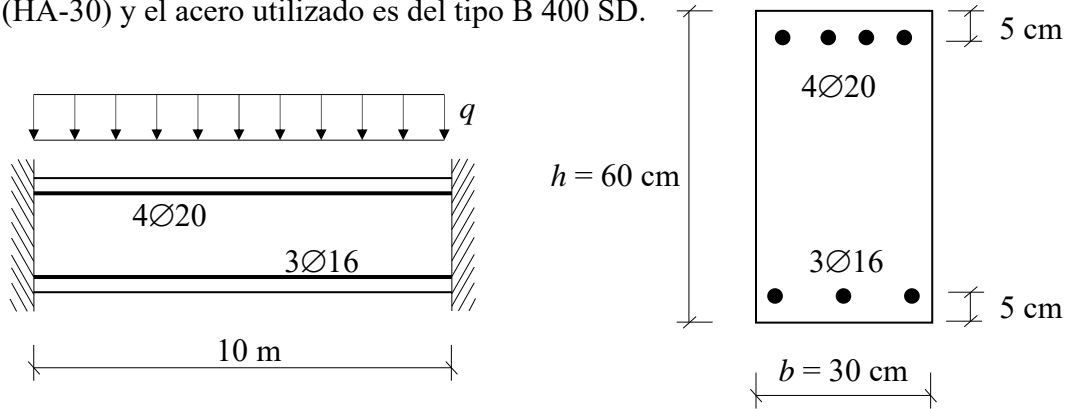


**Ejercicio resuelto 1**

La estructura de la figura, está compuesta por una viga biempotrada de sección rectangular soportando una carga permanente uniformemente distribuida de valor  $q = 15 \text{ kN/m}$ . La viga está expuesta a un ambiente de tipo IIa. El hormigón tiene una resistencia de proyecto de 30 MPa (HA-30) y el acero utilizado es del tipo B 400 SD.



Se pide realizar la comprobación del ELS de fisuración en los siguientes casos:

- 1) Utilizando un método simplificado para el cálculo de  $\sigma_s$  y  $\sigma_{sr}$
- 2) Utilizando el método general para el cálculo de  $\sigma_s$  y  $\sigma_{sr}$

**• CASO 1. SECCIÓN CENTRO-LUZ**

**\* SEPARACIÓN MEDIA DE FISURAS**

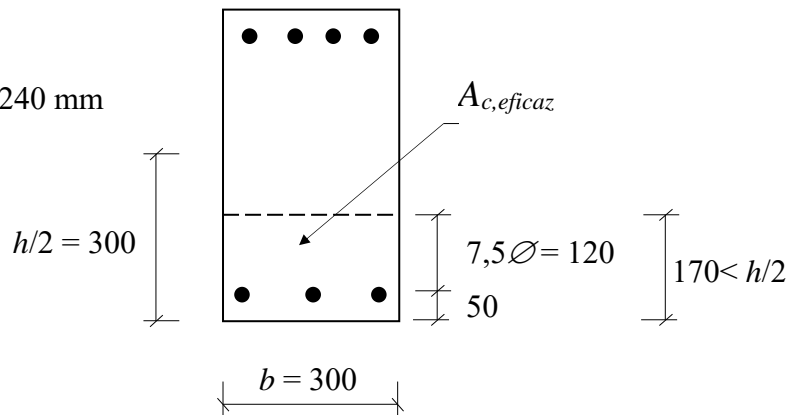
$$S_m = 2c + 0,2s + 0,4k_1 \frac{\varnothing A_{c,eficaz}}{A_s}$$

$c = 50 - \varnothing/2 = 50 - 16/2 = 42 \text{ mm}$

$s = b/n = 300/3 = 100 \text{ mm} < 15\varnothing = 240 \text{ mm}$

$k_1 = 0,125$  (flexión simple)

$\varnothing = 16 \text{ mm}$



$A_{c,eficaz} = 300 \cdot 170 = 51.000 \text{ mm}^2$

$A_s = 3(\pi 16^2/4) = 603 \text{ mm}^2$

Sustituyendo:  $S_m = 171,7 \text{ mm}$

### \* ALARGAMIENTO MEDIO DE LAS ARMADURAS

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[ 1 - k_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \geq 0,4 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

