

# LECCIÓN 9

## **FLEXOCOMPRESIÓN**

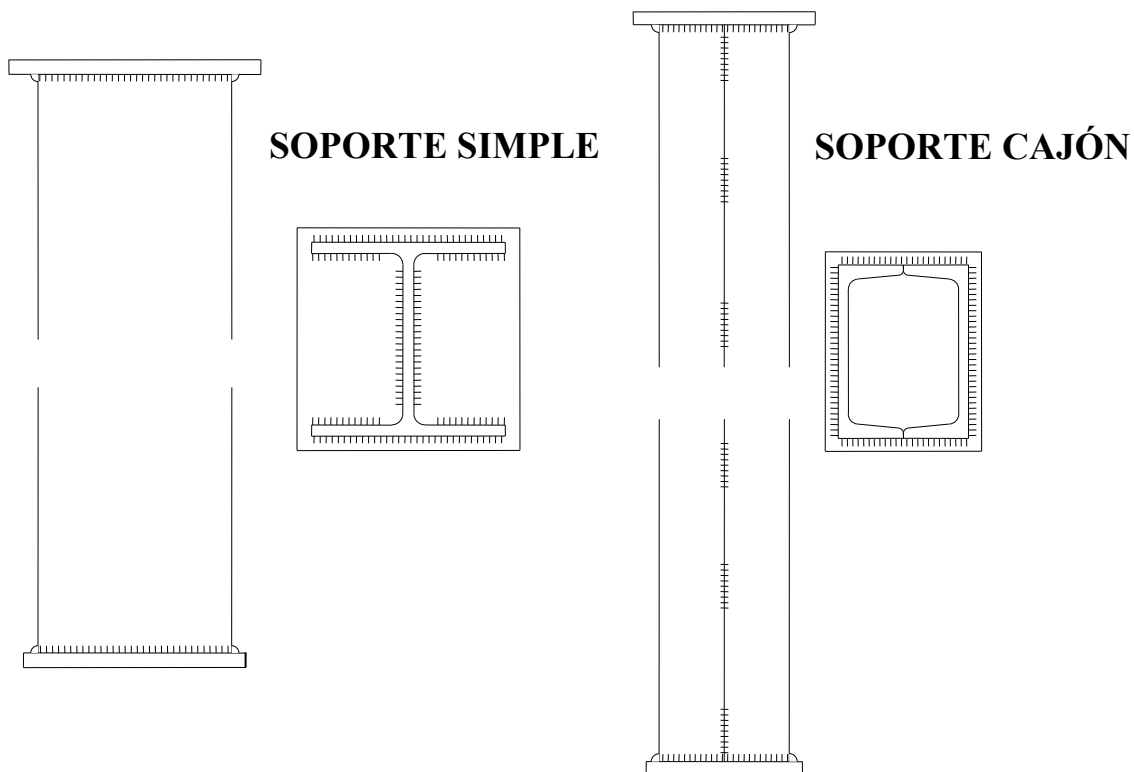
### **(VIGA-COLUMNA)**

CE, Anejo 22, Apdo. 6.3.3 “Elementos de sección constante sometidos a flexión y compresión”

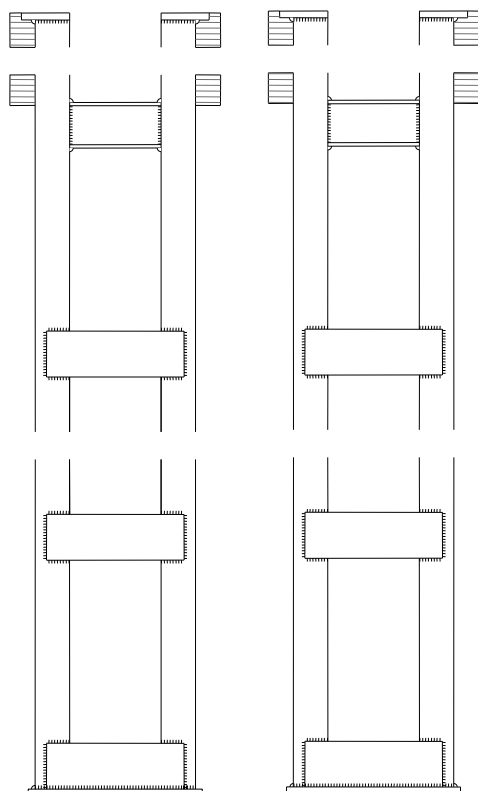
1. INTRODUCCIÓN
2. EFECTOS  $P$ -DELTA O DE 2º ORDEN (COEFICIENTES  $B_1$  Y  $B_2$ )
3. LONGITUD DE PANDEO EN PILARES DE EDIFICIOS
4. COMPROBACIÓN DE PIEZAS A FLEXOCOMPRESIÓN

