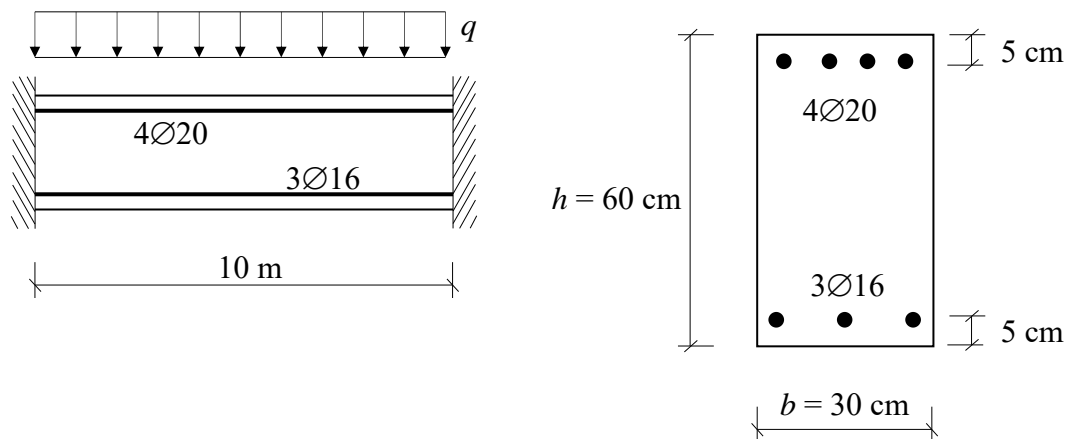


Ejercicio resuelto 1 (empleando la inercia bruta I_b)

La estructura de la figura está compuesta por una viga biempotrada de sección rectangular, situada bajo una azotea accesible privadamente, que soporta una sobrecarga de uso de valor $q = 15 \text{ kN/m}$ de la que se desconoce el instante de su aplicación. El hormigón tiene una resistencia de proyecto de 30 MPa (HA-30) y el acero utilizado es del tipo B 400 SD.

Se pide realizar la comprobación del estado límite de deformación.



En realidad, no sería necesario calcular la flecha debido a la pequeña esbeltez de la pieza:

$$\rho = \frac{A_s}{b_0 d} = \frac{3 \cdot \frac{\pi \cdot 16^2}{4}}{300 \cdot 550} = 0,0037 \Rightarrow \frac{L}{d} = \frac{10}{0,55} = 18,18 < 30$$

No obstante, vamos a calcular la deformación a modo de ejemplo.

*** FLECHA INSTANTÁNEA**

Combinación poco probable:

$$\sum_{j \geq 1} (\gamma_{G,j} G_{k,j} + \gamma_{G^*,j} G_{k,j}^*) + \gamma_{Q,1} Q_{k,1} + \sum_{i > 1} \gamma_{Q,i} \Psi_{0,i} Q_{k,i} = g + q$$

$$y_{inst} = \frac{(g + q)L^4}{384 E_c I_e}$$

$$g = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 25 = 4,5 \text{ kN/m}$$

$$q = \underline{\hspace{2cm}} 15 \text{ kN/m}$$

$$g + q = \hspace{2cm} 19,5 \text{ kN/m} = 19,5 \text{ N/mm}$$

$$L = 10 \text{ m} = 10.000 \text{ mm}$$

$$E_c = 8500 \sqrt[3]{f_{cm,j}} = 8500 \sqrt[3]{30+8} = 28577 \text{ N/mm}^2$$

Cálculo de I_e (Momento de inercia equivalente):

$$I_e = \left(\frac{M_f}{M_a} \right)^3 I_b + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right] I_f \leq I_b$$

$$M_f = \frac{f_{ct,m,fl} I_b}{y_1} = \frac{2,896 \cdot 5,4 \cdot 10^9}{300} = 52,128 \cdot 10^6 \text{ N mm}$$

