TEMA 4

FLEXIÓN

- 1. INTRODUCCIÓN
- 2. TENSIONES NORMALES DEBIDAS A LA FLEXIÓN. ANÁLISIS ELÁSTICO
- 3. TENSIONES TANGENCIALES DEBIDAS A LA FLEXIÓN
- 4. DISEÑO A RESISTENCIA (EN TENSIONES) DE SECCIONES FLECTADAS
- 5. TIPOS DE SECCIÓN
- 6. RESISTENCIA DE LAS SECCIONES
 - 6.1 FLEXIÓN
 - 6.2 CORTANTE
 - 6.3 FLEXIÓN Y CORTANTE COMBINADOS
 - 6.4 FLEXIÓN ESVIADA
- 7. LIMITACIÓN DE DEFORMACIONES
- 8. VIBRACIONES

1. INTRODUCCIÓN

- Son elementos sometidos a:
 - Momentos flectores
 - Esfuerzos cortantes
- Se usan <u>VIGAS</u> (con \uparrow W para $\downarrow \sigma$ y \uparrow I para \downarrow deform.):
 - * De alma llena: Perfiles laminados (uso predominante)
 - Vigas armadas
 - * V. alma aligerada y v. sección variable
 - * Secciones en cajón (flexión en dos planos y torsión)
- Como elementos constructivos:
 - Viguetas de forjado
 - Dinteles de pórticos
 - Jácenas de edificación y vigas de fachada
 - Vigas longitudinales y transversales de puentes
- Elección determinada por el <u>CÁLCULO</u>:
 - E.L.U.: Sección a resistencia (en tensiones o esfuerzos)
 - Pieza a pandeo lateral
 - E.L.S.: Pieza a deformación

• DIMENSIONES Y EJES DE LAS SECCIONES

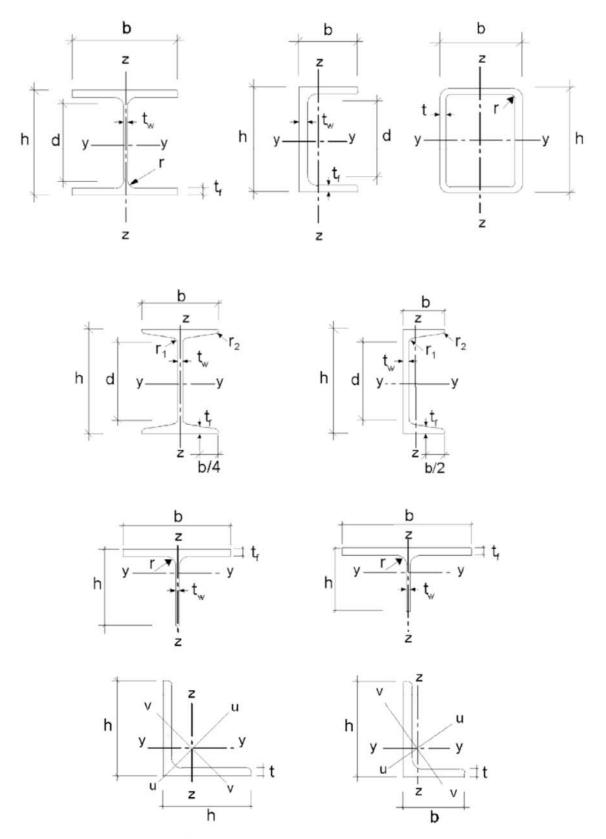
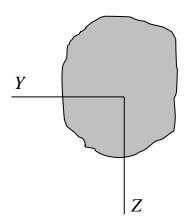


Figura A22.1.1 Dimensiones y ejes de las secciones

Fuente: CE, Anejo 22, 2021

2. <u>TENSIONES NORMALES DEBIDAS A LA FLEXIÓN.</u> <u>ANÁLISIS ELÁSTICO</u>



• EJES CUALESQUIERA:

$$\sigma_{x} = \frac{N}{A} + \frac{M_{y}(I_{z} \cdot z - I_{yz} \cdot y) - M_{z}(I_{yz} \cdot z - I_{y} \cdot y)}{I_{y}I_{z} - I_{yz}^{2}}$$

• EJES PRINCIPALES:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

• CASO HABITUAL ($M_z = 0$):