# 1. INTRODUCCIÓN

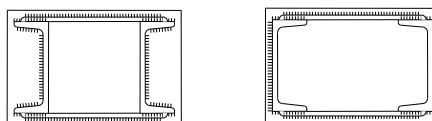
## • PIEZAS SIMPLES



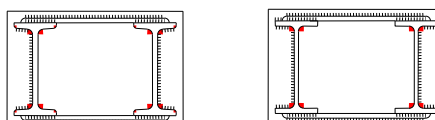
## • PIEZAS COMPUESTAS



### SORTE EMPRESILLADO UPN



### SORTE EMPRESILLADO IPN, IPE



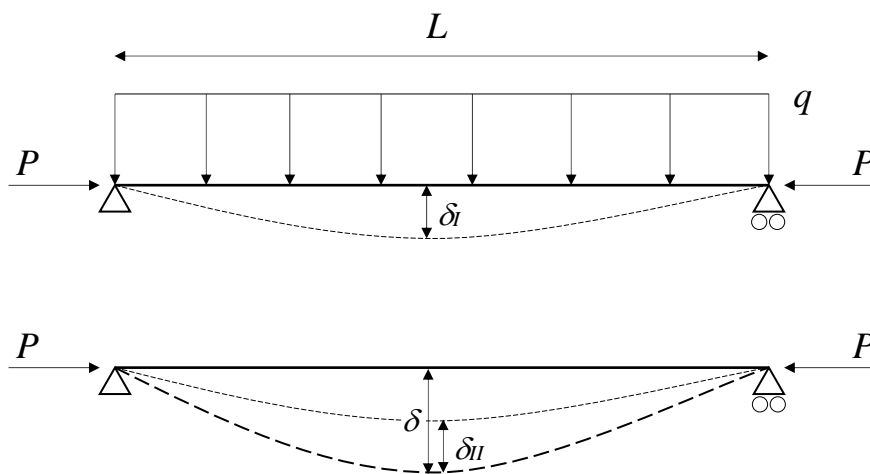
## 2. EFECTOS $P$ -DELTA O DE 2º ORDEN (COEF. $B_1$ y $B_2$ )

### • Efecto $P$ - $\delta$ (efectos de 2º orden sobre elementos)

Sea una pieza sometida a una carga  $q$  y a un axil de compresión  $P$

$\delta_I$  = Desplazamiento debido a  $q$  ;  $\delta_{II}$  = Desplazam. debido a  $P$  ;  $\delta = \delta_I + \delta_{II}$

$M_I$  = Mom. orden I debido a  $q$  ;  $M_{II}$  = Mom. orden II debido a  $P$  ;  $M = M_I + M_{II}$



Asumiendo que  $\delta$  está en centro-luz y  $M_{II}$  adopta forma senoidal se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} M_{II} = P\delta \sin \frac{\pi x}{L} \\ M_{II} = -EI y_{II}'' \end{array} \right\} \Rightarrow y_{II}'' = -\frac{P\delta}{EI} \sin \frac{\pi x}{L}$$

Integrando dos veces e imponiendo las condiciones de contorno ( $y_{x=0} = 0$  ;  $y_{x=L} = 0$ ) se tiene la deformada de 2º orden:

$$y_{II} = \frac{P\delta}{EI} \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L}$$

En centro-luz el desplazamiento vale:

$$\delta_{II} = y_{II} \Big|_{x=L/2} = \delta \frac{P}{P_e}$$

con  $P_e = \pi^2 EI / L^2$  (carga de pandeo de Euler para columna biapoyada)

El desplazamiento total se puede obtener como:

$$\delta = \delta_I + \delta_{II} = \delta_I + \delta \frac{P}{P_e} \Rightarrow \delta = \left( \frac{1}{1 - P / P_e} \right) \delta_I$$

Asumiendo que el momento máximo de orden I está en las proximidades de centro-luz se tiene:

$$M_{\max} = M_{I,\max} + P\delta = M_{I,\max} + P \left( \frac{1}{1 - P / P_e} \right) \delta_I = \left( \frac{1 + \psi P / P_e}{1 - P / P_e} \right) M_{I,\max}$$

$$\text{con } \psi = \frac{\delta_I P_e}{M_{I,\max}} - 1$$

Definiendo  $C_m = 1 + \psi P / P_e$  puede expresarse  $M_{\max}$  como:

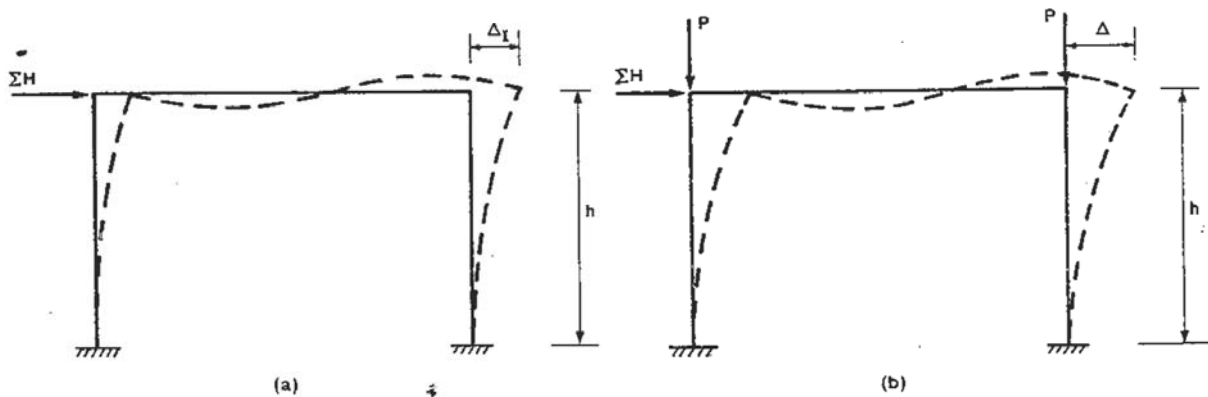
$$M_{\max} = B_1 M_{I,\max}$$

$$\text{con } B_1 = \frac{C_m}{1 - P / P_e} \quad \text{factor de amplificación del momento}$$

Nota 1: Al existir proporcionalidad entre momentos y deformaciones en centro-luz según la expresión general de la flecha  $\delta = KML^2 / EI \Rightarrow C_m \cong 1$

Nota 2: Si el momento máximo de orden I no estuviese en las proximidades de centro-luz habría que redefinir  $\psi$

• Efecto  $P-\Delta$  (efectos de 2° orden sobre la estructura)

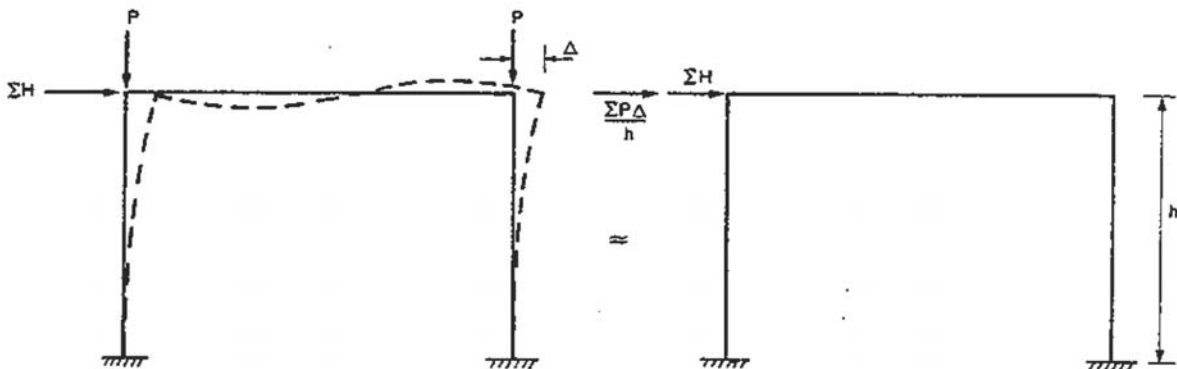


Fuente: Chen WF, Lui EM, 1991

Desplazamiento  $\Delta \Rightarrow$  Momento adicional debido a  $P$  ( $M = P\Delta$ ) respecto al de la Teoría de orden I  $\Rightarrow$  **Efecto  $P-\Delta$**

**Métodos simplificados:** Factores amplificadores de la Teoría orden I

a) Método de amplificación de cargas (*story magnifier method*)



Fuente: Chen WF, Lui EM, 1991

Hipótesis: i) Cada planta de la estructura aporticada se comporta independientemente

ii) El momento adicional en las columnas ocasionado por el efecto  $P-\Delta$  es equivalente al ocasionado por una fuerza lateral  $\Sigma P\Delta/h$