El momento de servicio en centro-luz:

$$g = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 25 = 4,5 \text{ kN/m}$$

$$q = 15 \text{ kN/m}$$

$$g + q = 19,5 \text{ kN/m}$$

$$M = \frac{(g + q)L^2}{24} = \frac{19,5 \cdot 10^2}{24} = 81,25 \text{ kN m} = 81,25 \cdot 10^6 \text{ N mm}$$

$$\sigma_s = \frac{M}{0,8dA_s} = \frac{81,25 \cdot 10^6}{0,8(55 \cdot 10)(6,03 \cdot 10^2)} = 306,23 \text{ MPa}$$

$$E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$k_2 = 0,5$$

La resistencia media a tracción ( $f_{ct,m}$ ):

$$f_{ct,m} = 0,30 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,30 \cdot \sqrt[3]{30^2} = 2,896 \text{ MPa}$$

La resistencia media a flexotracción ( $f_{ct,m,fl}$ ):

$$f_{ct,m,fl} = \max \left[ (1,6 - h/1000) f_{ct,m}; f_{ct,m} \right] = \max \left[ (1,6 - 600/1000) 2,896; 2,896 \right] = 2,896 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{sr} = \frac{f_{ct,m,fl} b h^2}{4,8 d A_s} = \frac{2,896 \cdot 300 \cdot 600^2}{4,8 \cdot 550 \cdot 603} = 196,47 \text{ MPa}$$

Sustituyendo:

$$\varepsilon_{sm} = 1,216 \cdot 10^{-3} > 0,612 \cdot 10^{-3}$$

La abertura característica de fisura resulta, pues:

$$W_k = 1,7 S_m \varepsilon_{sm} = 1,7 \cdot 171,7 \cdot 1,216 \cdot 10^{-3} = 0,35 \text{ mm} > 0,3 \text{ mm}$$

⇒ Sección NO VÁLIDA en exposición ambiental IIa

## • CASO 1. SECCIÓN EMPOTRAMIENTO

### \* SEPARACIÓN MEDIA DE FISURAS

$$S_m = 2c + 0,2s + 0,4k_1 \frac{\varnothing A_{c,eficaz}}{A_s}$$

$$c = 5 - \varnothing/2 = 50 - 20/2 = 40 \text{ mm}$$

$$s = b/n = 300/4 = 75 \text{ mm} < 15\varnothing \quad h/2 = 300$$

$$k_1 = 0,125 \text{ (flexión simple)}$$

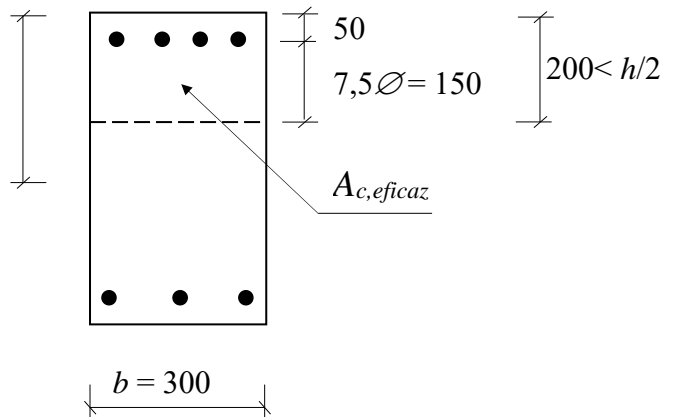
$$\varnothing = 20 \text{ mm}$$

$$A_{c,eficaz} = 300 \cdot 200 = 60.000 \text{ mm}^2$$

$$A_s = 4(\pi 20^2/4) = 1257 \text{ mm}^2$$

Sustituyendo:

$$S_m = 142,7 \text{ mm}$$



**\* ALARGAMIENTO MEDIO DE LAS ARMADURAS**

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[ 1 - k_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \geq 0,4 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