La resistencia media a tracción $f_{ct,m} = 0,30 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,30 \cdot \sqrt[3]{30^2} = 2,896 \text{ MPa}$

La resistencia media a flexotracción ($f_{ct,m,fl}$):

$$f_{ct,m,fl} = \max[(1,6 - h / 1000) f_{ct,m}; f_{ct,m}] = \max[(1,6 - 600 / 1000) 2,896; 2,896] = 2,896 \text{ MPa}$$

$$y_1 = 300 \text{ mm}$$

$$I_b = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 300 \cdot 600^3 = 5400 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Sección de centro de vano:

$$M_a = \frac{(g + q)L^2}{24} = \frac{19,5 \cdot 10^2}{24} = 81,25 \text{ kN m} = 81,25 \cdot 10^6 \text{ N mm} > M_f$$

I_f Momento de inercia de la sección fisurada homogeneizada respecto de la fibra neutra

La profundidad de la fibra neutra x para una sección rectangular sometida a un momento flector es:

$$\frac{1}{2} b x^2 + n(A'_s + A_s)x - n(d' A'_s + d A_s) = 0$$

$$b = 300 \text{ mm}$$

$$n = 200000 / 28577 = 7$$

$$A'_s = 4\pi 20^2 / 4 = 1257 \text{ mm}^2$$

$$A_s = 3\pi 16^2 / 4 = 603 \text{ mm}^2$$

$$d' = 50 \text{ mm}$$

$$d = 550 \text{ mm}$$

$$150 x^2 + 13020 x - 2761500 = 0$$

$$x = 99,07 \text{ mm}$$

$$I_f = \frac{1}{3}bx^3 + nA_s(d-x)^2 + nA'_s(d'-x)^2 = 976,81 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Sustituyendo:

$$I_{ec} = 0,264I_b + 0,736I_f = 2145,47 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \leq I_b$$

Sección de apoyos:

$$M_a = \frac{(g+q)L^2}{12} = \frac{19,5 \cdot 10^2}{12} = 162,5 \text{ kN m} = 162,5 \cdot 10^6 \text{ N mm} > M_f$$

La profundidad de la fibra neutra es:

$$b = 300 \text{ mm}$$

$$n = 200000/28577 = 7$$

$$A_s = 4\pi 20^2/4 = 1257 \text{ mm}^2$$

$$A'_s = 3\pi 16^2/4 = 603 \text{ mm}^2$$

$$d' = 50 \text{ mm}$$

$$d = 550 \text{ mm}$$

$$150x^2 + 13020x - 5050500 = 0$$

$$x = 145,13 \text{ mm}$$

$$I_f = \frac{1}{3}bx^3 + nA_s(d-x)^2 + nA'_s(d'-x)^2 = 1785,53 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Sustituyendo:

$$I_{ee1} = I_{ee2} = 0,033I_b + 0,967I_f = 1904,90 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \leq I_b$$

Sección de referencia:

La inercia equivalente en la sección de referencia es:

$$I_e = 0,50I_{ec} + 0,25I_{ee1} + 0,25I_{ee2} = 2025,19 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Con lo que la flecha instantánea resulta:

$$y_{inst} = \frac{(g+q)L^4}{384E_cI_e} = \frac{19,5 \cdot 10000^4}{384 \cdot 28577 \cdot 2025,19 \cdot 10^6} = 8,77 \text{ mm}$$

* FLECHA DIFERIDA

Se emplea la combinación cuasipermanente al desconocer el historial de cargas:

$$\sum_{j \geq 1} (\gamma_{G,j} G_{k,j} + \gamma_{G^*,j} G_{k,j}^*) + \sum_{i \geq 1} \gamma_{Q,i} \Psi_{2,i} Q_{k,i} = g + 0,3q$$

siendo $\Psi_2 = 0,3$ para s.c. de uso en azoteas accesibles privadamente.

$$y_{dif} = \lambda y_{inst, g+0,3q}$$

La flecha instantánea debida a la combinación cuasipermanente, después de haber sido aplicada la carga total, se ha de calcular utilizando la misma I_e como menor inercia histórica.