La rigidez de la planta a la deformación lateral puede definirse como:

$$S_F = \frac{\text{fuerza horizontal}}{\text{desplazamiento lateral}} = \frac{\Sigma H}{\Delta_I} = \frac{\Sigma H + \Sigma P\Delta/h}{\Delta} \Rightarrow \Delta = \left( \frac{1}{1 - \Sigma P\Delta_I / \Sigma H h} \right) \Delta_I$$

Aceptando proporcionalidad entre momentos y desplazamientos se tiene:

$$M = \left( \frac{1}{1 - \Sigma P \Delta_I / \Sigma H h} \right) M_I = B_2 M_I$$

con  $M$  momento total (máx. momento contando con el efecto  $P-\Delta$ )

$M_I$  máximo momento de orden I

$B_2$  factor de amplificación del momento

El método proporciona razonable aproximación en pórticos con vigas de rigidez en cada planta, apareciendo un punto de inflexión en cada pilar de la planta

**b) Método de amplificación de la columna múltiple (*multiple-column magnifier method*) o método modificado de la longitud de pandeo (*modified effective length method*)**

El método es una extensión directa de la ecuación  $\delta = \left( \frac{1}{1 - P/P_e} \right) \delta_I$

Hipótesis: Inestabilidad global del pórtico, volviéndose todas las columnas inestables a la vez  $\rightarrow$  El término  $P/P_e$  puede sustituirse por  $\Sigma(P/P_{ek})$  con el sumatorio extendido a todas las columnas

Aceptando proporcionalidad entre momentos y desplazamientos se tiene:

$$M = \left( \frac{1}{1 - \Sigma P / \Sigma P_{ek}} \right) M_I = B_2 M_I$$

con  $P_{ek} = \pi^2 EI / (\beta L)^2$

$\beta$  coef. de pandeo (factor de longitud efectiva de la columna)

Por tanto, el factor de amplificación del momento puede expresarse de dos formas:

$$B_2 = \frac{1}{1 - \Sigma P \Delta_i / \Sigma H h} \quad (\text{método de amplificación de cargas})$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \Sigma P / \Sigma P_{ek}} \quad (\text{método de la longitud de pandeo})$$

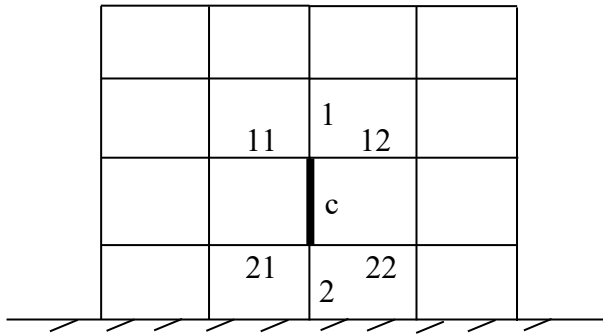
- Efecto  $P-\Delta$  reducido  $\rightarrow$  Ambas expresiones proporcionan resultados similares
- Efecto  $P-\Delta$  importante  $\rightarrow$  La amplificación de cargas aporta mejores resultados
- Método longitud pandeo  $\rightarrow$  Más fácil de usar al no requerir análisis de orden I de la estructura, aunque hay que evaluar la longitud pandeo de cada columna
- No se ha considerado la pérdida de rigidez de las columnas debido al axil  $\rightarrow$  Habría que introducir un coeficiente de flexibilidad  $\gamma$  en el término  $\Sigma P$  (i.e.  $\Sigma \gamma P$ ) con un valor en el rango  $\gamma = [1,0; 1,22]$  (1,0 para columnas poco deformadas, casi rectas, y 1,22 para columnas con deformación próxima a la de pandeo)
- Estos métodos son tediosos y propicios a cometer equivocaciones
- Hoy día no tiene mucho sentido, excepto en algunos casos sencillos

### **Cálculo en Teoría de orden II:**

- Tiene en cuenta los efectos  $P-\delta$  y  $P-\Delta$
- Ayuda del ordenador
- Conceptualmente más simple y eficiente

### 3. LONGITUD PANDEO EN PILARES DE EDIFICIOS

Procedimiento Art. 6.3.2.5 CTE DB SE-A:



$\eta_1 \equiv$  Coeficiente de distribución del nudo superior

$\eta_2 \equiv$  Coeficiente de distribución del nudo inferior

$K_{ij} \equiv$  Rigidez eficaz de la viga en el nudo  $i$  y posición  $j$

$$\eta_1 = \frac{\frac{EI_c}{L_c} + \frac{EI_1}{L_1}}{\frac{EI_c}{L_c} + \frac{EI_1}{L_1} + K_{11} + K_{12}} \quad \eta_2 = \frac{\frac{EI_c}{L_c} + \frac{EI_2}{L_2}}{\frac{EI_c}{L_c} + \frac{EI_2}{L_2} + K_{21} + K_{22}}$$

$\eta_i = 0$  nudo empotrado

1 nudo articulado

Estructuras **intraslacionales** o **traslacionales calculadas con ANL** (sea ANL preciso o ANL aproximado y, en cualquier caso, sin considerar las imperfecciones locales de los propios pilares):

$$\beta = \frac{1 + 0,145(\eta_1 + \eta_2) - 0,265\eta_1\eta_2}{2 - 0,364(\eta_1 + \eta_2) - 0,247\eta_1\eta_2} \leq 1$$

Estructuras **traslacionales calculadas con AL**:

$$\beta = \sqrt{\frac{1 - 0,2(\eta_1 + \eta_2) - 0,12\eta_1\eta_2}{1 - 0,8(\eta_1 + \eta_2) + 0,6\eta_1\eta_2}} \geq 1$$

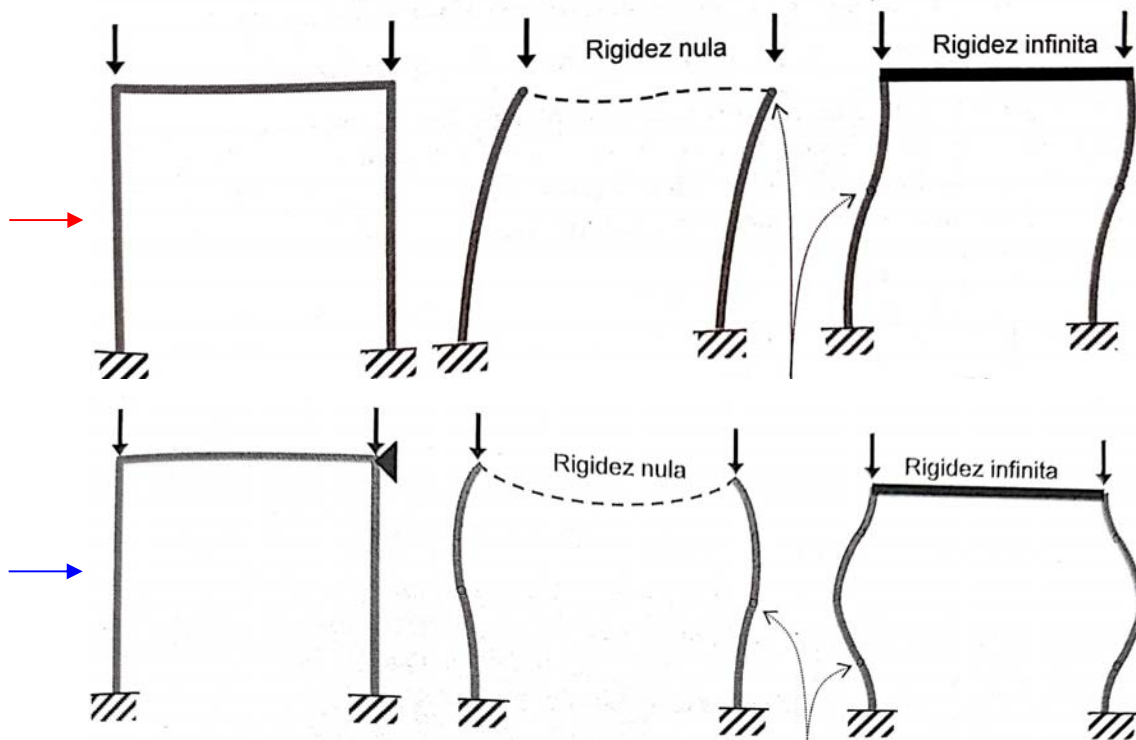
(AL: análisis lineal; ANL: análisis no lineal)