$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z \implies \sigma_{\text{max}} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y}$$

3. TENSIONES TANGENCIALES DEBIDAS A LA **FLEXIÓN**

• EJES CUALESQUIERA:

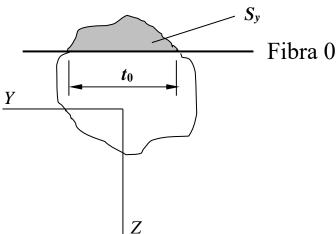
$$\tau_0 = \frac{Q_y \left(I_y S_z - I_{yz} S_y\right) + Q_z \left(I_{yz} S_z - I_z S_y\right)}{t_0 \left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}$$

• EJES PRINCIPALES:

$$\tau_0 = \frac{Q_y S_z}{t_0 I_z} + \frac{Q_z S_y}{t_0 I_y}$$

Para $Q_y = 0$:

$$\tau_0 = \frac{Q_z S_y}{t_0 I_y}$$





Secciones I y cajón \Rightarrow Simplificadamente $\tau = \frac{Q}{A_w}$ Secciones rectangulares \Rightarrow $\tau_{\text{max}} = 1.5 \frac{Q}{A}$ Secciones I y cajón

Ejercicio: Obtener la distribución de tensiones tangenciales en una sección rectangular sometida a un cortante Q_z y demostrar el valor de la τ_{max}

4. DISEÑO A RESISTENCIA (EN TENSIONES) DE SECCIONES FLECTADAS

CE, Anejo 22, Apdo. 6.2.1: Para la comprobación elástica se podrá utilizar el criterio de Von Misses en el punto crítico de la sección, salvo que se aplique otra fórmula de interacción. La comprobación puede ser conservadora por excluir toda distribución plástica parcial de tensiones. En consecuencia, deberá aplicarse únicamente cuando no pueda realizarse la interacción de las resistencias N_{Rd} , M_{Rd} y V_{Rd} .

- PERFILES IPE o IPN
- PERFIL H **INCONVENIENTE:** Mayor AREA a igual W que los IPE o IPN
- Podemos aumentar W con PLATABANDAS soldadas a las alas
- Esfuerzo cortante tiene poca importancia en dimensionamiento (salvo en vanos pequeños o bajo cargas puntuales):

En fibra neutra: - τ máx.

- σ nulas

- $Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}$ - Además, tener en cuenta que
- Tener en cuenta el pandeo lateral (en los cálculos o arriostrando)
- Criterio VON MISSES:

$$\sigma_{co} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le f_{yd}$$

- En general son tres las fibras a comprobar en una sección:



- $\sigma = 0$; τ máx. 1) Fibra neutra
- 2) Fibra extrema $\Rightarrow \sigma \text{ máx.}; \tau = 0$ 3) Fibra unión ala-alma $\Rightarrow \sigma \text{ y } \tau \text{ próximos al máx.}$

5. TIPOS DE SECCIÓN (CE, Anejo 22, Apdo. 5.5.2)

La función de CLASIFICAR la sección es identificar en qué medida su resistencia y capacidad de giro se limitan por su resistencia a la abolladura local.

- Clase 1: gran capacidad de deformarse (pueden formar rótulas plásticas con suficiente capacidad de giro sin reducción de resistencia). ¡Ojo! con este tipo de secciones en estructuras isostáticas → Formación de pseudo-mecanismos
- Clase 2: pueden desarrollar momento resistente plástico, pero con limitada capacidad de giro por abolladura local (no pueden formar rótulas plásticas).
- Clase 3: la tensión en la fibra más comprimida, con una distribución elástica de tensiones, puede alcanzar el límite elástico f_y , pero la abolladura impide el desarrollo del momento resistente plástico.
- Clase 4: aquellas cuya abolladura se producirá antes de llegar al límite elástico en una o más partes de la sección.

