

## LECCIÓN 12

# ESTADO LÍMITE DE SERVICIO DE DEFORMACIÓN Y DE VIBRACIONES

(Art. 50 y 51 EHE-08)

1. INTRODUCCIÓN
2. ESTADO LÍMITE DE DEFORMACIÓN
3. ELEMENTOS SOLICITADOS A FLEXIÓN SIMPLE O COMPUESTA
  - 3.1. LIMITACIONES DE FLECHAS
  - 3.2. CÁLCULO DE FLECHAS: MÉTODO GENERAL
  - 3.3. CÁLCULO DE FLECHAS: MÉTODO SIMPLIFICADO
  - 3.4. MÉTODO PROPUESTO EN LA EHE-08
  - 3.5. EVOLUCIÓN DE LAS FLECHAS EN FUNCIÓN DEL HISTORIAL DE CARGAS
4. ELEMENTOS SOLICITADOS A TORSIÓN
5. ELEMENTOS SOLICITADOS A TRACCIÓN PURA
6. ESTADO LÍMITE DE VIBRACIONES

# 1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Materiales de mayores prestaciones} \\ \text{Evolución método cálculo (en rotura)} \\ \text{Cambio tipología secciones (v. planas)} \\ \text{Reducción coef. seg. acciones} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \text{Luces} \\ \downarrow \text{Inercias} \end{array} \right\} \Rightarrow \uparrow \text{Flechas} \left( f = K \cdot \frac{M \cdot L^2}{E \cdot I} \right)$$

Datos (Martín D, González E, HyA, 2010):

Vigas de canto  $\rightarrow$  Vigas planas  $\Rightarrow$   $\downarrow$ 60 % rigidez

V.canto+Mat. y Coef. antiguos  $\rightarrow$  V.plana+Mat. y Coef. actuales  $\Rightarrow$   $\downarrow$ 30% rig.

Hemos de controlar la deformación por 3 motivos:

- *Funcionalidad*
- *Apariencia* (alarma social)
- *Durabilidad* (agresiones ambientales a las armaduras)

Ejemplos:

- Limitar flecha en un **voladizo** (efectos visuales extraños)
- Evitar **vibraciones** excesivas (sensación de inseguridad y sonidos)
- Mantener un **gálibo** prescrito
- Garantizar cierta **rigidez del forjado** (máquinas/instrumentos de precisión)
- Necesidad de **pisos planos** (gimnasios) o con cierta **inclinación** (drenaje)
- Limitar y evitar daños en **elementos no estructurales** (tabiquería)
- Evitar la **fisuración** excesiva (durabilidad)
- Evitar inadecuado funcionamiento de **elementos móviles** (puertas/ventanas)
- Impedir **comportamiento estructural** distinto del previsto (inestabilidad de arcos/láminas/columnas; flechas/rotaciones excesivas; flechas que aumenten esfuerzos de efectos dinámicos -vibraciones resonantes por cargas móviles-)

## 2. ESTADO LÍMITE DE DEFORMACIÓN

Se satisface si los movimientos (flechas o giros) en la estructura o elemento estructural son menores que unos valores límites máximos

### ➤ **Comprobación obligatoria cuando:**

Las deformaciones puedan ocasionar la puesta fuera de servicio de la estructura por razones funcionales, estéticas u otras

### ● **Flexión simple o compuesta (flecha)**

✓ **Método general:** análisis estructural paso a paso en el tiempo, en el que, para cada instante, las deformaciones se obtienen mediante doble integración de las curvaturas a lo largo de la pieza

✓ **Método simplificado:** en vigas, losas y forjados unidireccionales.  
Flecha = flecha instantánea + flecha diferida (debida a cargas perman.)