Tabla 6.5 Coeficiente de rigidez eficaz para una viga en comportamiento elástico

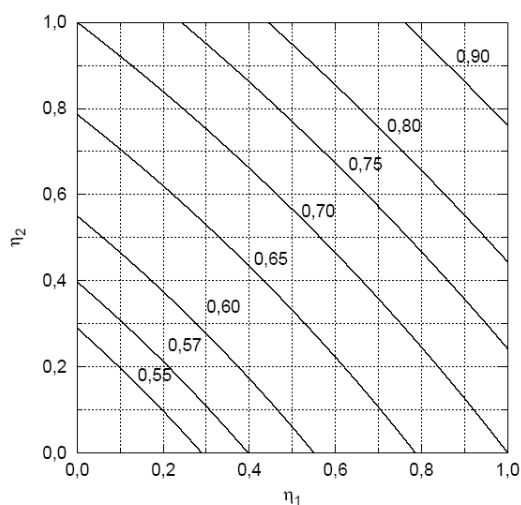
Condiciones de coacción al giro en la viga en el extremo contrario al considerado.	Coeficiente de rigidez eficaz K de la viga	
	sin compresión relevante	con compresión <sup>(1)</sup>
empotrado	$1,0 EI/L$	$1,0 EI/L (1-0,4 N/N_{cri})$
articulado	$0,75 EI/L$	$0,75 EI/L (1 - 1,0 N/N_{cri})$
→ giro igual y de igual signo	$1,5 EI/L$	$1,5 EI/L (1-0,2 N/N_{cri})$
→ giro igual y de signo opuesto	$0,5 EI/L$	$0,5 EI/L (1-1,0 N/N_{cri})$
giro $\theta_a$ en el nudo considerado y giro $\theta_b$ en el otro	$(1 + 0,5 \theta_b / \theta_a) EI/L$	-

<sup>(1)</sup>  $N_{cri}$  se refiere al valor crítico a compresión de la viga considerada. El caso general (-) no está contemplado

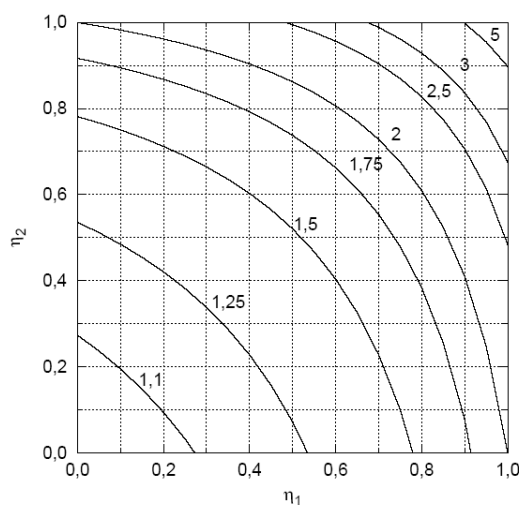
Fuente: CTE DB SE-A, 2006



Fuente: Gil LM, Hernández E, 2020



Intraslacional 6.3.2.5-1



Traslacional 6.3.2.5-2

Figura 6.4 Cocientes de longitud de pandeo a longitud de barra

Fuente: CTE DB SE-A, 2006

## 4. COMPROBACIÓN PIEZAS A FLEXOCOMPRESIÓN

$$\frac{\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}}}{\gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{\frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}}}{\gamma_{M1}} + k_{yz} \frac{\frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\chi_{LT} M_{z,Rk}}}{\gamma_{M1}} \leq 1$$

$$\frac{\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}}}{\gamma_{M1}} + k_{zy} \frac{\frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}}}{\gamma_{M1}} + k_{zz} \frac{\frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\chi_{LT} M_{z,Rk}}}{\gamma_{M1}} \leq 1$$

$N_{Ed}$ ,  $M_{y,Ed}$  y  $M_{z,Ed}$  son los valores de cálculo del esfuerzo de compresión y de los momentos máximos alrededor de los ejes  $y-y$  y  $z-z$  a lo largo del elemento respectivamente

$\Delta M_{y,Ed}$  y  $\Delta M_{z,Ed}$  son los momentos debidos al desplazamiento del centro de gravedad de acuerdo con el apartado 6.2.9.3 para secciones Clase 4, véase la tabla A22.6.7

$\chi_y$  y  $\chi_z$  son los coeficientes de reducción de pandeo por flexión según el apartado 6.3.1

$\chi_{LT}$  es el coeficiente de reducción de pandeo lateral según el apartado 6.3.2

$k_{yy}$ ,  $k_{yz}$ ,  $k_{zy}$  y  $k_{zz}$  son los coeficientes de interacción.

