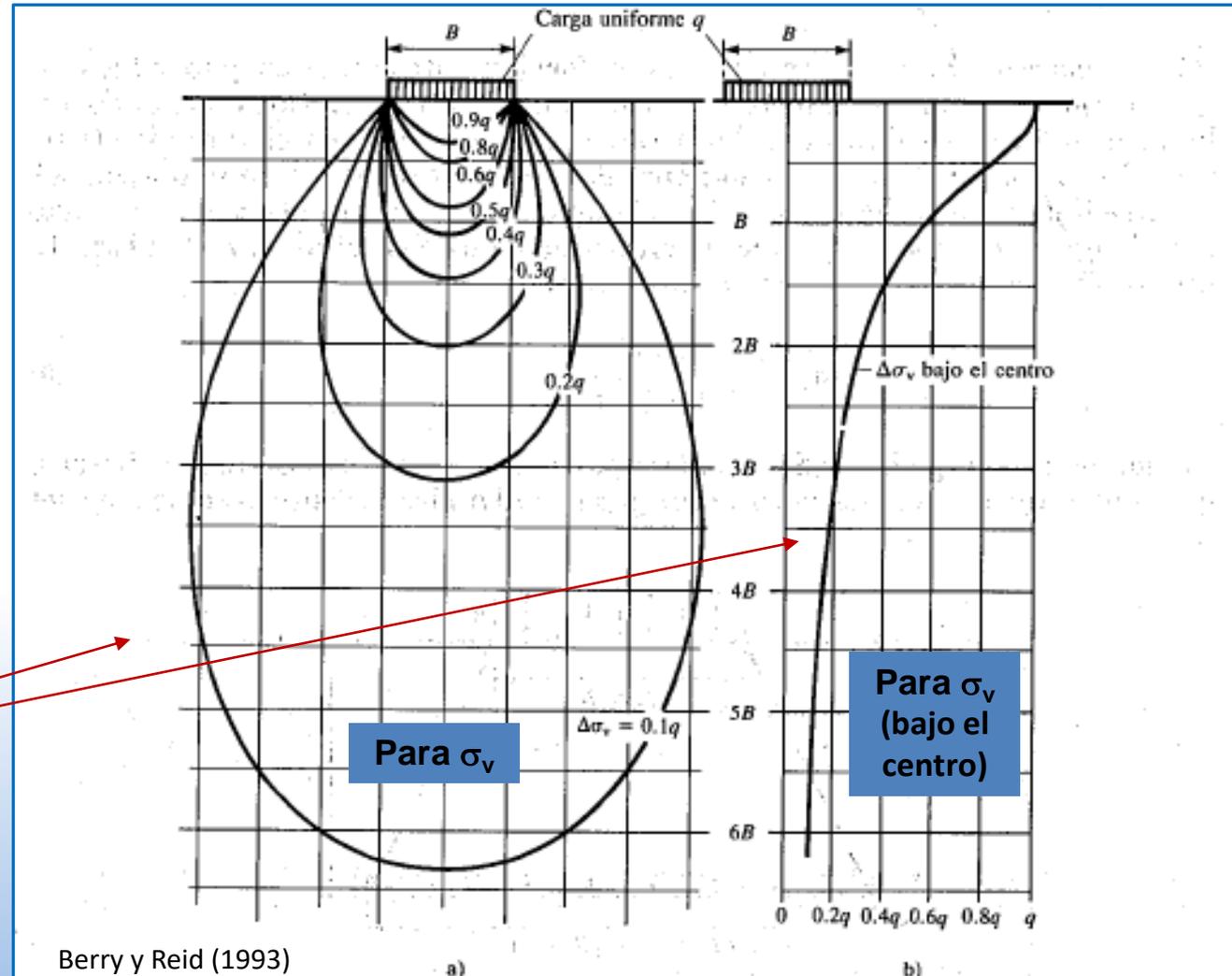


Figura 2.16. Franja infinita con carga uniformemente distribuida: a) líneas de igual incremento de esfuerzo vertical total, b) incremento del esfuerzo vertical total bajo el centro.





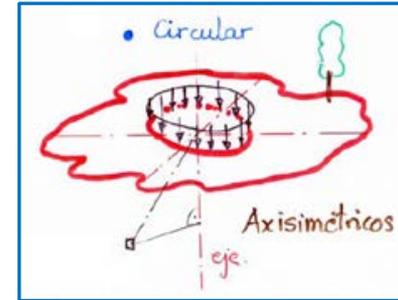
# ESFUERZOS DEBIDOS A CARGAS APLICADAS. BULBOS DE ESFUERZOS

**G. García. UPCT**

## Carga flexible uniformemente distribuida sobre un área circular

La solución para los **puntos situados bajo el centro de la carga** tiene la forma:

$$\Delta\sigma_v = q \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{1 + (R/z)^2} \right]^{3/2} \right\}$$

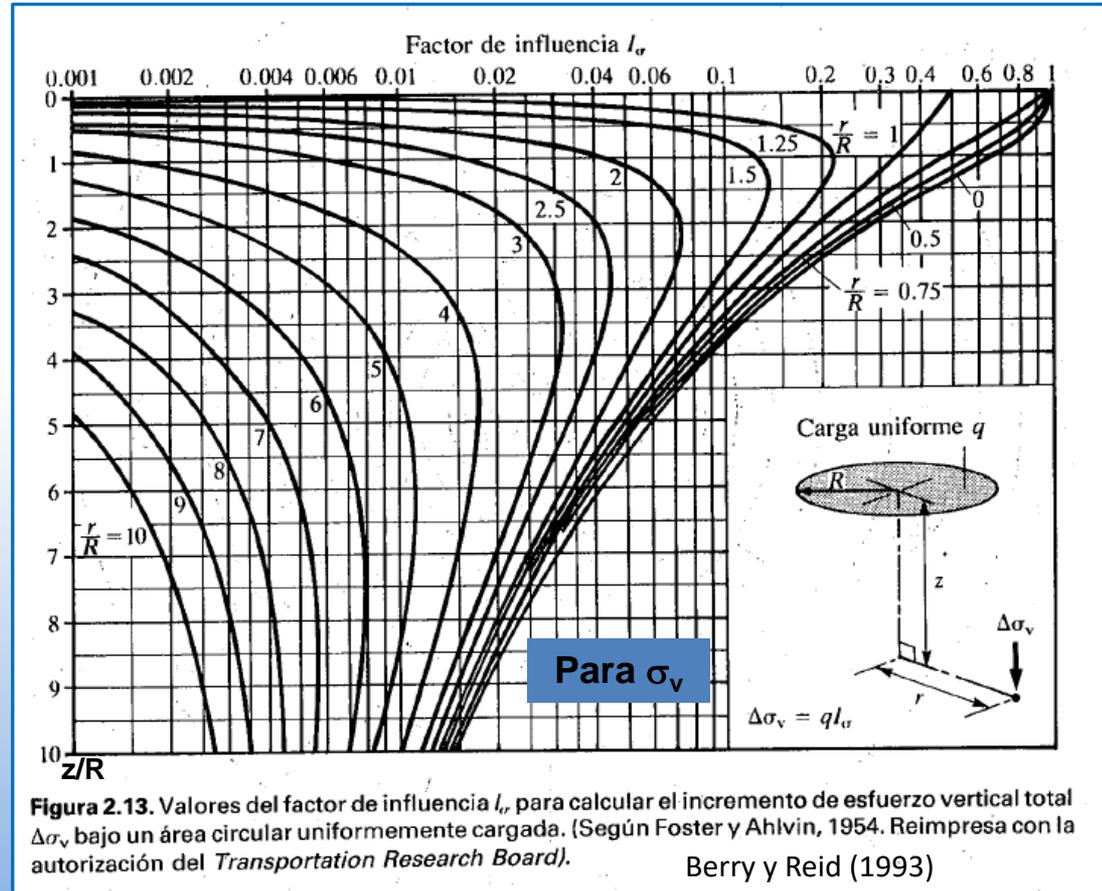
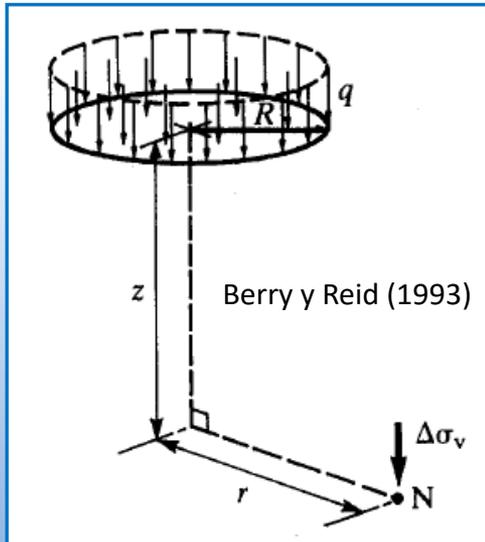