El momento de servicio en empotramiento:

$$M = \frac{(g + q)L^2}{12} = \frac{19,5 \cdot 10^2}{12} = 162,5 \text{ kN m} = 162,5 \cdot 10^6 \text{ N mm}$$

$$\sigma_s = \frac{M}{0,8dA_s} = \frac{162,5 \cdot 10^6}{0,8 \cdot (55 \cdot 10) \cdot (4\pi \cdot 10^2)} = 293,89 \text{ MPa}$$

$$E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$k_2 = 0,5$$

$$\sigma_{sr} = \frac{f_{ct,m,fl}bh^2}{4,8dA_s} = \frac{2,896 \cdot 300 \cdot 600^2}{4,8 \cdot 550 \cdot 1256,637} = 94,278 \text{ MPa}$$

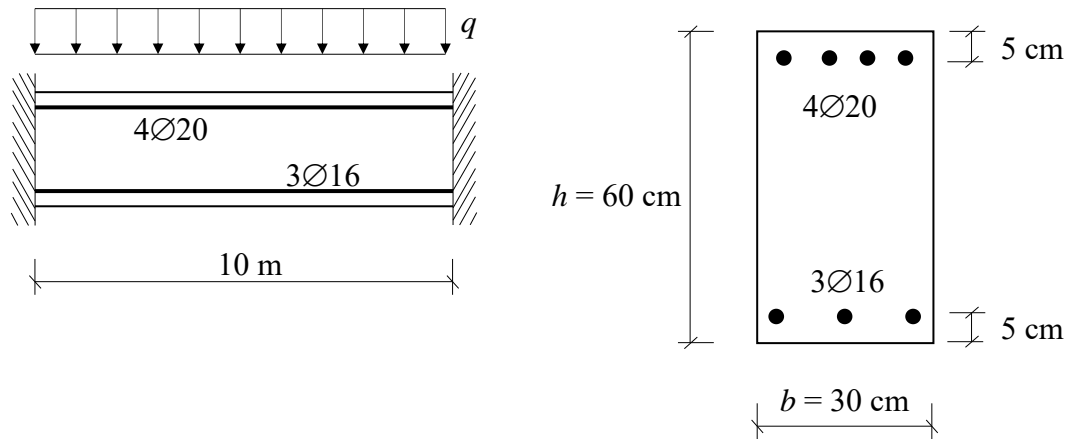
Sustituyendo:

$$\varepsilon_{sm} = 1,394 \cdot 10^{-3} > 0,588 \cdot 10^{-3}$$

La abertura característica de fisura resulta, pues:

$$W_k = 1,7S_m\varepsilon_{sm} = 1,7 \cdot 142,7 \cdot 1,394 \cdot 10^{-3} = 0,34 \text{ mm} > 0,3 \text{ mm}$$

⇒ Sección NO VÁLIDA en exposición ambiental IIa



• **CASO 2. SECCIÓN CENTRO-LUZ**

\* **SEPARACIÓN MEDIA DE FISURAS**

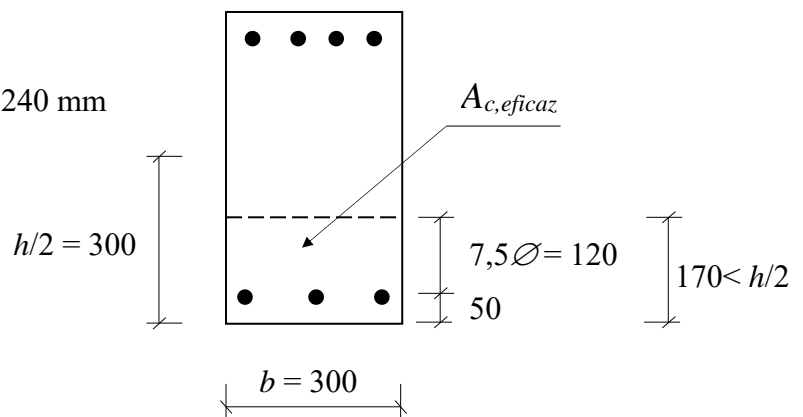
$$S_m = 2c + 0,2s + 0,4k_1 \frac{\varnothing A_{c,eficaz}}{A_s}$$