Clase	Modelo de comportamiento	Resistencia de cálculo	Capacidad de rotación de la rótula plástica	Análisis global de la estructura
1	Mpl Abolladura local	PLÁSTICA sobre toda la sección	Importante	Elástico o plástico
2	Abolladura local	PLÁSTICA sobre toda la sección	Limitada	Elástico
3	Mpl Mel Abolladura local	ELÁSTICA sobre toda la sección	Ninguna	Elástico
4	Mpl Mel Abolladura local	ELÁSTICA sobre la sección reducida	Ninguna	Elástico

Fuente: EAE, 2012

Leyes momento-curvatura $(M-\chi)$ de secciones transversales de Clases 1 a 4

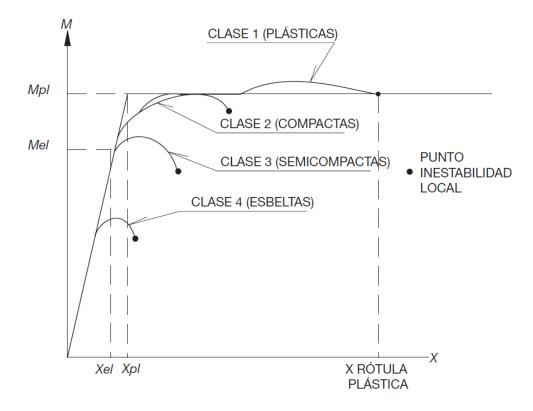
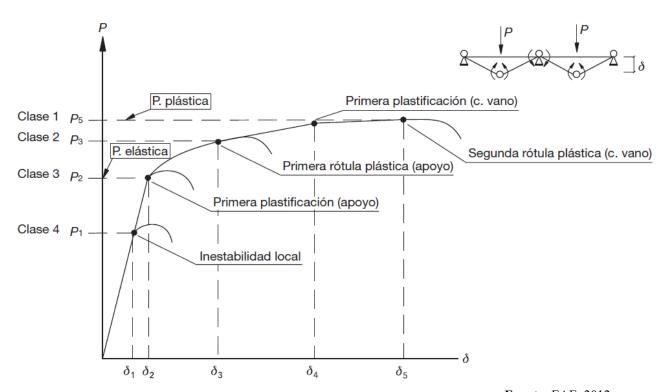


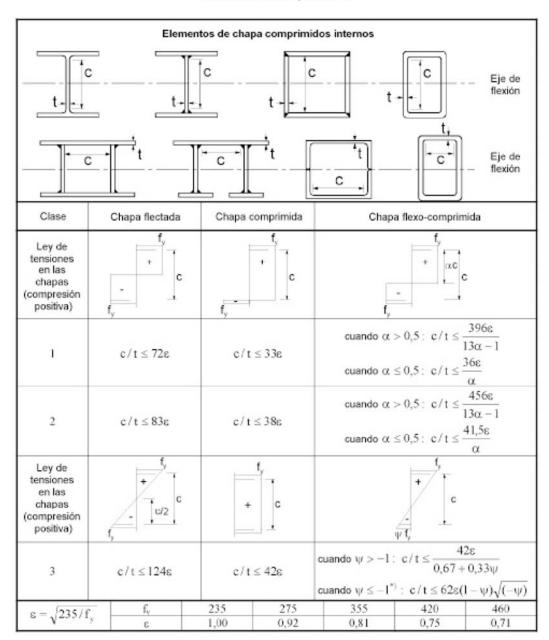
Diagrama elastoplástico hasta rotura de un dintel continuo en función de la clase de las secciones transversales



Fuente: EAE, 2012

- Para definir las Clases 1, 2 y 3 se utiliza la relación ancho/espesor de las zonas comprimidas de la sección, conforme a los límites de la <u>Tabla A22.5.2</u> (se consideran de Clase 4 las zonas que sobrepasen los límites de la Clase 3).
- Como cada zona comprimida de una sección (ala o alma) puede ser de clase diferente, se asignará a la sección la clase <u>más alta</u> (menos favorable).
- Cuando se considere que el alma resiste únicamente a esfuerzos cortantes y las alas a flectores y axiles, la sección podrá definirse como Clase 2, 3 o 4, dependiendo únicamente de la clase de las alas.

Tabla A22.5.2 (parte 1 de 3) Proporciones máximas ancho-espesor para zonas y elementos comprimidos



*) $\Psi \le -1$ será de aplicación cuando la tensión de compresión sea $\sigma \le f_y$ o la deformación de tracción sea $\varepsilon_y > f_y/E$.