## Foster y Ahlvin (1954)

La solución para **puntos separados una distancia r del eje de la carga** tiene la siguiente expresión:

$$\Delta\sigma_v = qI_\sigma$$

Siendo necesario despejar  $I_\sigma$  (factor de influencia de esfuerzo) a partir de los parámetros geométricos R, r, z





# ESFUERZOS DEBIDOS A CARGAS APLICADAS. BULBOS DE ESFUERZOS

Carga flexible uniformemente distribuida sobre un área circular. Esfuerzos principales

Lambe y Withman (1972)

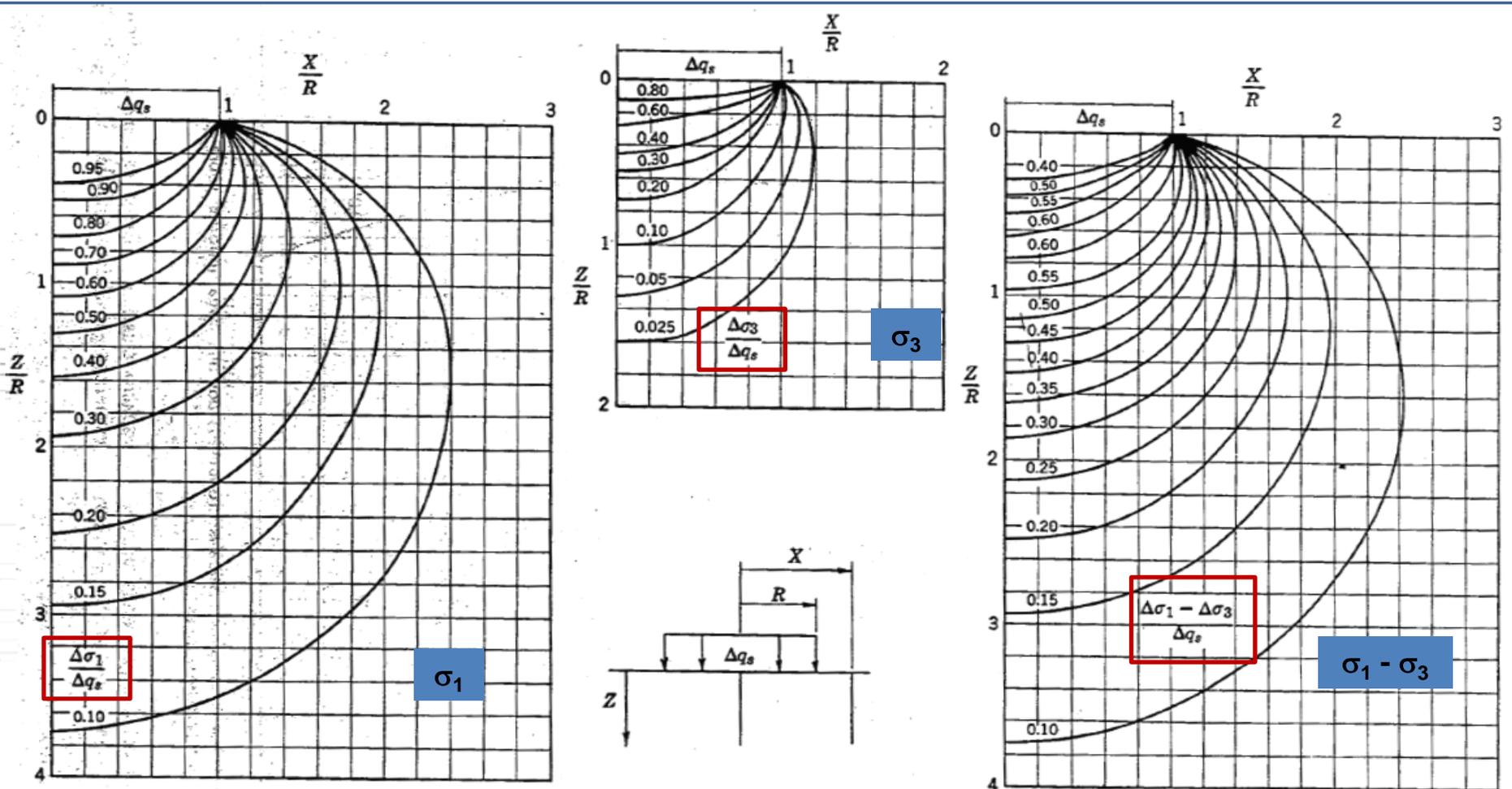


Fig. 8.5. Esfuerzos bajo una carga uniformemente repartida sobre una superficie circular.