$$c = 50 - \varnothing/2 = 50 - 16/2 = 42 \text{ mm}$$

$$s = b/n = 300/3 = 100 \text{ mm} < 15\varnothing = 240 \text{ mm}$$

$$k_1 = 0,125 \text{ (flexión simple)}$$

$$\varnothing = 16 \text{ mm}$$



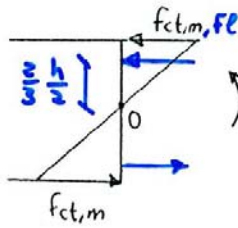
$$A_{c,eficaz} = 300 \cdot 170 = 51.000 \text{ mm}^2$$

$$A_s = 3(\pi 16^2/4) = 603 \text{ mm}^2$$

Sustituyendo:

$$S_m = 171,7 \text{ mm}$$

Obtención de  $\sigma_{sr}$



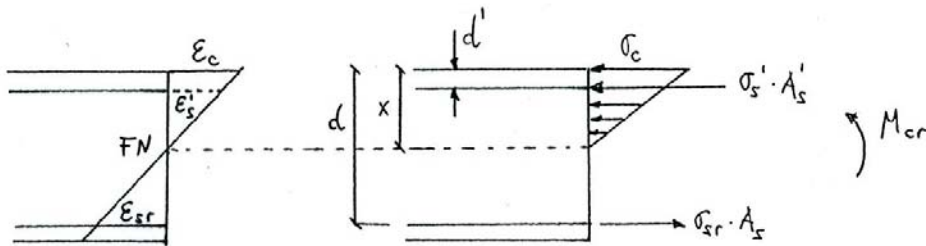
El momento crítico que produce la fisuración será (simplificadamente)

Tomando  $\sum M_0 = 0$

$$M_{cr} = z \left( \frac{1}{2} \cdot f_{ct,m} \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{2}{3} \frac{h}{2} \right) = f_{ct,m} \cdot \frac{bh^2}{6} = 2'896 \cdot \frac{300 \cdot 600^2}{6} = 52'14 \text{ m.kN}$$

$$f_{ct,m} = 0.3 \sqrt[3]{30^2} = 2'896 \text{ N/mm}^2$$

Planteemos ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones en el momento de la fisuración:



Equilibrio:

$$\sum F = 0 \quad \frac{1}{2} \sigma_c b x + \sigma'_s A'_s - \sigma_{sr} A_s = 0 \quad (1)$$

$$\sum M = 0 \quad M_{cr} = \sigma_{sr} \cdot A_s \cdot (d - d') + \frac{1}{2} \sigma_c b x \left( d' - \frac{x}{3} \right) \quad (2)$$

Deformaciones:

Por relación de triángulos  $\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon'_s}{x - d'} = \frac{\epsilon_{sr}}{d - x}$

$$\epsilon_c = \frac{x}{d - x} \epsilon_{sr} \rightarrow \underline{\underline{\sigma_c}} = E_c \frac{x}{d - x} \epsilon_{sr} = E_c \frac{x}{d - x} \frac{\sigma_{sr}}{E_s} = \frac{1}{n} \frac{x}{d - x} \sigma_{sr}$$

$$\epsilon'_s = \frac{x - d'}{d - x} \epsilon_{sr} \rightarrow \underline{\underline{\sigma'_s}} = E_s \frac{x - d'}{d - x} \epsilon_{sr} = E_s \frac{x - d'}{d - x} \frac{\sigma_{sr}}{E_s} = \frac{x - d'}{d - x} \sigma_{sr}$$

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

$$n = \frac{2 \cdot 10^5}{8500 \sqrt[3]{30+8}} = 7$$

Sustituyendo en (1) y reorganizando términos obtenemos una ecuación de 2º grado cuya incógnita es la profundidad de la fibra neutra (x):

$$\frac{1}{2} b x^2 + n(A'_s + A_s)x - n(d'A'_s + dA_s) = 0$$

Sustituyendo en (2) obtenemos la expresión de  $\sigma_{sr}$  en función de x:

$$\sigma_{sr} = \frac{M_{cr}}{A_s(d-d') + \frac{b x^2}{2n(d-x)} \left(d' - \frac{x}{3}\right)}$$