En flexocompresión, se puede deducir que:

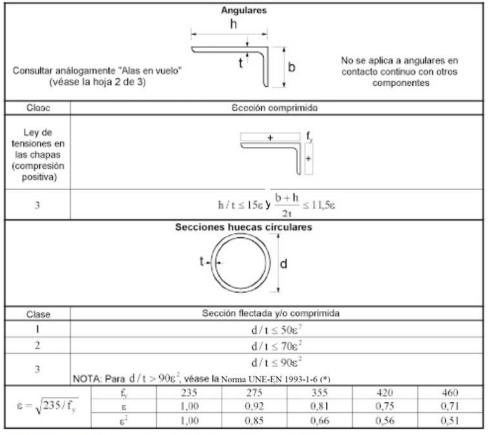
$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{N_d}{ct_w f_y} \right)$$

Fuente: CE, Anejo 22, 2021

Alas en vuelo C Secciones laminadas Secciones soldadas Chapa flexo-comprimida Clase Chapa comprimida Extremo comprimido Extremo traccionado αC αC Ley de tensiones en las chapas (compresión positiva) $c/t \le 9\epsilon$ 10ε $c/t \le 10\epsilon$ $\alpha\sqrt{\alpha}$ Ley de tensiones en las chapas (compresión positiva) $c/t \le 21\epsilon \sqrt{k_a}$ c/t ≤14ε Para ka, véase el Anejo 25 del Código Estructural $\varepsilon = \sqrt{235/f}$ 0,75 0.71 1,00 0,92 0.81

Tabla A22.5.2 (parte 2 de 3) Proporciones máximas ancho-espesor para zonas y elementos comprimidos

Tabla A22.5.2 (parte 3 de 3) Proporciones máximas ancho-espesor para zonas y elementos comprimidos



(*) Las estructuras formadas por láminas queda fuera del ámbito de apliación de este Código.

Clase de los perfiles más habituales, acero S275 (Prontuario CEDEX)

TIPO	FLEXIÓN	COMPRESIÓN
IPN	1	1
UPN	1	1
IPE 80 - 220	1	1
240 - 300	1	2
330 - 400	1	3
450 - 600	1	4
HEB 100 - 550	1	1
600	1	2
HEA 100 - 160	1	1
180 - 240	2	2
260 - 300	3	3
320	2	2
340 - 500	1	1
550	1	2
600	1	3

Clase de los perfiles más habituales, acero S355 (Prontuario CEDEX)

TIPO	FLEXIÓN	COMPRESIÓN
IPN	1	1
UPN	1	1
IPE 80 - 160	1	1
180 - 240	1	2
270	1	3
300 - 600	1	4
HEB 100 - 450	1	1
500 - 550	1	2
600	1	3
HEA 100 - 120	1	1
140 - 160, 360	2	2
180 - 340	3	3
400 - 450	1	2
500	1	3
550 - 600	1	4

6. RESISTENCIA DE LAS SECCIONES

(CE, Anejo 22, Apdo. 6.2)

6.1 FLEXIÓN

$$M_{c,Rd} = \begin{cases} M_{pl,Rd} = W_{pl} f_{yd} & \text{(clase 1 y 2)} \\ M_{el,Rd} = W_{el} f_{yd} & \text{(clase 3)} \\ M_{0,Rd} = W_{eff} f_{yd} & \text{(clase 4)} \end{cases}$$

 W_{pl} módulo resistente plástico correspondiente a la fibra con mayor tensión

Wel módulo resistente elástico correspondiente a la fibra con mayor tensión

W_{eff} módulo elástico de la sección eficaz correspondiente a la fibra con mayor tensión (procedim. iterativo)

$$f_{yd} = f_y / \gamma_M = f_y / 1.05$$

Módulo resistente plástico:

 $W_{pl,y} = \Sigma S_y$ suma de momentos estáticos respecto a un eje y (fibra neutra plástica) que divide la sección en dos partes de igual área

Para secciones simétricas, $W_{pl,y} = 2S_y$

Por ejemplo, chapa rectangular:

- vertical (canto h, espesor t)
$$\rightarrow W_{pl,y} = 2(t \cdot h/2)(h/4) = t \cdot h^2/4$$

- horizontal (ancho b, espesor t)
$$\rightarrow W_{pl,y} = 2(b \cdot t/2)(t/4) = b \cdot t^2/4$$