**Carga flexible uniformemente distribuida  
sobre un área circular. Esfuerzo vertical**

Las figuras como las indicadas dan una idea de cómo se distribuyen los esfuerzos en una masa de suelo

Por ejemplo, la **zona** situada bajo la superficie cargada, donde los **esfuerzos verticales son más importantes**, se suele denominar frecuentemente “**bulbo de esfuerzos**”

Para una **superficie circular cargada**, los **esfuerzos verticales son menores de  $0.15 \Delta q_s$**  a una profundidad  $3R$  y menores de  $0.10 \Delta q_s$  a una profundidad de  $4R$

Generalmente se considera que el **bulbo de esfuerzos** corresponde al **volumen comprendido dentro del contorno correspondiente a  $0.10 \Delta q_s$** , aunque esta elección es totalmente arbitraria

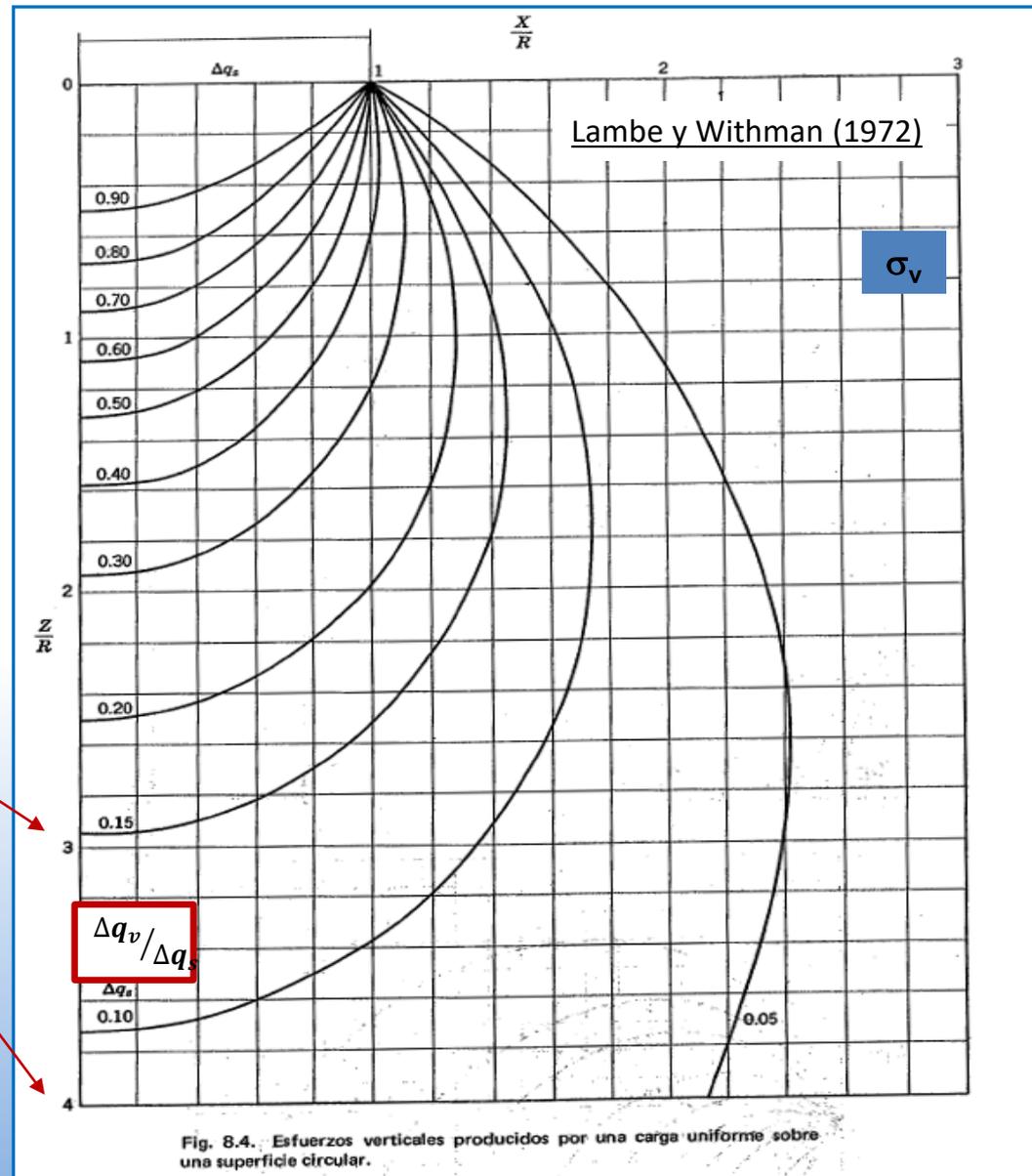


Fig. 8.4. Esfuerzos verticales producidos por una carga uniforme sobre una superficie circular.



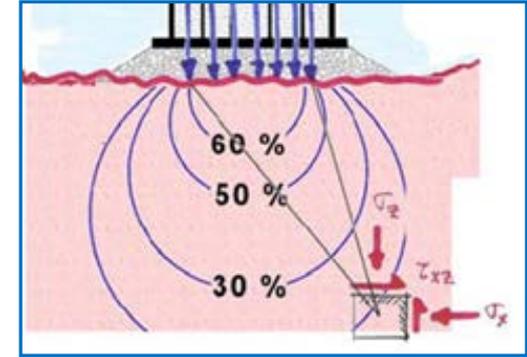
# ESFUERZOS DEBIDOS A CARGAS APLICADAS. BULBOS DE ESFUERZOS

G. García. UPCT

## Suelos saturados. Condiciones no drenadas (arcillas saturadas)

Ante la **aplicación de una sobrecarga**, en cualquier punto del terreno tendremos una distribución de **tensiones dada por la suma de las tensiones geostáticas y las producidas por la sobrecarga**

Si deseo saber **qué parte** (de la sobrecarga) se ha ido al **aumento de presión intersticial**, tengo que **sustraer** a esta matriz el **tensor de compresión isótropa**. Este tensor de compresión isótropa me está informando sobre qué parte de la tensión no está contribuyendo inicialmente a las deformaciones. **El otro tensor** o sumando corresponde con la **deformación por cizalla pura y tangencial**. Por ejemplo:



$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/3 & 0 & 0 \\ 0 & 16/3 & 0 \\ 0 & 0 & 16/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 - (16/3) & 2 & -1 \\ 2 & 6 - (16/3) & 4 \\ -1 & 4 & 7 - (16/3) \end{pmatrix}$$

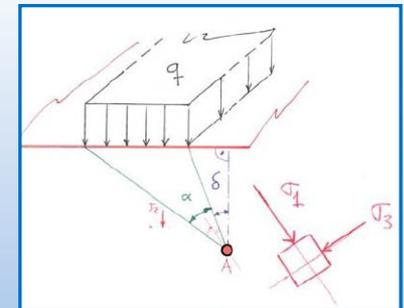
Isocompresión
Cizalla pura + tangencial

A lo largo del **proceso de consolidación y disipación del exceso de presión intersticial**, hay una **transferencia desde el tensor octaédrico al tensor de cizalla**. Existe una **deformación inicial asociada a la cizalla** y otra **final asociada a la disminución de volumen por salida de agua** del sistema

Esto, visto en tensiones principales, resulta de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' & 0 & 0 \\ 0 & p' & 0 \\ 0 & 0 & p' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma'_1 - p' & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 - p' & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 - p' \end{pmatrix}$$