Tabla A22.6.7 Valores para  $N_{Rk} = f_y A_i$ ,  $M_{i,Rk} = f_y W_i$  y  $\Delta M_{i,Ed}$

Clase	1	2	3	4
$A_i$	A	A	A	$A_{eff}$
$W_y$	$W_{pl,y}$	$W_{pl,y}$	$W_{el,y}$	$W_{eff,y}$
$W_z$	$W_{pl,z}$	$W_{pl,z}$	$W_{el,z}$	$W_{eff,z}$
$\Delta M_{y,Ed}$	0	0	0	$e_{N,y} N_{Ed}$
$\Delta M_{z,Ed}$	0	0	0	$e_{N,z} N_{Ed}$

NOTA: Para elementos no susceptibles a la deformación por torsión  $\chi_{LT}$  sería  $\chi_{LT} = 1,0$ .

Fuente: CE, Anejo 22, 2021

### Clasificación de los elementos según su susceptibilidad a deformarse por torsión

- **No susceptibles:** Los de torsión impedida y los de secciones **circulares huecas**
- **Susceptibles:** Los de torsión no impedida y los de secciones **abiertas**

## Apéndice B Método 2: Coeficientes recomendados de interacción $k_{ij}$ para la fórmula de interacción 6.3.3(4)


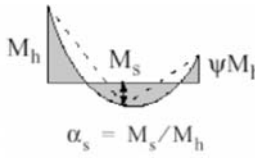
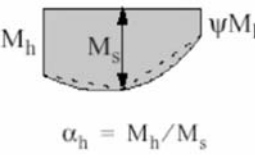
Tabla A22.B.1 Coeficientes de interacción  $k_{ij}$  para elementos **no susceptibles** a deformaciones por torsión

Coeficiente de interacción	Tipo de sección	Hipótesis de cálculo	
		Propiedades elásticas secciones Clase 3 o 4	Propiedades plásticas secciones Clase 1 o 2
$k_{yy}$	Secciones en I  Huecas rectangulares (SHR)	$C_{my} \left( 1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda}_y \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{my} \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{my} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
$k_{yz}$	Secciones en I  SHR	$k_{zz}$	$0,6 \cdot k_{zz}$
$k_{zy}$	Secciones en I  SHR	$0,8 \cdot k_{yy}$	$0,6 \cdot k_{yy}$
$k_{zz}$	Secciones en I	$C_{mz} \left( 1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda}_z \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{mz} \left( 1 + (2\bar{\lambda}_z - 0,6) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left( 1 + 1,4 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
	SHR	$C_{mz} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{mz} \left( 1 + (\bar{\lambda}_z - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
Para secciones I y H y SHR bajo axiles de compresión y momentos en un eje $M_{y,Ed}$ , el coeficiente $k_{zy}$ podrá tomarse nulo.			

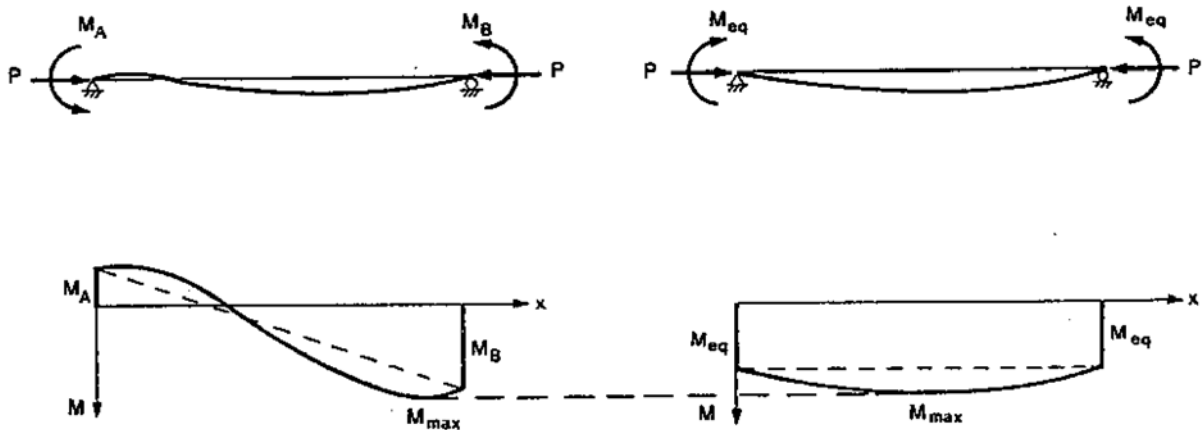
Tabla A22.B.2 Coeficientes de interacción  $k_{ij}$  para elementos susceptibles a deformaciones por torsión