Las limitaciones de flecha se establecen en la reglamentación específica de aplicación (en el caso de estructuras de edificación → CTE DB-SE)

### ● **Torsión (giro)**

✓ **Método general:** integración simple de giros por unidad de longitud

### ● **Tracción pura (alargamiento)**

✓ **Método general:** integración de alargamientos unitarios medios de las armaduras

### **3. ELEMENTOS SOLICITADOS A FLEXIÓN SIMPLE O COMPUESTA**

#### **3.1 LIMITACIONES DE FLECHAS**

##### **CLASIFICACIÓN DE LAS DEFORMACIONES**

|                      | Dependientes de las cargas exteriores |                      | Independientes de las cargas exteriores |
|----------------------|---------------------------------------|----------------------|---|
|                      | Instantáneas                          | Diferidas (Fluencia) |   |
| <b>Reversibles</b>   | ELASTICAS                             | ELASTICAS DIFERIDAS  | TERMICAS                                |
| <b>Irreversibles</b> | REMANENTES                            | PLASTICAS DIFERIDAS  | RETRACCION                              |

**Flecha activa:** Se entiende por flecha activa de un elemento estructural en relación con otro no estructural, aquella producida en el primero a partir de la construcción del segundo

Limitaciones de flechas → No existe concordancia generalizada por:

- Cálculo aproximado (especialmente el de flechas diferidas)
- Intervienen fenómenos  $\pm$  aetorios (retracción, fluencia, temperatura, humedad, carga variable/carga permanente)
- $f_{adm}$  depende de otros elementos (tabiques) y de su deformabilidad

\* En EHE-08 no es necesario calcular flechas si:

Esbeltez (= Luz/Canto)  $< E_{sb_{max}}$  (vigas y losas)

Canto  $h > h_{min}$  y Luz  $L < L_{max}$  (forjados)

## LIMITACIONES DE FLECHAS EN DISTINTA NORMATIVA

| NORMA  | FLECHA   |  |  |
|--|--|--|--|
|  | INSTANTÁNEA  | TOTAL                                  | ACTIVA   |
| <b>EHE-08</b>                                  |  | $L/250$<br>y<br>$L/500 + 1 \text{ cm}$ | $L/400$  |
| <b>EHE-98</b>                                  | -  | $L/250$                                | $L/400$ ó $1 \text{ cm}^{(*)}$                             |
| <b>EFHE y EHE-08 (forjados)<sup>(**)</sup></b> | -  | $L/250$<br>y<br>$L/500 + 1 \text{ cm}$ | $L/500$<br>y<br>$L/1000 + 0,5 \text{ cm}$                  |
| <b>BS-8110-85</b>                              | -  | $L/250$                                | $L/350$ y $20 \text{ mm}$                                  |
| <b>ACI-318-95</b>                              | $L/180^{(***)}$<br>(Forj. de cubierta)<br>$L/360^{(***)}$<br>(Forj. de piso) | -                                      | $L/240$<br>(tabiq. normal)<br>$L/480$<br>(tabiq. muy ríg.) |
| <b>EC-2</b>                                    | -  | $L/250$                                | $L/500$  |
| <b>MC-90</b>                                   | -  | $L/300$                                | -  |

(\*) Límite para “evitar la fisuración de tabiquerías” (valor insuficiente para luces medias o grandes según J. Calavera)

(\*\*) En forjados,  $L$  es la luz del vano (ó  $1,6 \times$  vuelo en el caso de voladizos)

(\*\*\*) Flecha instantánea debida a la sobrecarga de uso

Los valores tradicionales de trabajo eran:

$L/250$  para FLECHA TOTAL       $L/500$  para FLECHA ACTIVA

### Consejos para reducir flechas:

- √ No utilizar elementos muy esbeltos
- √ Colocar armadura de compresión
- √ Emplear hormigones de baja fluencia
- √ Retrasar lo más posible la aplicación de las cargas permanentes