Isocompresión
Cizalla pura



A corto plazo lo recibe el **agua**

Se va **disipando**

A largo plazo lo recibe el **esqueleto del suelo**

A corto plazo lo recibe el **esqueleto del suelo**



Ejercicio 2

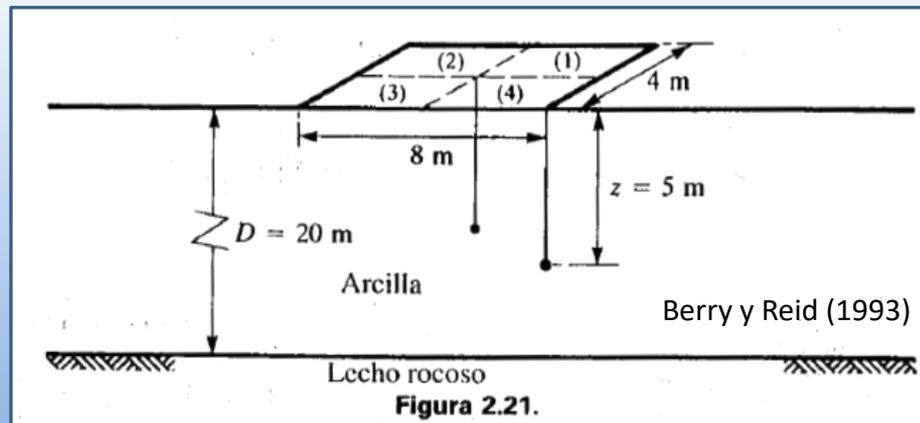
Berry y Reid (1993) Un área rectangular flexible de 8 m de longitud por 4 m de ancho aplica una presión uniforme de  $40 \text{ kN/m}^2$  en la superficie de un estrato de 20 m de espesor de arcilla saturada que reposa sobre el lecho rocoso. Calcular el incremento en el esfuerzo vertical total en la arcilla a una profundidad de 5 m bajo el centro y bajo una de las esquinas del área cargada. Calcular también el asentamiento diferencial inmediato entre el centro y una esquina del área cargada.

(Los asentamientos los calcularemos en otra unidad temática)

Las propiedades de la arcilla son: módulo de elasticidad no drenado =  $3,500 \text{ kN/m}^2$  y relación de Poisson = 0.5.

SOLUCIÓN:

Para determinar los incrementos en el esfuerzo vertical total bajo un área rectangular cargada se utiliza el diagrama de Fadum de la Figura 2.10. Para los esfuerzos bajo el punto central, debe dividirse el área cargada en cuatro subáreas y aplicar el principio de superposición. Por tanto, con referencia a la Figura 2.21:





Ejercicio 2

Berry y Reid (1993)

Area	B (m)	L (m)	z (m)
Total	4	8	5
Subárea (1)	2	4	5

Area	$m = B/z$	$n = L/z$	$I_\sigma$
Total	0.8	1.6	0.175
Subárea (1)	0.4	0.8	0.093

Utilizando la ecuación:

$$\Delta\sigma_v = qI_\sigma$$

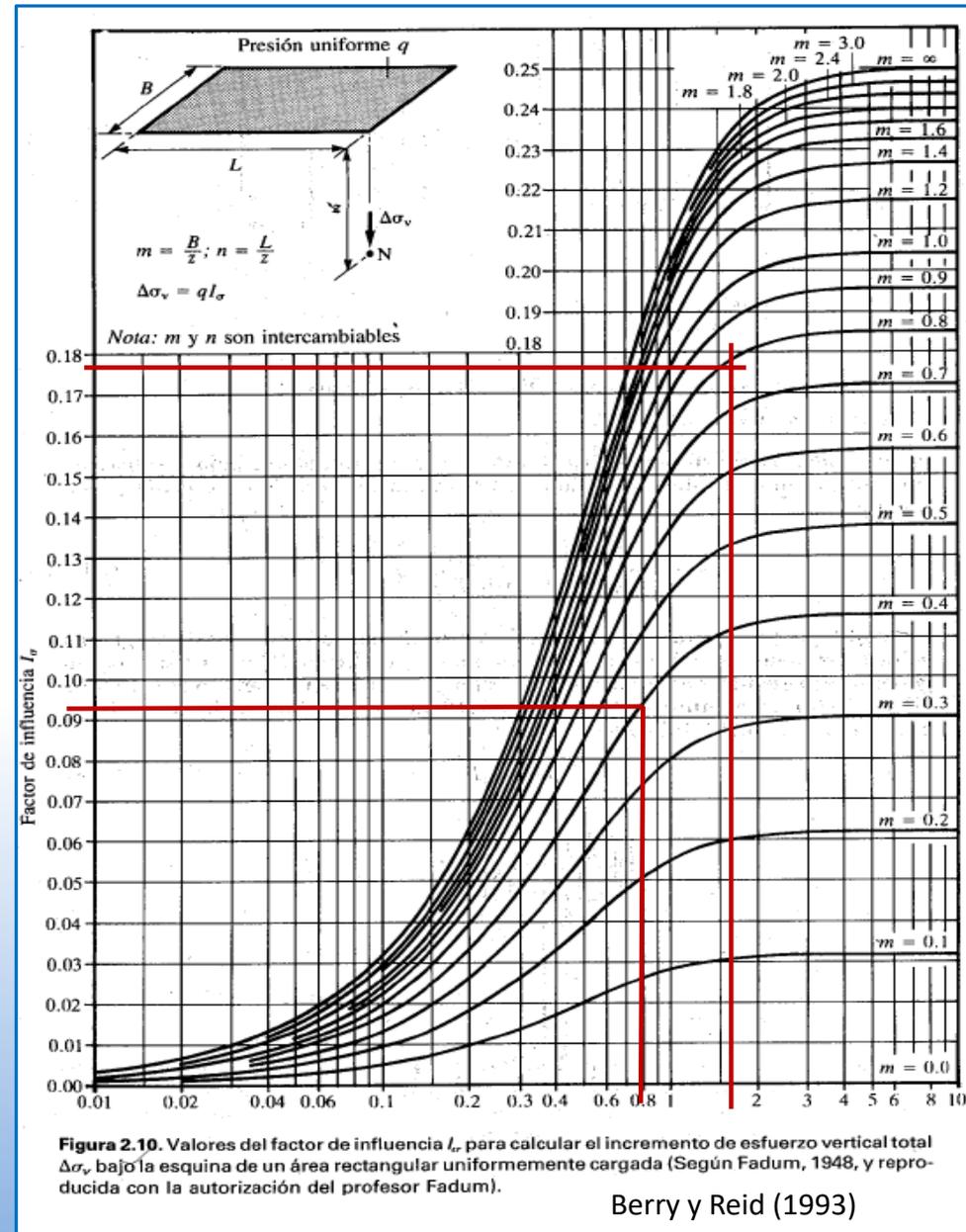
Se obtiene el **incremento de esfuerzo vertical total** a una profundidad de 5 m **bajo una esquina** del área cargada:

$$\Delta\sigma_v = qI_\sigma = 40 \times 0.175 = 7 \text{ kN/m}^2$$

y **bajo el centro**:

$$\Delta\sigma_v = qI_\sigma = 4 \times 40 \times 0.093 = 14.9 \text{ kN/m}^2$$

El **asiento diferencial** lo calcularemos posteriormente





## Diagrama de influencia de Newmark

En 1942 Newmark propuso un **procedimiento gráfico para determinar el incremento de esfuerzo vertical total bajo cualquier área de forma flexible uniformemente cargada**

El gráfico consta de un número (**200**) de **áreas de influencia** creadas por la intersección de una serie de círculos concéntricos con líneas que parten del origen en sentido radial