Esta flecha instantánea se puede calcular, o bien aplicando de nuevo el procedimiento aunque esta vez empleando $g+0,3q$ en vez de $g+q$, o bien, al ser lineal la expresión de la flecha respecto a la carga uniformemente repartida, mediante la siguiente regla de tres:

$$y_{inst, g+0,3q} = \frac{g+0,3q}{g+q} y_{inst, g+q} = \frac{9,0}{19,5} \cdot 8,77 = 4,05 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{\xi}{1+50\rho'} = \frac{1,5}{1+50 \cdot 0,0076} = 1,09$$

$$\rho' = \frac{A'_s}{b_0 d} = \frac{1257}{300 \cdot 550} = 0,0076$$

$\xi = 2 - 0,5 = 1,5$ se considera un periodo de tiempo desde el descimbrado (~ 15 días) hasta tiempo ∞ ($t \geq 5$ años)

Con lo que la flecha diferida a más de 5 años resulta:

$$y_{dif} = 1,09 \cdot 4,05 = 4,41 \text{ mm}$$

* FLECHA TOTAL

$$y_{total} = y_{inst}(g+q) + y_{dif}(g+0,3q) = 8,77 + 4,41 = \underline{\underline{13,18 \text{ mm}}} < L/250 = 40 \text{ mm}$$

$$< L/500 + 1 \text{ cm} = 30 \text{ mm}$$

* COMPROBACIONES DE FLECHA

Integridad de los elementos constructivos:

Al tratarse de una azotea, no resulta necesario considerar la integridad de los elementos constructivos.

No obstante, a modo de ejemplo, si fuera necesario considerarla, habría que comprobar:

Flecha activa, en combinación característica, resto de casos $\leq L/300$

Se entiende por flecha activa de un elemento estructural en relación con otro no estructural, aquella producida en el primero a partir de la construcción del segundo.

En este caso, puede considerarse la flecha de las sobrecargas como flecha instantánea, en combinación característica (como sólo hay una sobrecarga, es ella misma):

$$y_{inst,q} = \frac{q}{g+q} y_{inst,g+q} = \frac{15}{19,5} \cdot 8,8 = 6,77 \text{ mm}$$

más la flecha diferida debida a la carga permanente a partir de la construcción del elemento no estructural (como en este caso se desconoce el historial de cargas, se adopta desde el descimbrado -aproximadamente a los 15 días-, y en combinación cuasipermanente):

$$y_{dif} = 4,41 \text{ mm}$$

$$y_{total} = y_{inst}(q) + y_{dif}(g+0,3q) = 6,77 + 4,41 = \underline{\underline{11,18 \text{ mm}}} < L/300 = 33,33 \text{ mm}$$

Confort de los usuarios:

Flecha debida a las acciones de corta duración (variables), en comb. característica $\leq L/350$

$$y_{inst,q} = \underline{\underline{6,77 \text{ mm}}} \leq L/350 = 28,57 \text{ mm}$$

Apariencia de la obra:

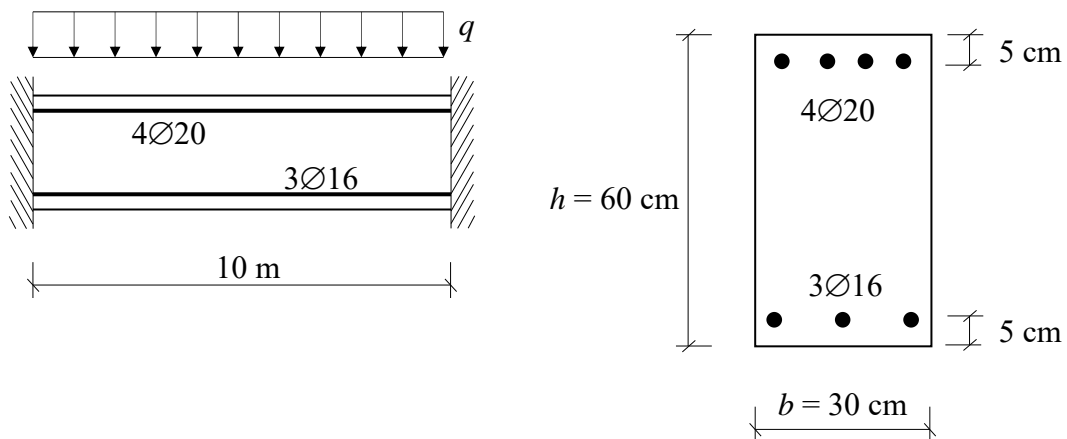
Flecha total, en combinación cuasipermanente $\leq L/300$