## LIMITACIÓN DE DEFORMACIONES (CTE DB-SE, Art. 4.3.3)

### • FLECHA RELATIVA (entre dos puntos cualesquiera)

#### INTEGRIDAD DE LOS ELEMENTOS CONSTRUCTIVOS

| Condiciones  | Lím. flecha activa:<br>acciones variables<br>(combin. caracter.) |
|--|--|
| Pisos con tabiques frágiles (gran formato, rasillones, placas) o pavim. rígidos sin juntas | $L/500$  |
| Pisos con tabiques ordinarios o pavimentos rígidos con juntas                              | $L/400$  |
| Resto de casos   | $L/300$  |

**CONFORT USUARIOS**  $\Rightarrow$  Flecha acciones variab.  $< L/350$  (comb.caract.)

**APARIENCIA OBRA**  $\Rightarrow$  Flecha total  $< L/300$  (comb. casipermanente)

$L =$  Doble de la distancia entre los dos puntos considerados

(Vigas biapoyadas  $\rightarrow$  distancia entre apoyos. Voladizos  $\rightarrow$  2 veces la luz)

### • DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL

#### INTEGRIDAD DE LOS ELEMENTOS CONSTRUCTIVOS (tabiques, fachadas rígidas)

Desplome total  $< 1/500$  de la altura total del edificio

Desplome local  $< 1/250$  de la altura de la planta, en cualquiera de ellas

#### APARIENCIA DE LA OBRA

Desplome relativo  $< 1/250$   
(entre dos puntos cualesquiera)

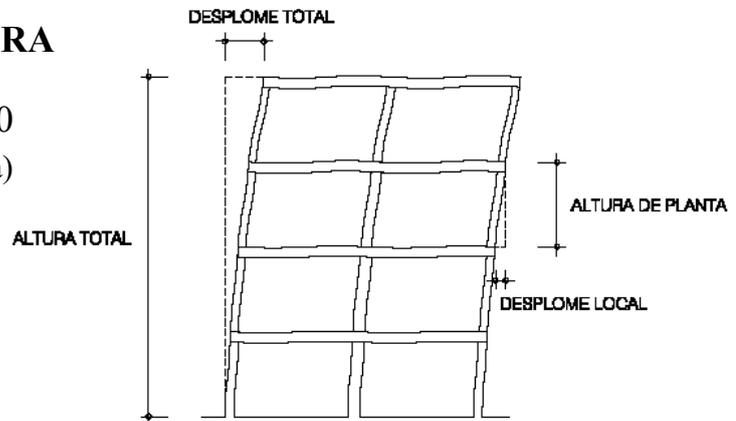


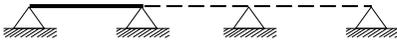
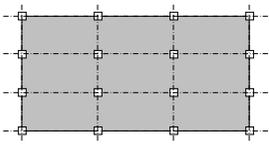
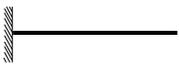
Figura 4.1 Desplomes

Fuente: CTE DB SE, 2006

**No será necesario la comprobación de flechas:**

- En vigas y losas de edificación, y
- Esbeltez  $(L/d) \leq$  Tabla 50.2.2.1.a en función de la cuantía  $\rho = A_s/bd$  (en secc. centro-luz, o secc. arranque en voladizos)  
 $L =$  luz;  $A_s =$  área de armadura traccionada;  $b =$  ancho de la sección;  $d =$  canto útil

**Tabla 50.2.2.1.a. ESBELTEZ  $(L/d)$  en vigas y losas de hormigón armado sometidos a flexión simple**

| Sistema estructural   |   | Elementos                                 | Elementos                                |
|---|---|---|--|
|   |   | fuertemente armados<br>( $\rho = 0,015$ ) | débilmente armados<br>( $\rho = 0,005$ ) |
| Viga simplemente apoyada. Losa uni o bidireccional simplemente apoyada                                |    | 14  | 20                                       |
| Viga continua <sup>1</sup> en un extremo. Losa unidireccional continua <sup>1,2</sup> en un solo lado |    | 18  | 26                                       |
| Viga continua <sup>1</sup> en ambos extremos. Losa uni o bidireccional continua <sup>1,2</sup>        |    | 20  | 30                                       |
| Recuadros exteriores y de esquina en losas sin vigas sobre apoyos aislados <sup>3</sup>               |   | 16  | 23                                       |
| Recuadros interiores en losas sin vigas sobre apoyos aislados <sup>3</sup>                            |  | 17  | 24                                       |
| Voladizo  |  | 6   | 8  |