Doble T			
[1,10 1,12 1,20]	1,70	1,50	1,27

Relación M_{pl}/M_{el} (= W_{pl}/W_{el}) para distintas secciones

6.2 CORTANTE

$$V_{c,Rd} = V_{pl,Rd} = A_V \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$$

Área a cortante (Av):

Coincide prácticamente con el área del alma (dt_w) más una pequeña parte del ala:

Cortante paralelo al alma:

• Perfiles laminados doble T

$$A_V = A - 2bt_f + (t_w + 2r)t_f$$

(simplificadamente: $A_V = ht_w$)

Perfiles laminados en U

$$A_V = A - 2bt_f + (t_w + r_1)t_f$$

(simplificadamente: $A_V = ht_w$)

Secciones armadas

- $A_V = \Sigma dt_w$
- Secciones circulares huecas
- $A_{V} = 2A/\pi$

• Secciones macizas

 $A_V = A$

Cortante perpendicular al alma:

• Perfiles laminados doble T y U

$$A_V = A - dt_w$$

• Secciones armadas

$$A_V = A - \Sigma dt_w$$

siendo: A área total de la sección

- *b* anchura de la sección
- d canto del alma (también se emplea h_w)
- h canto total de la sección
- *t_f* espesor del ala
- t_w espesor del alma
- r, r_1 radio de la transición alma-ala

6.3 FLEXIÓN Y CORTANTE COMBINADOS

Si
$$V_{Ed} > 0.5V_{c,Rd} \implies \text{Se reduce } M_{c,Rd} \rightarrow M_{V,Rd} = W(1-\rho)f_{yd} \leq M_{c,Rd}$$

El coeficiente de reducción es $(1-\rho)$, siendo ρ :

$$\rho = \left(2\frac{V_{Ed}}{V_{pl,Rd}} - 1\right)^2$$

Caso particular: Sección doble T de alas iguales, clase 1 o 2, flectada según eje y

Puede adoptarse el siguiente $W_{pl,y}$ reducido:

$$M_{y,V,Rd} = \left[W_{pl,y} - \frac{\rho A_V^2}{4t_w}\right] f_{yd} \le M_{c,Rd}$$

Simplificación: En perfiles laminados doble T puede despreciarse el efecto de interacción cuando se consideran únicamente las alas en el cálculo de la resistencia a flexión y el alma en el cálculo de la resistencia a cortante.

6.4 FLEXIÓN ESVIADA

Fórmulas de interacción del CTE:

$$\begin{split} \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{pl,Rdy}} + \frac{M_{zEd}}{M_{pl,Rdz}} &\leq 1 \\ \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{el,Rdy}} + \frac{M_{zEd}}{M_{el,Rdz}} &\leq 1 \\ \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{el,Rdy}} + \frac{M_{zEd}}{M_{el,Rdz}} &\leq 1 \\ \frac{N_{Ed}}{N_{u,Rd}} + \frac{M_{y,Ed} + N_{Ed} \cdot e_{Ny}}{M_{0,Rdy}} + \frac{M_{zEd} + N_{SEd} \cdot e_{Ny}}{M_{0,Rdz}} &\leq 1 \end{split} \qquad \text{Para secciones de clase } 3$$

Para secciones de clase 3

Para secciones de clase 4

siendo

$$f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Fuente: CTE DB SE-A, 2006

7. <u>LIMITACIÓN DE DEFORMACIONES</u> (CE, A22, Apd. 7.2)

• <u>FLECHAS</u> (entre dos puntos cualesquiera)

L= doble de la distancia entre los dos puntos considerados (L= distancia entre apoyos, caso de vigas apoyadas; $L=2\times$ longitud, caso de voladizos)

INTEGRIDAD DE LOS ELEMENTOS CONSTRUCTIVOS

Condiciones	Límite flecha activa (*)
Pisos con tabiques frágiles (gran formato, rasillones, placas) o pavim. rígidos sin juntas	L/500
Pisos con tabiques ordinarios o pavimentos rígidos con juntas	L/400
Resto de casos	L/300

(*) Flecha activa de un elemento: la producida después de su puesta en obra. A falta de datos, la flecha de las acciones variables (comb. característica)

CONFORT USUARIOS \Rightarrow Flecha acciones variab. $\leq L/350$ (comb.caract.)