$$y_{total} = y_{inst}(g+0,3q) + y_{dif}(g+0,3q) = 4,05 + 4,41 = \underline{\underline{8,46 \text{ mm}}} < L/300 = 33,33 \text{ mm}$$

Ejercicio resuelto 1 (empleando la inercia bruta homogeneizada $I_{b,h}$)

La estructura de la figura está compuesta por una viga biempotrada de sección rectangular, situada bajo una azotea accesible privadamente, que soporta una sobrecarga de uso de valor $q = 15 \text{ kN/m}$ de la que se desconoce el momento de su aplicación. El hormigón tiene una resistencia de proyecto de 30 MPa (HA-30) y el acero utilizado es del tipo B 400 SD.

Se pide realizar la comprobación del estado límite de deformación.



En realidad, no sería necesario calcular la flecha debido a la pequeña esbeltez de la pieza:

$$\rho = \frac{A_s}{b_0 d} = \frac{3 \cdot \frac{\pi \cdot 16^2}{4}}{300 \cdot 550} = 0,0037 \Rightarrow \frac{L}{d} = \frac{10}{0,55} = 18,18 < 30$$

No obstante, vamos a calcular la deformación a modo de ejemplo.

*** FLECHA INSTANTÁNEA**

Combinación poco probable:

$$\sum_{j \geq 1} (\gamma_{G,j} G_{k,j} + \gamma_{G^*,j} G_{k,j}^*) + \gamma_{Q,1} Q_{k,1} + \sum_{i > 1} \gamma_{Q,i} \Psi_{0,i} Q_{k,i} = g + q$$

$$y_{inst} = \frac{(g + q)L^4}{384 E_c I_e}$$

$$g = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 25 = 4,5 \text{ kN/m}$$

$$q = \underline{\hspace{2cm}} 15 \text{ kN/m}$$

$$g + q = \hspace{2cm} 19,5 \text{ kN/m} = 19,5 \text{ N/mm}$$

$$L = 10 \text{ m} = 10.000 \text{ mm}$$

$$E_c = 8500 \sqrt[3]{f_{cm,j}} = 8500 \sqrt[3]{30+8} = 28577 \text{ N/mm}^2$$

Cálculo de I_e (Momento de inercia equivalente):

$$I_e = \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 I_b + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3\right] I_f \leq I_b$$

$$M_f = \frac{f_{ct,m,fl} I_{b,h}}{y_1} = \frac{2,896 \cdot 6,2 \cdot 10^9}{300} = 59,851 \cdot 10^6 \text{ N mm}$$

La resistencia media a tracción $f_{ct,m} = 0,30 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,30 \cdot \sqrt[3]{30^2} = 2,896 \text{ MPa}$

La resistencia media a flexotracción ($f_{ct,m,fl}$):

$$f_{ct,m,fl} = \max\left[\left(1,6 - \frac{h}{1000}\right) f_{ct,m}; f_{ct,m}\right] = \max\left[\left(1,6 - \frac{600}{1000}\right) 2,896; 2,896\right] = 2,896 \text{ MPa}$$

$$y_1 = 300 \text{ mm}$$

$$I_{b,h} = \frac{1}{12} b h^3 + n A_s \left(\frac{h}{2} - d'\right)^2 + n A'_s \left(\frac{h}{2} - d'\right)^2 = 6213,52 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Sección de centro de vano:

$$M_a = \frac{(g+q)L^2}{24} = \frac{19,5 \cdot 10^2}{24} = 81,25 \text{ kN m} = 81,25 \cdot 10^6 \text{ N mm} > M_f$$