<sup>1</sup> Un extremo se considera continuo si el momento correspondiente  $\geq 85\%$  momento de empotramiento perfecto

<sup>2</sup> En losas unidireccionales, las esbelteces dadas se refieren a la luz menor.

<sup>3</sup> En losas sobre apoyos aislados (pilares), las esbelteces dadas se refieren a la luz mayor.

Para vigas o losas aligeradas con sección en T, en que la relación entre la anchura del ala y del alma  $> 3$ , las esbelteces  $L/d$  deben multiplicarse por 0,8.

### 3.2 CÁLCULO DE FLECHAS: MÉTODO GENERAL

Cálculo complejo debido a:

- Comportamiento no-lineal del hormigón (fisuración  $\Rightarrow$  var. rigidez)
- Deformaciones en el tiempo (fluencia y retracción)
- Reología diferente hormigón-acero, trabajando conjuntamente por la adherencia (discont. en leyes: Deform. long. acero y curvat. de la pieza)
- Proceso constructivo (edad horm., proc. descimbrado, historial de cargas,...)

Integración de la ley de curvaturas ( $c$ )  $\rightarrow y'' = c = -\frac{M}{E \cdot I}$

$y''$   $\rightarrow$  - Difícil de conocer

- Discontinua en las secciones fisuradas

La ley de curvaturas está entre dos estados extremos:

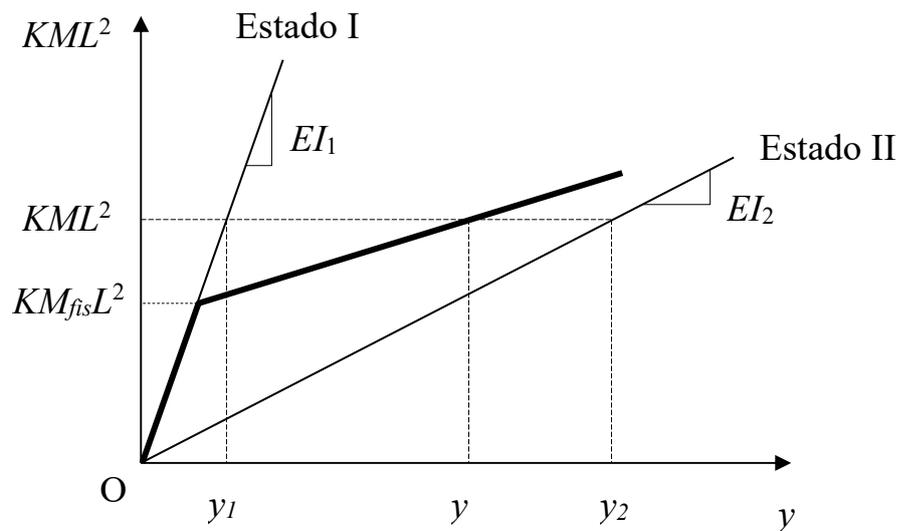
Estado I: Situación no fisurada (colaboración en tracción del hormigón)

Estado II: Situación fisurada (sin colaboración en tracción del hormigón)

### 3.3 CÁLCULO DE FLECHAS: MÉTODO SIMPLIFICADO

#### • MÉTODO SIMPLIFICADO FLECHAS INSTANTÁNEAS

Expresión general de la flecha  $\rightarrow y = K \frac{ML^2}{EI}$



Dos métodos:

#### 1) Interpolación de flechas

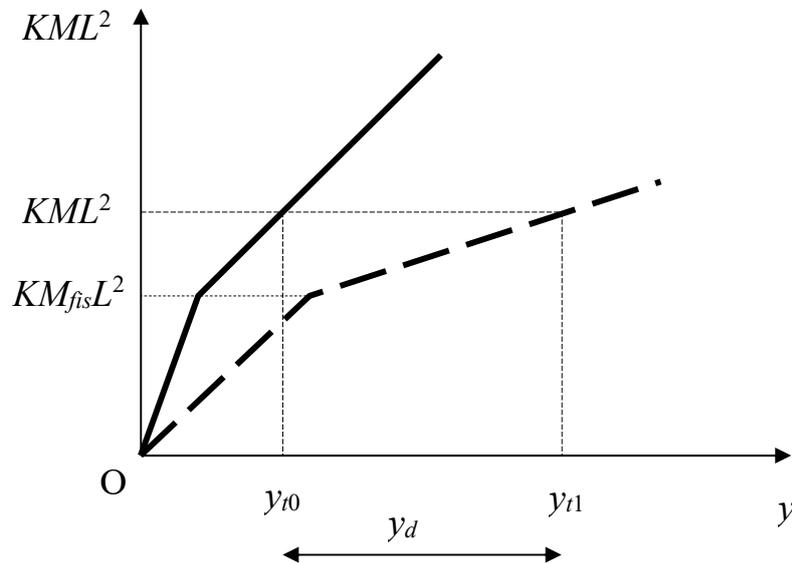
$$y = \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 \quad \text{con} \quad \begin{cases} y_1 = K \frac{ML^2}{EI_1} \\ y_2 = K \frac{ML^2}{EI_2} \end{cases}$$

#### 2) Interpolación de inercias

$$y = K \frac{ML^2}{EI_e} \quad \text{con} \quad I_e = \beta I_1 + (1 - \beta) I_2$$

## • MÉTODO SIMPLIFICADO FLECHAS DIFERIDAS

Expresión general de la flecha  $\rightarrow y = K \frac{ML^2}{EI}$



Dos métodos:

### 1) Amplificación de la flecha instantánea

$$y_d = \lambda y_{t0} \quad \text{Sólo la C.P. proporciona flecha diferida}$$

$$\text{Flecha total: } y = y_{t0} + y_d = y_{t0}(1 + \lambda)$$

### 2) Corrección de E

Hipótesis: La flecha de fluencia es proporcional a la flecha instantánea, siendo el coef. de proporcionalidad el coef.  $\varphi$  de fluencia  $y_{fl} = \varphi y_{t0}$

Flecha total:

$$y = y_{t0} + y_{fl} = y_{t0}(1 + \varphi) = \frac{KML^2}{EI}(1 + \varphi) = \frac{KML^2}{\frac{E}{1 + \varphi} I} = \frac{KML^2}{E_{c,ef} I}$$

### 3.4 MÉTODO PROPUESTO EN LA EHE-08

Método simplificado aplicable a vigas y losas

**MÉTODO DE BRANSON (1977):** Aceptando la distribución de esfuerzos de un cálculo lineal, se adopta una rigidez de la pieza que refleje los fenómenos no lineales antes expuestos

#### • FLECHAS INSTANTÁNEAS → INTERPOLACIÓN DE INERCIAS

$$y_{inst} = K \frac{ML^2}{E_c I_e}$$

$I_e$  Momento de inercia equivalente

$E_c$  Módulo de deformación longitudinal del hormigón. Se adopta el módulo secante a la edad de  $j$  días →  $E_{oj} = 8500 \sqrt[3]{f_{cm,j}}$  (N/mm<sup>2</sup>) para cargas instantáneas, con  $f_{cm,j} = f_{ck} + 8$  (N/mm<sup>2</sup>)

$M, K$  momento y coeficiente (dependen del tipo y distribución de carga)