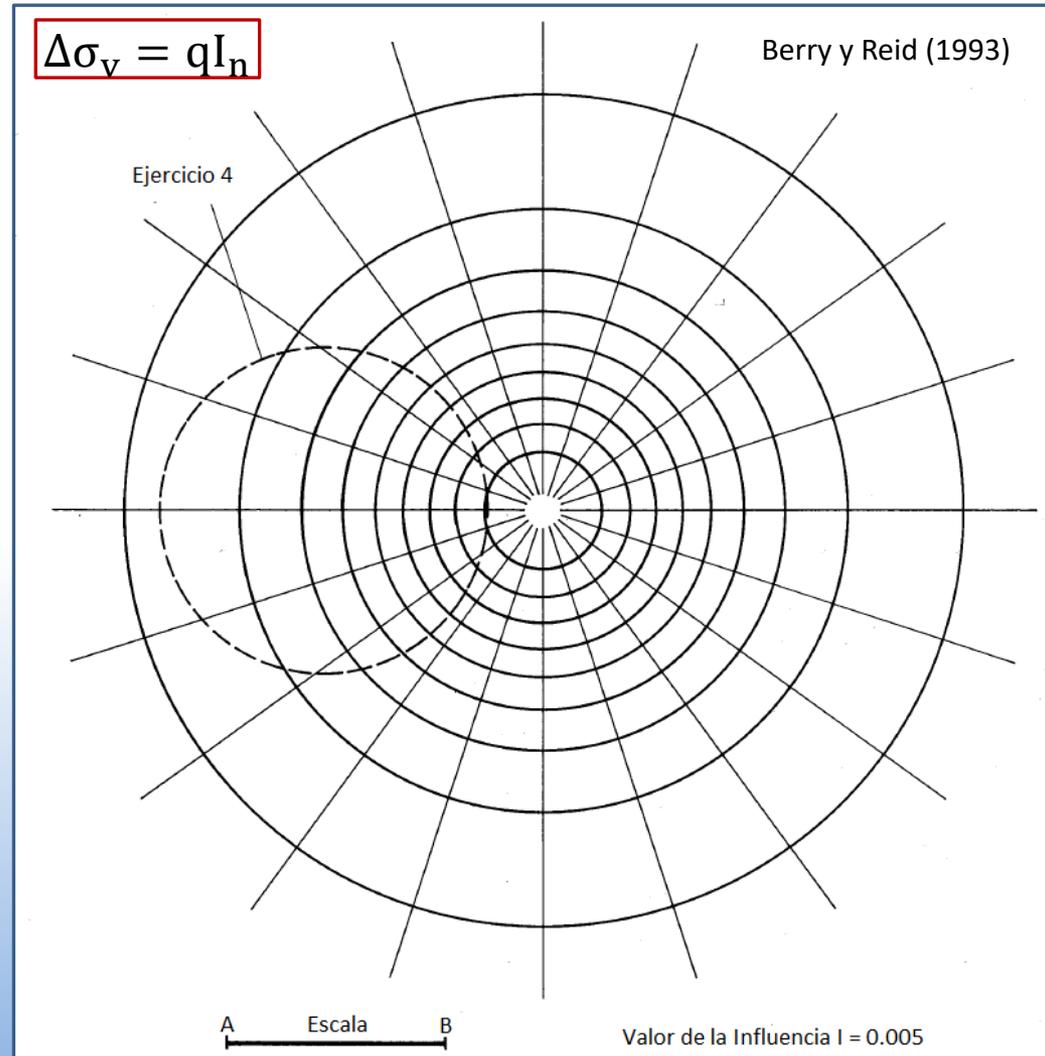
El gráfico está construido de tal manera que **cuando cada área de influencia se carga con una presión uniforme  $q$  se obtiene el mismo incremento de esfuerzo vertical a una profundidad AB por debajo del origen de la gráfica (el centro)**

Como el número de áreas de influencia ( $n$ ) es 200, **cada una representa un cambio de esfuerzo  $0.005q$  (valor de influencia  $I_n = 0.005n$ )**

### UTILIZACIÓN DEL DIAGRAMA DE NEWMARK

Se **dibuja el contorno** del área cargada a escala compatible con el gráfico, de forma que **la longitud de la línea AB tiene que coincidir con la profundidad  $z$**  a la que se desea conocer el esfuerzo

Asimismo, **el centro** (origen) del diagrama de Newmark **ha de coincidir (a escala) con el punto bajo el cual se quiere conocer el esfuerzo**





### Ejercicio 3

#### SOLUCIÓN:

El esfuerzo vertical total en el suelo a 12 m bajo el punto P viene dado por:

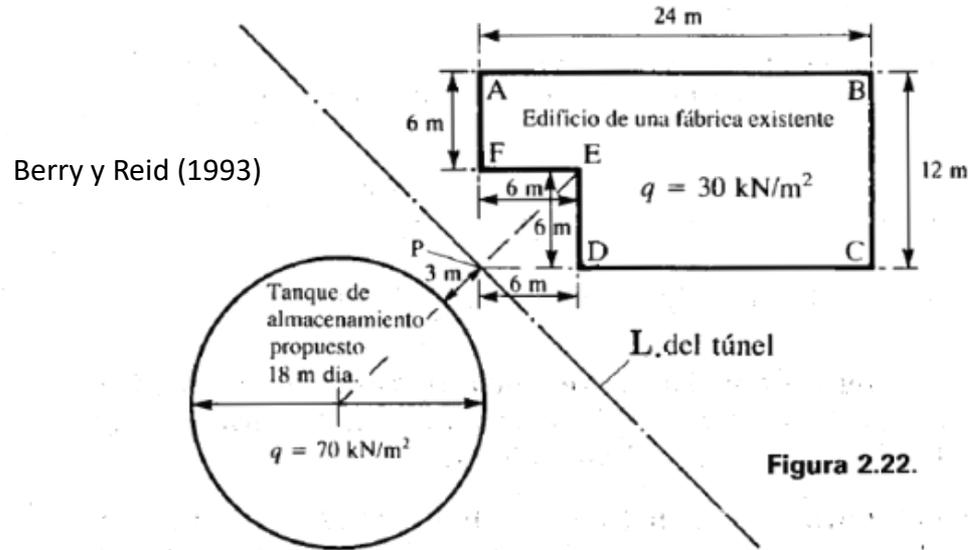
$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{terr.}} + \Delta\sigma_{\text{ed.}} + \Delta\sigma_{\text{tanq.}}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{terr.}} &= 1.9 \times 9.81 \times 12 = \\ &= 223.67 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

$\Delta\sigma_{\text{ed.}}$  Se obtiene utilizando el Diagrama de **Fadum**

$\Delta\sigma_{\text{tanq.}}$  Se obtiene utilizando el Diagrama de **Foster y Ahlvin** (Fig. 2.13) o utilizando el **Diagrama de Newmark**)

La Figura 2.22 muestra las dimensiones en planta de un edificio de una fábrica cimentado sobre la superficie de un depósito de arcilla homogénea de gran espesor. La presión sobre la cimentación del edificio es de  $30 \text{ kN/m}^2$ . También se muestra la línea de un túnel existente que pasa a través de la arcilla, con su clave a una profundidad promedio de 12 m bajo el nivel del terreno.