CALCULOS

Cálculo de la profundidad de la fibra neutra

$$\left. \begin{array}{l} b=30 \\ n=7 \\ A_s=6'03 \\ A'_s=4 \cdot \pi = 12'57 \\ d=55 \\ d'=5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 15x^2 + 7 \cdot (12'57 + 6'03)x - 7 \cdot (5 \cdot 12'57 + 55 \cdot 6'03) = 0 \\ \\ \underline{X = 9'91 \text{ cm}} \end{array}$$

Cálculo de la tensión en la armadura:

$$\sigma_{sr} = \frac{5'214 \cdot 10^5}{6'03(55-5) + \frac{30 \cdot 9'91^2}{2 \cdot 7 \cdot (55-9'91)} \cdot \left(5 - \frac{9'91}{3}\right)} = 1685'1 \text{ Kp/cm}^2 \quad (168'45 \text{ MPa})$$

$$M = \frac{qL^2}{24} = \frac{(7+g) \cdot L^2}{24} = \left\{ \begin{array}{l} q = 0'3 \cdot 0'6 \cdot 2'5 = 0'45 \text{ t/m} \\ q = 1'5 \text{ t/m} \end{array} \right\} = \frac{1'95 \cdot 10^2}{24} = 8'125 \text{ mt}$$

$$\sigma_s = \frac{M}{M_{cr}} \sigma_{sr} = \frac{8'125}{5'214} \cdot 1685'1 = 2625'9 \text{ Kp/cm}^2 \quad (262'51 \text{ MPa})$$

↳ Al no haber axil, existe proporcionalidad entre tensiones y m. flectores

Cálculo de la deformación del acero:

$$\epsilon_{sm} = \frac{2625'9}{2 \cdot 10^6} \left[ 1 - 0'5 \left( \frac{1685'1}{2625'9} \right)^2 \right] = 1'0426 \cdot 10^{-3}$$

$(1'042 \cdot 10^{-3})$

Por tanto

$$W_k = 1'7 \cdot 17'17 \cdot 1'0426 \cdot 10^{-3} = 0'30 \text{ mm}$$

$(0'30 \text{ mm})$

\* EN EMPOTRAMIENTO

$c = 4 \text{ cm}$   
 $s = 7'5 \text{ cm}$   
 $k_1 = 0'125$   
 $k_2 = 0'5$   
 $A_{c,ef} = 30(5 + 7'5 \cdot 2) = 600 \text{ cm}^2$   
 $\rightarrow A_c = 4\pi = 12'57 \text{ cm}^2$   
 $\phi = 2 \text{ cm}$   
 $M_{cr} = 5'214 \text{ m.t}$   
 $b = 30 \text{ cm}$   
 $h = 7$   
 $A_s = 6'03 \text{ cm}^2$   
 $d = 55 \text{ cm}$   
 $d' = 5 \text{ cm}$   
 $\rightarrow M = \frac{1'95 \cdot 10^2}{12} = 16'25 \text{ m.t}$

$$S_m = 2 \cdot 4 + 0'2 \cdot 7'5 + 0'4 \cdot 0'125 \cdot \frac{2 \cdot 600}{12'57} = 8 + 1'5 + 4'77 = 14'27 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{2} 30x^2 + 7(12'57 + 6'03)x - 7(55 \cdot 12'57 + 5 \cdot 6'03) = 0$$

$$x = 14'516 \text{ cm } (142'75 \text{ mm})$$

$$\sigma_{sr} = \frac{5'214 \cdot 10^5}{12'57(55-5) + \frac{30 \cdot 14'516}{2 \cdot 7 \cdot (55 \cdot 14'516)} \left( 5 - \frac{14'516}{3} \right)} = 829'43 \text{ Kp/cm}^2$$