I_f Momento de inercia de la sección fisurada homogeneizada respecto de la fibra neutra

La profundidad de la fibra neutra x para una sección rectangular sometida a un momento flector es:

$$\frac{1}{2} b x^2 + n(A'_s + A_s)x - n(d' A'_s + d A_s) = 0$$

$$b = 300 \text{ mm}$$

$$n = 200000/28577 = 7$$

$$A'_s = 4\pi 20^2/4 = 1257 \text{ mm}^2$$

$$A_s = 3\pi 16^2/4 = 603 \text{ mm}^2$$

$$d' = 50 \text{ mm}$$

$$d = 550 \text{ mm}$$

$$150 x^2 + 13020 x - 2761500 = 0$$

$$x = 99,07 \text{ mm}$$

$$I_f = \frac{1}{3}bx^3 + nA_s(d-x)^2 + nA'_s(d'-x)^2 = 976,81 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Sustituyendo:

$$I_{ec} = 0,403I_{b,h} + 0,597I_f = 3084,68 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \leq I_{b,h}$$

Sección de apoyos:

$$M_a = \frac{(g+q)L^2}{12} = \frac{19,5 \cdot 10^2}{12} = 162,5 \text{ kN m} = 162,5 \cdot 10^6 \text{ N mm} > M_f$$

La profundidad de la fibra neutra es:

$$b = 300 \text{ mm}$$

$$n = 200000/28577 = 7$$

$$A_s = 4\pi 20^2/4 = 1257 \text{ mm}^2$$

$$A'_s = 3\pi 16^2/4 = 603 \text{ mm}^2$$

$$d' = 50 \text{ mm}$$

$$d = 550 \text{ mm}$$

$$150x^2 + 13020x - 5050500 = 0$$

$$x = 145,13 \text{ mm}$$

$$I_f = \frac{1}{3}bx^3 + nA_s(d-x)^2 + nA'_s(d'-x)^2 = 1785,53 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Sustituyendo:

$$I_{ee1} = I_{ee2} = 0,050I_{b,h} + 0,950I_f = 2008,32 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \leq I_b$$

Sección de referencia:

La inercia equivalente en la sección de referencia es:

$$I_e = 0,50I_{ec} + 0,25I_{ee1} + 0,25I_{ee2} = 2546,50 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Con lo que la flecha instantánea resulta:

$$y_{inst} = \frac{(g+q)L^4}{384E_cI_e} = \frac{19,5 \cdot 10000^4}{384 \cdot 28577 \cdot 2546,50 \cdot 10^6} = 6,98 \text{ mm}$$

* FLECHA DIFERIDA

Se emplea la combinación cuasipermanente al desconocer el historial de cargas:

$$\sum_{j \geq 1} (\gamma_{G,j} G_{k,j} + \gamma_{G^*,j} G_{k,j}^*) + \sum_{i \geq 1} \gamma_{Q,i} \Psi_{2,i} Q_{k,i} = g + 0,3q$$

siendo $\Psi_2 = 0,3$ para s.c. de uso en azoteas accesibles privadamente.

$$y_{dif} = \lambda y_{inst, g+0,3q}$$

La flecha instantánea debida a la combinación cuasipermanente, después de haber sido aplicada la carga total, se ha de calcular utilizando la misma I_e como menor inercia histórica.