Se desea construir un tanque de almacenamiento en el sitio que se muestra, con una cimentación flexible de 18 m de diámetro que transmitirá una presión de  $70 \text{ kN/m}^2$  en la superficie de la arcilla. Si se lleva a cabo la construcción propuesta, calcular:

- el esfuerzo vertical total en el suelo a 12 m bajo el punto P, y
- El asentamiento superficial inmediato que se producirá en P y en el borde y en el centro de la cimentación circular. (El asentamiento lo calcularemos en otra unidad temática)

Las propiedades de la arcilla son  $P_s = 1.90 \text{ Mg/m}^3$ ,  $E = 5,500 \text{ kN/m}^2$  y  $\nu = 0.5$ .



### Ejercicio 3

A partir del principio de superposición, el incremento en el esfuerzo vertical total bajo el punto P está dado por

$$\Delta\sigma_v = \Delta\sigma_{v_{ABCP}} - \Delta\sigma_{v_{FEDP}}$$

y de la ecuación  $\Delta\sigma_v = qI_\sigma$  Berry y Reid (1993)

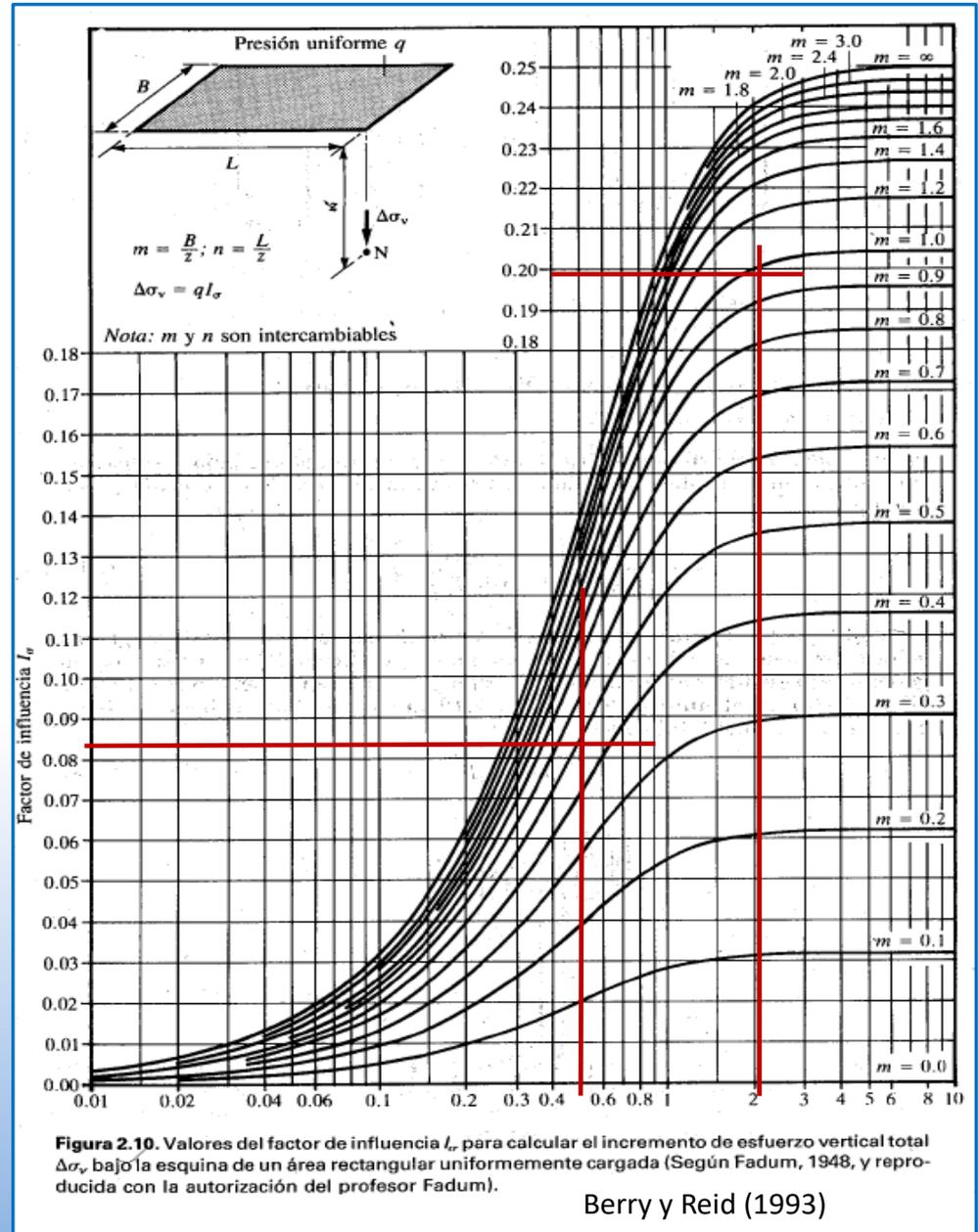
$$\Delta\sigma_v = (qI_\sigma)_{ABCP} - (qI_\sigma)_{FEDP}$$

Con referencia a la Figura 2.22:

Área	B (m)	L (m)	z (m)	m = B/z	n = L/z	$I_\sigma$
ABCP	12	24	12	1	2	0.198
FEDP	6	6	12	0.5	0.5	0.083

Por tanto

$$\Delta\sigma_{ed.} = 30 \times 0.198 - 30 \times 0.083 = \underline{3.45 \text{ kN/m}^2}$$





# DIAGRAMA DE NEWMARK

## G. García. UPCT

Con referencia a la Figura 2.13, la distancia radial hasta  $P$  es  $r = 12$  m, el radio  $R = 9$  m y la profundidad  $z = 12$  m. Por tanto  $z/R = 1\frac{1}{3}$ ,  $r/R = 1\frac{1}{3}$  y  $I_\sigma = 0.18$ . A partir de la ecuación (2.18)

### Ejercicio 3

$$\Delta\sigma_v = qI_\sigma = 70 \times 0.18 = \underline{12.60 \text{ kN/m}^2} \quad \text{Berry y Reid (1993)}$$

Utilizando el diagrama de Newmark se dibuja la planta que muestra la cimentación circular y el punto  $P$  a una escala tal que la línea a escala  $AB$  de la Figura 2.14 corresponde a la profundidad  $z = 12$  m. Esta planta luego se superpone a la Figura 2.14 con el punto  $P$  localizado en el origen del diagrama. El número de áreas de influencia encerradas por el área cargada es  $n = 35.4$ . Entonces a partir de la ecuación  $\Delta\sigma_v = qIn$

$$\Delta\sigma_{\text{tanq.}} = qIn = 70 \times 0.005 \times 35.4 = 12.39 \text{ kN/m}^2$$

El esfuerzo vertical total en el suelo a 12 m bajo el punto  $P$  viene dado por:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{terr.}} + \Delta\sigma_{\text{ed.}} + \Delta\sigma_{\text{tanq.}}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}} &= 223.67 + 3.45 + 12.60 = \\ &= \underline{239.72 \text{ kN/m}^2} \end{aligned}$$