Coeficiente de interacción	Hipótesis de cálculo	
	Propiedades elásticas secciones Clase 3 o 4	Propiedades plásticas secciones Clase 1 o 2
$k_{yy}$	se adopta el valor de la tabla A22.B.1	se adopta el valor de la tabla A22.B.1
$k_{yz}$	se adopta el valor de la tabla A22.B.1	se adopta el valor de la tabla A22.B.1
$k_{zy}$	$\left[ 1 - \frac{0,05 \cdot \bar{\lambda}_z}{(C_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed}}{\chi_z \cdot N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right]$ $\geq \left[ 1 - \frac{0,05}{(C_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed}}{\chi_z \cdot N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right]$	$\left[ 1 - \frac{0,1 \cdot \bar{\lambda}_z}{(C_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed}}{\chi_z \cdot N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right]$ $\geq \left[ 1 - \frac{0,1}{(C_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed}}{\chi_z \cdot N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right]$ <p>Para <math>\bar{\lambda}_z &lt; 0,4</math> :</p> $k_{zy} = 0,6 + \bar{\lambda}_z \leq$ $1 - \frac{0,1 \cdot \bar{\lambda}_z}{(C_{mLT} - 0,25)} \cdot \frac{N_{Ed}}{\chi_z \cdot N_{Rk} / \gamma_{M1}}$
$k_{zz}$	se adopta el valor de la tabla A22.B.1	se adopta el valor de la tabla A22.B.1

Tabla A22.B.3 Coeficientes  $C_m$  para la obtención del momento equivalente uniforme en tablas A22.B.1 y A22.B.2

Diagrama de momento	Rango		$C_{my}$ y $C_{mz}$ y $C_{myLT}$	
			Carga uniforme	Carga puntual
	$-1 \leq \psi \leq 1$		$0,6+0,4 \cdot \psi \geq 0,4$	
	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,2+0,8 \cdot \alpha_s \geq 0,4$	$0,2+0,8 \cdot \alpha_s \geq 0,4$
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,1-0,8 \cdot \alpha_s \geq 0,4$	$-0,8 \alpha_s \geq 0,4$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,1(1-\psi)-0,8 \cdot \alpha_s \geq 0,4$	$0,2 \cdot (-\psi)-0,8 \cdot \alpha_s \geq 0,4$
	$0 \leq \alpha_h \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,95+0,05 \cdot \alpha_h$	$0,90+0,1 \cdot \alpha_h$
	$-1 \leq \alpha_h < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,95+0,05 \cdot \alpha_h$	$0,90+0,1 \cdot \alpha_h$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,95+0,05 \cdot \alpha_h \cdot (1+2\psi)$	$0,90+0,1 \cdot \alpha_h \cdot (1+2\psi)$
Para elementos con modo de pandeo traslacional el momento equivalente uniforme deberá tomarse como $C_{my} = 0,9$ o $C_{mz} = 0,9$ .				
$C_{my} = 0,9$ , $C_{mz} = 0,9$ y $C_{mLT} = 0,9$ deberán obtenerse de acuerdo con el diagrama de momentos flectores entre los puntos de refuerzo como sigue:				
Coeficiente de momento eje flector puntos reforzados en la dirección				
$C_{my}$	y-y		z-z	
$C_{mz}$	z-z		y-y	
$C_{mLT}$	y-y		y-y	

## • Concepto de momento equivalente



Fuente: Chen WF, Lui EM, 1991

El momento equivalente es:

$$M_{eq} = C_m M_B \quad \text{siendo } C_m \leq 1 \quad \text{y} \quad |M_B| \geq |M_A|$$

El momento máximo es:

$$M_{\max} = \frac{C_m}{1 - P/P_e} M_B = B_1 M_B$$

## • Expresiones aproximadas de $C_m$

**Massonet (1959)** 
$$C_m = \sqrt{0,3(M_A/M_B)^2 - 0,4(M_A/M_B) + 0,3}$$

Ignora la carga  $P$ . Segura para  $P$  grande y ligeramente insegura para  $P$  pequeña.

**Austin (1961)** 
$$C_m = 0,6 - 0,4(M_A/M_B) \geq 0,4$$

Expresión adoptada en la normativa. Ignora la carga  $P$ . Segura para  $P$  grande y doble curvatura ( $M_A/M_B > 0$ ) (caso habitual en pórticos traslacionales). Ligeramente insegura para  $P/P_e < 0,7$  y simple curvatura ( $M_A/M_B < 0$ ).

**Duan-Sohal-Chen (1989)** 
$$C_m = 1 + 0,25(P/P_e) - 0,6(P/P_e)^{1/3} (M_A/M_B + 1)$$

Expresión más ajustada de las tres.