Esta flecha instantánea se puede calcular, o bien aplicando de nuevo el procedimiento aunque esta vez empleando $g+0,3q$ en vez de $g+q$, o bien, al ser lineal la expresión de la flecha respecto a la carga uniformemente repartida, mediante la siguiente regla de tres:

$$y_{inst, g+0,3q} = \frac{g + 0,3q}{g + q} y_{inst, g+q} = \frac{9,0}{19,5} \cdot 6,98 = 3,22 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'} = \frac{1,5}{1 + 50 \cdot 0,0076} = 1,09$$

$$\rho' = \frac{A'_s}{b_0 d} = \frac{1257}{300 \cdot 550} = 0,0076$$

$\xi = 2 - 0,5 = 1,5$ se considera un periodo de tiempo desde el descimbrado (~ 15 días) hasta tiempo ∞ ($t \geq 5$ años)

Con lo que la flecha diferida a más de 5 años resulta:

$$y_{dif} = 1,09 \cdot 3,22 = 3,51 \text{ mm}$$

* FLECHA TOTAL

$$y_{total} = y_{inst}(g+q) + y_{dif}(g+0,3q) = 6,98 + 3,51 = \underline{\underline{10,49 \text{ mm}}} < L/250 = 40 \text{ mm} \quad (\downarrow 20 \%)$$

$$< L/500 + 1 \text{ cm} = 30 \text{ mm}$$

* COMPROBACIONES DE FLECHA

Integridad de los elementos constructivos:

Al tratarse de una azotea, no resulta necesario considerar la integridad de los elementos constructivos.

No obstante, a modo de ejemplo, si fuera necesario considerarla, habría que comprobar:

Flecha activa, en combinación característica, resto de casos $\leq L/300$

Se entiende por flecha activa de un elemento estructural en relación con otro no estructural, aquella producida en el primero a partir de la construcción del segundo.

En este caso, puede considerarse la flecha de las sobrecargas como flecha instantánea, en combinación característica (como sólo hay una sobrecarga, es ella misma):

$$y_{inst,q} = \frac{q}{g+q} y_{inst,g+q} = \frac{15}{19,5} \cdot 6,98 = 5,37 \text{ mm}$$

más la flecha diferida debida a la carga permanente a partir de la construcción del elemento no estructural (como en este caso se desconoce el historial de cargas, se adopta desde el descimbrado -aproximadamente a los 15 días-, y en combinación cuasipermanente):

$$y_{dif} = 3,51 \text{ mm}$$

$$y_{total} = y_{inst}(q) + y_{dif}(g+0,3q) = 5,37 + 3,51 = \underline{\underline{8,88 \text{ mm}}} < L/300 = 33,33 \text{ mm} \quad (\downarrow 21 \%)$$

Confort de los usuarios:

Flecha debida a las acciones de corta duración (variables), en comb. característica $\leq L/350$

$$y_{inst,q} = \underline{\underline{5,37 \text{ mm}}} \leq L/350 = 28,57 \text{ mm} \quad (\downarrow 21 \%)$$

Apariencia de la obra:

Flecha total, en combinación cuasipermanente $\leq L/300$

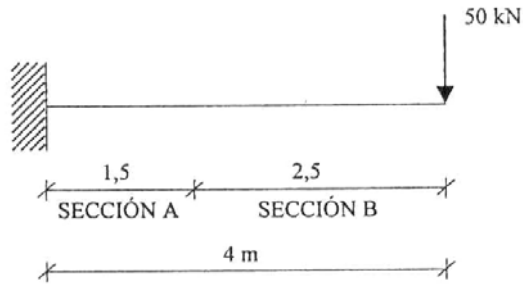
$$y_{total} = y_{inst}(g+0,3q) + y_{dif}(g+0,3q) = 3,22 + 3,51 = \underline{\underline{6,73 \text{ mm}}} < L/300 = 33,33 \text{ mm} \quad (\downarrow 20 \%)$$

Ejercicio resuelto 2

Un segundo ejemplo de cálculo de flechas en una viga biapoyada se desarrolla en las clases prácticas de ejercicios de la asignatura.

Ejercicio 1. ELS de Deformación.