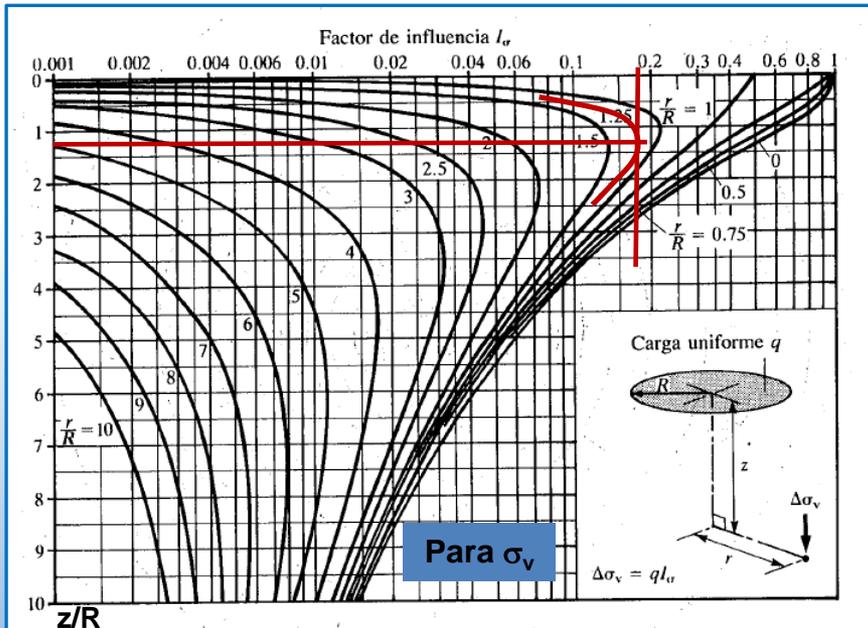
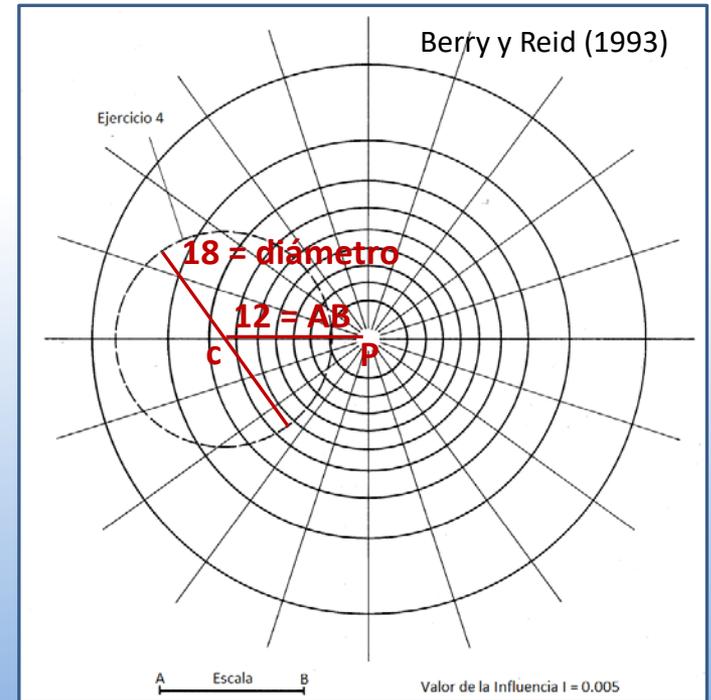


Figura 2.13. Valores del factor de influencia  $I_\sigma$  para calcular el incremento de esfuerzo vertical total  $\Delta\sigma_v$  bajo un área circular uniformemente cargada. (Según Foster y Ahlvin, 1954. Reimpresión con la autorización del Transportation Research Board). Berry y Reid (1993)



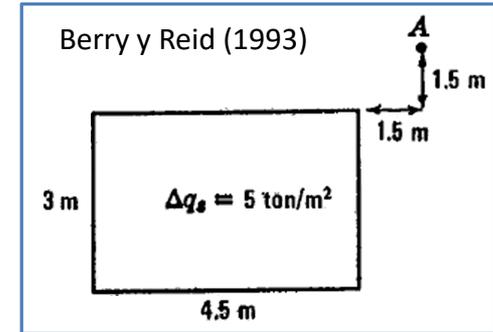


### Ejercicio 4

Se tiene un suelo con  $\gamma_a = 17 \text{ kN/m}^3$  y  $K_o=0,5$ . Se carga con  $25 \text{ kN/m}^2$  sobre una superficie circular de 6 m. de diámetro. Calcula los esfuerzos verticales y horizontales bajo el centro a 3 m de profundidad

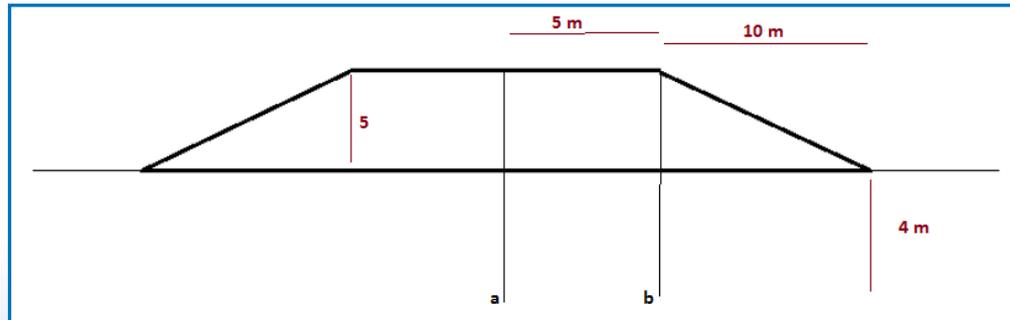
### Ejercicio 5

Calcular el esfuerzo vertical a una profundidad de 3 m bajo el punto A



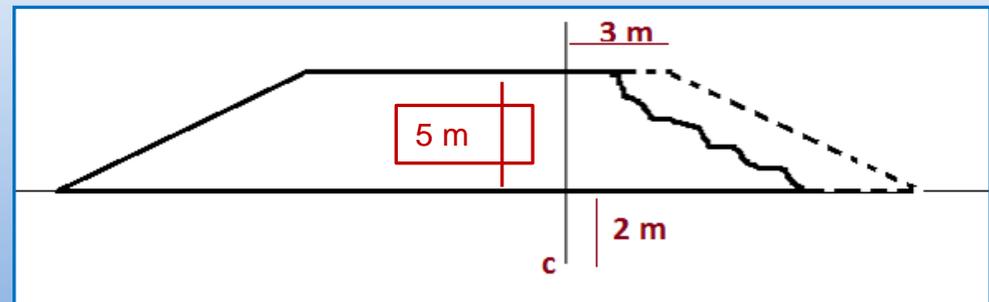
### Ejercicio 6

Calcula la el incremento de tensión en los puntos a y b situados bajo el terraplén de  $\gamma_a = 17 \text{ kN/m}^3$