APARIENCIA OBRA \Rightarrow Flecha total < L/300 (comb. casipermanente)

• <u>DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES</u>

INTEGRIDAD DE LOS ELEMENTOS CONSTRUCTIVOS (tabiques, fachadas rígidas)

Desplome total < 1/500 de la altura total del edificio

Desplome local < 1/250 de la altura de la planta, en cualquiera de ellas

APARIENCIA DE LA OBRA

Desplome relativo < 1/250 (entre dos puntos cualesquiera)

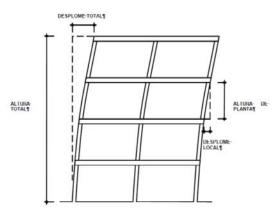


Figura A22.7.1 Desplome

Fuente: CE, Anejo 22, 2021

8. VIBRACIONES

• **GENERALIDADES**

- CE, Anejo 22, Apdo. 7.2.3 → En el caso de las estructuras de edificación, se utilizarán las limitaciones indicadas en el Apdo. 4.3.4 del CTE DB SE.
- Estructura sometida a acciones periódicas de alternancia rápida ⇒ Analizar su comportamiento frente a las vibraciones, considerando:
 - Confort de los usuarios del edificio
 - Comportamiento de los elementos no estructurales
 - Funcionamiento de equipos e instalaciones
- Como en las deformaciones, los fenómenos relacionados con las vibraciones dependen de la <u>rigidez</u> más que de la resistencia. Su influencia es directamente proporcional a la esbeltez estructural.
- Una estructura se comporta adecuadamente si su <u>frecuencia propia</u> se aparta suficientemente de la frecuencia de la acción dinámica de excitación.
- En los forjados de edificación se pueden distinguir dos tipos de vibraciones:
 - *Continuas*: inducidas por máquinas con piezas en movimiento o por los movimientos rítmicos de personas al practicar deportes, bailar, etc. En este último caso, una planta de piso es suficientemente rígida si la frecuencia propia f_1 [Hz] es mayor de:

Estructura	Hz
Gimnasios y polideportivos	8
Salas de fiesta, locales públicos sin asientos fijos	
Locales de espectáculos con asientos fijos	3,4
Viviendas, oficinas, centros comerciales	-

- *Transitorias*: usuales en forjados de edificios de viviendas, oficinas, enseñanza y comercio. Su aceptación se basa en la percepción humana (frecuencia de oscilación, aceleración máxima y amortiguamiento)

• En la mayoría de estructuras convencionales, la comprobación de la frecuencia propia se reduce simplificadamente a la limitación de la flecha ante cualquier combinación de acciones frecuente:

$$f_1 \ge 3 \text{ Hz si } y_{tot} < 28 \text{ mm}$$

$$f_1 \ge 5 \text{ Hz si } y_{tot} < 10 \text{ mm}$$

- La <u>aceleración</u> es inversamente proporcional a la <u>masa</u> afectada → Especial atención a la masa que oscila junto a la estructura horizontal.
 - Un forjado cerca del límite de su capacidad portante no suele presentar problemas oscilatorios, los problemas aparecen en espacios diáfanos con niveles de sobrecarga reducidos.
- La reducción de los efectos de fenómenos vibratorios se consigue generalmente por dos caminos:
 - incrementar los espesores de las losas de forjado
 - considerar la colaboración entre las estructuras de acero y las losas de forjado de hormigón como estructuras mixtas

• FRECUENCIA DE OSCILACIÓN

• Se estima a partir de la frec. prop. 1^{er} modo de vibrac. f_1 de una viga biapoy.:

$$f_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI_b}{\overline{m}L^4}}$$

E módulo de elasticidad del acero

 I_b mom. inercia secc. mixta homogeneiz. (considerada toda de acero):

- espesor de losa: el de la losa maciza o, si se trata de losa aligerada, el equivalente al de una losa maciza del mismo peso
- ancho de losa: ancho b = s (separación de las vigas metálicas) homogeneizado por $n = E / E_c \implies b_{ef} = b/n$
- E_c módulo de elasticidad del hormigón = 8500 $(f_{ck} + 8)^{1/3}$
- fck resistencia característica del hormigón en MPa

 \overline{m} masa (por ud. long.): p.p.viga+p.p.losa+c.p.+ valor cuasi-perm. s.c.