$(82'74 \text{ MPa})$

$$\sigma_s = \frac{16'25}{5'214} \cdot 829'43 = 2585 \text{ Kp/cm}^2 (257'88 \text{ MPa})$$

$$\epsilon_{sm} = \frac{2585}{2'1 \cdot 10^6} \left[ 1 - 0'5 \left( \frac{829'43}{2585} \right)^2 \right] = 1'1676 \cdot 10^{-3}$$

$\hookrightarrow 200.000 \text{ MPa}$

$(1'223 \cdot 10^{-3})$

$$W_k = 1'7 \cdot 142'7 \cdot 1'1676 \cdot 10^{-3} = 0'28 \text{ mm}$$

$(0'30 \text{ mm})$

Ambas secciones son válidas en exposición ambiental IIa,  
 pues presentan  $W_k \leq 0'3 \text{ mm}$

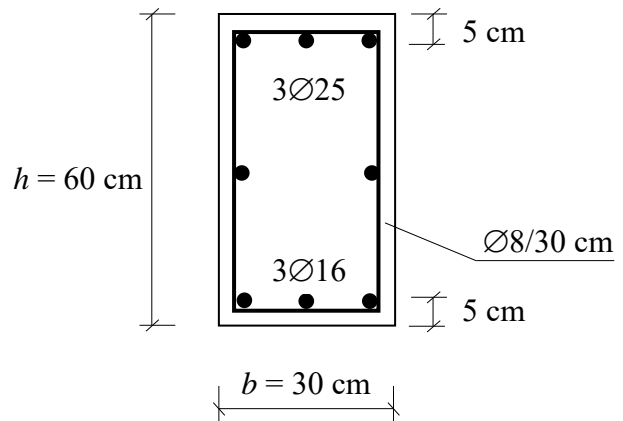
Comprobación del ELS de fisuración por compresión:

Centro-luz  $\sigma_c = M \cdot x / I_f = 8,24 \text{ MPa} < 0,60f_{ck} = 18 \text{ MPa}$

Empotramiento  $\sigma_c = M \cdot x / I_f = 13,21 \text{ MPa} < 0,60f_{ck} = 18 \text{ MPa}$



Si en vez de la sección del enunciado,  
se hubiera empleado la sección resultante  
del problema de cortante (teniendo en cuenta  
la regla del decalaje), se obtendría:



**Sección centro-luz (ídem en tracción):**

- EHE-98 (simplificado):  $W_k = 0,35 \text{ mm} > 0,30 \text{ mm} \Rightarrow$  No válido para exposición IIa
- EHE-08 (más riguroso):  $W_k = 0,30 \text{ mm} \leq 0,30 \text{ mm} \Rightarrow$  Válido para exposición IIa

$$\sigma_c = 8,07 \text{ MPa} < 0,60f_{ck} = 18 \text{ MPa}$$

**Sección de empotramiento:**

- EHE-98 (simplificado):  $S_m = 155,48 \text{ mm}$  ;  $\sigma_{sr} = 80,46 \text{ MPa}$  ;  $\sigma_s = 250,79 \text{ MPa}$   
 $\varepsilon_{sm} = 1,189 \cdot 10^{-3}$  ;  $W_k = 0,31 \text{ mm} > 0,30 \text{ mm} \Rightarrow$  No válido
- EHE-08 (más riguroso):  $S_m = 155,48 \text{ mm}$  ;  $\sigma_{sr} = 71,04 \text{ MPa}$  ;  $\sigma_s = 221,40 \text{ MPa}$   
 $\varepsilon_{sm} = 1,050 \cdot 10^{-3}$  ;  $W_k = 0,28 \text{ mm} \leq 0,30 \text{ mm} \Rightarrow$  Válido  
 $\sigma_c = 12,46 \text{ MPa} < 0,60f_{ck} = 18 \text{ MPa}$

## **Ejercicio resuelto 2**

Un segundo ejemplo de cálculo de la abertura de fisura en una viga biapoyada se desarrolla en las clases prácticas de ejercicios de la asignatura.