### Ejercicio 7

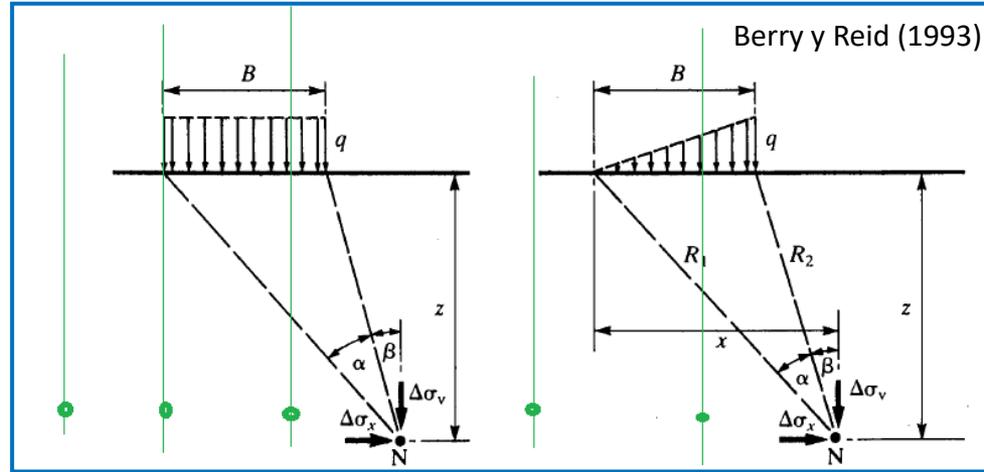
Calcula el incremento de tensión en el punto c tras escavar el talud hasta donde indica la línea vertical. Completa con los datos que aparecen en el esquema anterior.





## Ejercicio 8

Evaluar cómo se ha de tomar el ángulo  $\beta$  para los puntos marcados en verde (probar las variaciones de las tensiones para un supuesto o bien consultar bibliografía)



## Ejercicio 9

Se cimenta un tanque de agua rectangular de 7 m de ancho por 9 m de longitud con base flexible sobre la superficie de un paquete de arcilla dura de 50 m de espesor. El tanque ejerce una presión de 40 kN/m<sup>2</sup> sobre el suelo. Calcular el incremento en el esfuerzo vertical total en función de la profundidad bajo el centro del tanque y bajo una de sus esquinas. Construye un gráfico prof./incremento de tensión en excel. La densidad aparente del material es de  $\rho_a=1900\text{kg/m}^3$

### IMPORTANTE

**Lo visto en este capítulo se refiere fundamentalmente a suelos secos, aunque tengan algo de humedad: arenas, limos gruesos y gravas. De haber pequeñas cantidades de agua en ellos, no influye en su comportamiento tenso-deformacional.**



<https://slideplayer.com/slide/1520378/>

Wu, G., Bai, H., Du, B., Wu, L., He, S., & Li, H. (2019). Study on the failure mechanism of clay layer overlying thin bedrock in coal seam mining. *Environmental Earth Sciences*, 78(10), 1-18.

Wood, D. M. (2009). *Soil mechanics: a one-dimensional introduction*. Cambridge University Press.

<http://somosuniversidadyciencia.blogspot.com/2013/02/abece-del-principio-de-atquimedes.html>

Alhama, I. (2013). Apuntes de Mecánica de Suelos para la UPCT.

González de Vallejo, L. I., Ferrer, M., Ortuño, L., & Oteo, C. (2002). *Ingeniería geológica*. Pearson Educación.

Berry, P. L., & Reid, D. (1993). *Mecánica de suelos*. McGraw-Hill.



<http://desmotivaciones.es/carteles/chorradas/comentarios/74>

<https://desdeelmurete.com/consolidacion-parametros-de-laboratorio/>

[https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%B3dulo\\_de\\_compresibilidad#/media/Archivo:Isostatic\\_pressure\\_deformation.svg](https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%B3dulo_de_compresibilidad#/media/Archivo:Isostatic_pressure_deformation.svg)

Asanza, E. *Máster en Mecánica del Suelo e Ingeniería Geotécnica del CEDEX.*

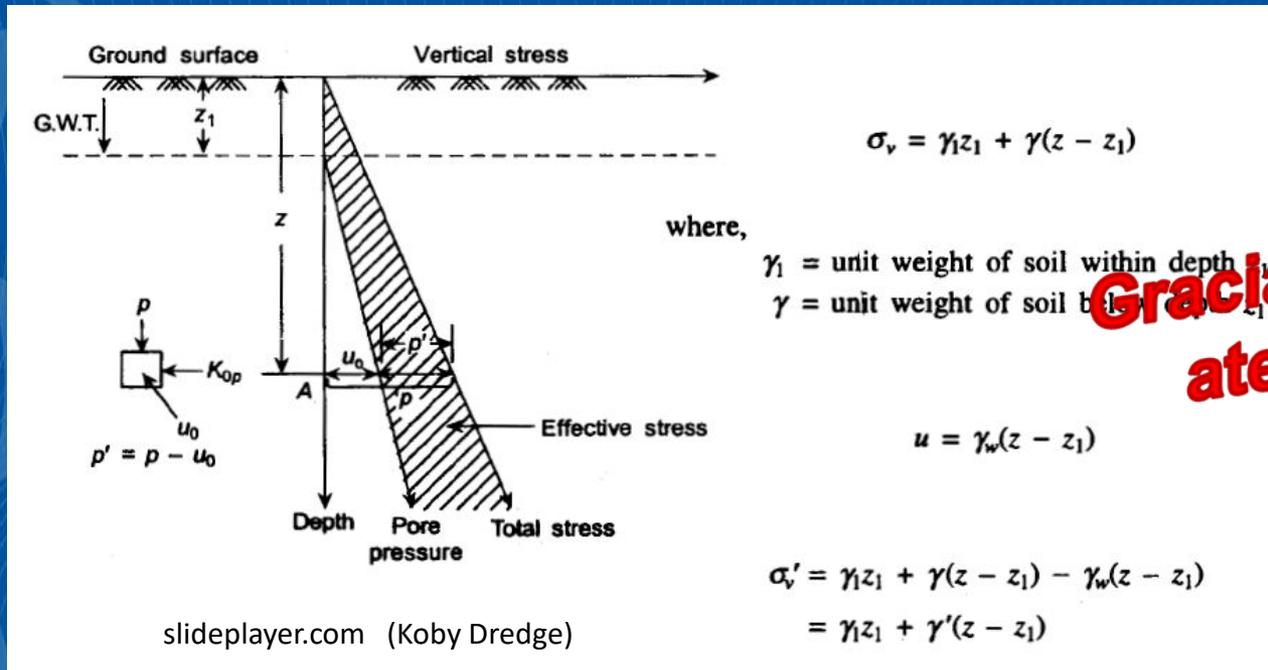
<https://www.quora.com/Is-stress-is-a-tensor>

<https://www.facebook.com/DIESCON/photos/sabes-cu%C3%A1l-es-la-diferencia-entre-empuje-activo-ka-empuje-de-reposo-ko-y-empuje-/2908352172578366/>

Lambe, T. W., & Whitman, R. V. (1972). *Mecánica de suelos*. Limusa

# Mecánica Avanzada de Suelos

## MCieTAT (UPCT)



Gracias por su atención

## Tema 3

### Tensiones en el suelo