L luz viga biapoyada

- <u>Vigas continuas</u>: se analiza un vano como biapoyado (pues los vanos adyacentes oscilan en sentido opuesto)
- Forjados con dos niveles de vigas (jácenas sobre las que apoyan correas perpendiculares y sobre éstas apoya la losa): la frecuencia propia del sistema es más pequeña que la de un forjado equivalente con un nivel de vigas, pues la rigidez del conjunto del sistema es mayor. La frecuencia propia se estima:

$$\frac{1}{f_{1,sis}^2} = \frac{1}{f_{1,cor}^2} + \frac{1}{f_{1,jac}^2}$$

 $f_{1,sis}$ frec. propia del primer modo de vibración del sistema (forjado)

 $f_{1,cor}$ frec. propia del 1^{er} modo de vibración de la correa, considerando indeformables las jácenas perpendiculares en las que se apoya

 $f_{1,jac}$ frec. propia de la jácena

• ACELERACIÓN MÁXIMA

• La aceleración máxima inicial a_0 de vibración de un forjado por un impulso I, puede determinarse por la relación:

$$a_0 = 0.9 \frac{2\pi f_1 I}{M}$$

 f_1 frec. propia del 1^{er} modo de vibración del forjado [seg⁻¹]

I impulso [N·seg]; en el desplazamiento de una persona se adopta 67 N·seg

M masa vibrante [kg]; para una viga biapoyada se adopta

$$M = 0.67mbL$$

m masa (por ud. superf.) del forjado: p.p.+c.p.+valor cuasi-perm. s.c.

b ancho eficaz de la losa, b = s (separación de las vigas de acero)

L luz viga biapoyada

• En forjados con dos niveles de vigas (jácenas y correas), la superficie del forjado bL se determina

$$bL = \left(\frac{f_{1,sis}}{f_{1,cor}}\right)^2 b_{cor} L_{cor} + \left(\frac{f_{1,sis}}{f_{1,jac}}\right)^2 b_{jac} L_{jac}$$

 b_{cor} ancho de losa tributaria de la correa, $b_{cor} = S$ (separación de correas)

Lcor luz correa

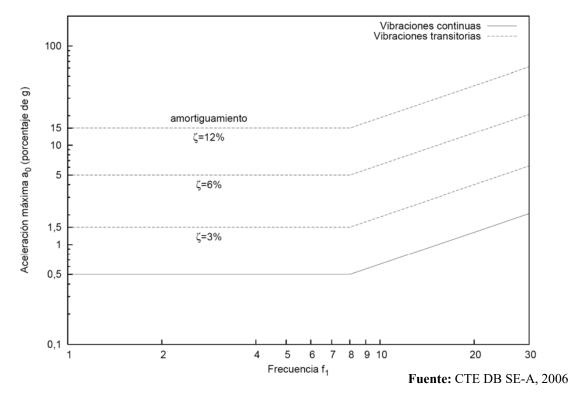
 b_{jac} ancho losa tributaria de la jácena ($b_{jac} = L_{cor}$)

Ljac luz jácena

• AMORTIGUAMIENTO

 El porcentaje de amortiguamiento ζ de un forjado depende del espesor y peso de la losa, presencia de elementos de protección contra incendios, instalaciones, falsos techos, revestimientos del suelo, mobiliario, tabiques, etc.
A falta de un análisis detallado pueden adoptarse los siguientes valores:

- Forjado solo (estructura) $\zeta = 3 \%$
- Forjado acabado (con instalaciones, falso techo, revestimiento, mobiliario) $\zeta = 6 \%$
- Forjado acabado con tabiques $\zeta = 12 \%$
- La verificación, en base a la percepción humana, del comportamiento frente a vibraciones transitorias de los forjados de edificios (viviendas, oficinas, enseñanza y comercial) se hace con la ayuda de la siguiente figura:



La frec. propia del 1^{er} modo de vibración y la aceler. máx. normalizada con *g* definen un punto. Si está por debajo del límite de aceptación, según el porcentaje de amortiguamiento, el forjado se considera apto para el servicio.