Se desea conocer la flecha total resultante a los 12 meses en el extremo del voladizo de la figura, sabiendo que se descimbró al mes y que la carga puntual comenzó a actuar a los 3 meses de forma permanente. Comprobar también si a los 12 meses cumple con el ELS de Deformación de la EHE-08.

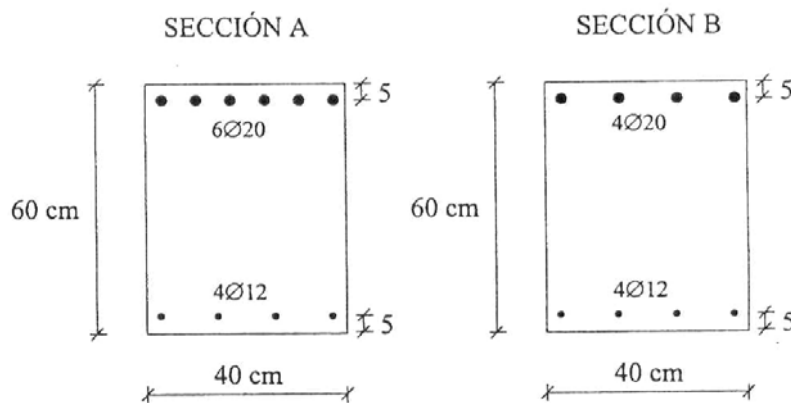


Flecha para carga puntual p :

$$y = \frac{pL^3}{3EI}$$

Flecha para carga uniforme q :

$$y = \frac{qL^4}{8EI}$$



Fuente: Martí *et al*, 2000

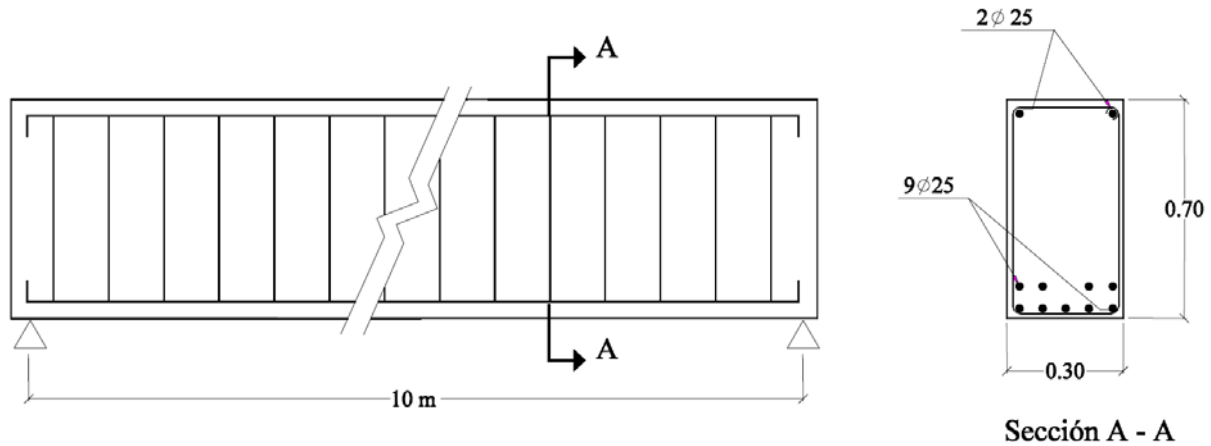
Datos:

- $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$
- $f_{yk} = 400 \text{ MPa}$
- Peso específico del hormigón armado 25 kN/m^3
- Se recomienda ir obteniendo las distintas flechas siguiendo el historial de cargas dado, y teniendo en cuenta que hay dos cargas distintas (una puntual y otra repartida).

Ejercicio 2. ELS de Deformación.

Sea una viga de hormigón armado simplemente apoyada de 10 m de luz, con sección transversal rectangular de 30 cm de ancho por 70 de canto. El hormigón es HA-25/P/12/IIIb y el acero de armaduras es B 500 S.

La disposición de armaduras en la sección central es la que se indica en la figura.



Se consideran las siguientes cargas actuando en la secuencia indicada:

- peso propio a los 28 días
- carga permanente de 2 kN/m a los 90 días
- sobrecarga de uso, constituida por una carga uniformemente distribuida de 4 kN/m y una carga puntual móvil de 40 kN en cualquier instante a partir de los 90 días.

Fuente:
Marí *et al*, 1999

Se pide:

1. Comprobar el estado límite de fisuración en la sección central y, en caso de que éste no se satisfaga proponer soluciones.
2. Verificar la necesidad de comprobar el estado límite de deformación según los criterios establecidos por la Instrucción EHE.
3. Calcular la flecha instantánea en el centro de la viga debida a cada una de las cargas actuantes.
4. Calcular la flecha diferida debida a cargas permanentes, la flecha total y la activa.

Nota 1: Se utilizarán los coeficientes de fluencia y retracción propuestos en la instrucción EHE, considerando una humedad relativa del 70 %. Para las combinaciones de acciones, en la comprobación de los distintos ELS, se utilizarán los siguientes coeficientes γ y ψ :

$$\gamma_{G,j} = 1,0 \quad \gamma_{Q,1} = 1,0 \quad \psi_{0,1} = 0,7 \quad \psi_{1,1} = 0,5 \quad \psi_{2,1} = 0,3$$

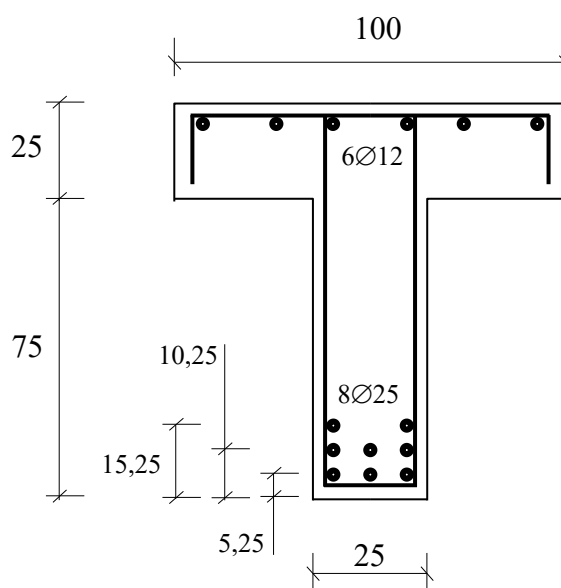
Nota 2: Adoptar un recubrimiento geométrico de 30 mm para la 1ª fila de armaduras, y una separación para la 2ª fila respecto a la 1ª de un diámetro \varnothing entre caras.

Ejercicio 3. Combinación de acciones. ELS de Fisuración. ELS de Deformación.

La sección de la figura corresponde a la sección transversal de centro-luz de una pieza biapoyada de 15 m de luz, fabricada con hormigón HA-35, acero B 500 S y un recubrimiento de 4 cm. El control de calidad de la ejecución es intenso y los materiales cuentan con distintivo de calidad oficialmente reconocido.

Las acciones que actúan sobre la pieza son: peso propio, carga muerta, sobrecarga, viento y sismo. La tabla siguiente resume los valores más desfavorables del esfuerzo flector correspondiente a la actuación de cada una de las acciones citadas, en valores característicos y en kN m.

ACCIÓN	$M_{m\acute{a}x}$	$M_{m\acute{i}n}$
Peso propio	300	300
Carga muerta	200	200
Sobrecarga	350	350
Viento	100	-100
Sismo	150	-150



Cotas en cm

Se pide:

- Determinar los esfuerzos flectores máximo y mínimo de servicio y de cálculo.
- Determinar el ancho de la abertura característica de fisura y verificar si cumple el E.L. de fisuración suponiendo la estructura en ambiente IIIa.
- Calcular la flecha total.