**Cálculo de  $I_e$  (Momento de inercia equivalente):**

$$I_e = \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 I_b + \left[ 1 - \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right] I_f \leq I_b$$

$$\text{Si } M_f > M_a \Rightarrow I_e = I_b$$

$M_f$  Momento de fisuración de la sección  $M_f = f_{ct,m,fl} W_b = \frac{f_{ct,m,fl} I_b}{y_1}$

$f_{ct,m,fl}$  Resistencia media a flexotracción del hormigón

$$f_{ct,m,fl} = \max \left[ (1,6 - h/1000) f_{ct,m}; f_{ct,m} \right]$$

$$\text{con } \begin{cases} f_{ct,m} = 0,30 \sqrt[3]{f_{ck}^2} & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ f_{ct,m} = 0,58 \sqrt{f_{ck}} & \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

- $W_b$  Módulo resistente de secc. bruta resp. a la fibra extrema en tracc.
- $y_I$  Distancia del c.d.g. de la secc. bruta a la fibra extrema en tracción
- $M_a$  Máximo flector aplicado en la sección, para la combinación poco probable o característica, hasta el instante en el que se calcula la flecha (la inercia equivalente  $I_e$  considerada es la menor inercia “histórica”)
- $I_b$  Momento de inercia de la sección bruta. Puede tomarse en vez de  $I_b$  el momento de inercia de la sección homogeneizada (homogeneizando las áreas de armaduras multiplicándolas por  $n = E_s / E_{c,j}$ )
- $I_f$  Momento de inercia de la sección fisurada en flexión simple respecto a la fibra neutra, es decir, despreciando la zona de hormigón en tracción y homogeneizando las armaduras multiplicándolas por  $n = E_s / E_{c,j}$

Nota: Para la aplicación de la fórmula de Branson, es necesario emplear el valor  $M_a$  correspondiente al máximo nivel de carga considerado hasta el instante. Por tanto, si hay un incremento de carga  $\Delta P = P_2 - P_1$  la flecha es:

$$y_{\Delta P} = y(P_2) - y(P_1) \quad [y_{\Delta P} \neq y(P_2 - P_1)]$$

### SECCIÓN DE REFERENCIA

Se adopta un momento de inercia equivalente  $I_e$ , y constante para toda la pieza, que corresponda a:

- 1) Elementos simplemente apoyados → **Sección central**
- 2) Voladizos → **Sección de arranque**
- 3) Elementos continuos, vanos internos →  $I_e = 0,50I_{ec} + 0,25I_{ee1} + 0,25I_{ee2}$   
 $I_{ec}$  Inercia equivalente de la sección de centro de vano  
 $I_{ee}$  Inercia equivalente de la sección de apoyos
- 4) Elementos continuos, vanos extremos →  $I_e = 0,75I_{ec} + 0,25I_{ee}$

• **FLECHAS DIFERIDAS → AMPLIACIÓN DE LA F. INSTANTÁNEA**

$$y_{dif} = \lambda y_{inst, comb. cuasi-perm.}$$

con 
$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'}$$

- $\rho'$  Cuantía geométrica de  $A_s'$  en arranque (voladizo) o en centro-luz (resto), referida al área de la sección útil (para sección rectangular:  $\rho' = A_s' / bd$ )
- $\xi$  Coeficiente de fluencia y retracción, dependiente de la duración de la carga

| DURACIÓN      | $\xi$ |
|---------------|-------|
| $\geq 5$ años | 2,0   |
| 1 año         | 1,4   |
| 6 meses       | 1,2   |
| 3 meses       | 1,0   |
| 1 mes         | 0,7   |
| 2 semanas     | 0,5   |

- Para el cálculo de la flecha diferida entre los instantes  $t$  y  $j$  se toma:

$$\xi = \xi(t) - \xi(j)$$

- Para carga aplicada por fracciones  $P_1, P_2, \dots, P_n$  se puede simplificar así:

$$\xi = (\xi_1 P_1 + \xi_2 P_2 + \dots + \xi_n P_n) / (P_1 + P_2 + \dots + P_n)$$

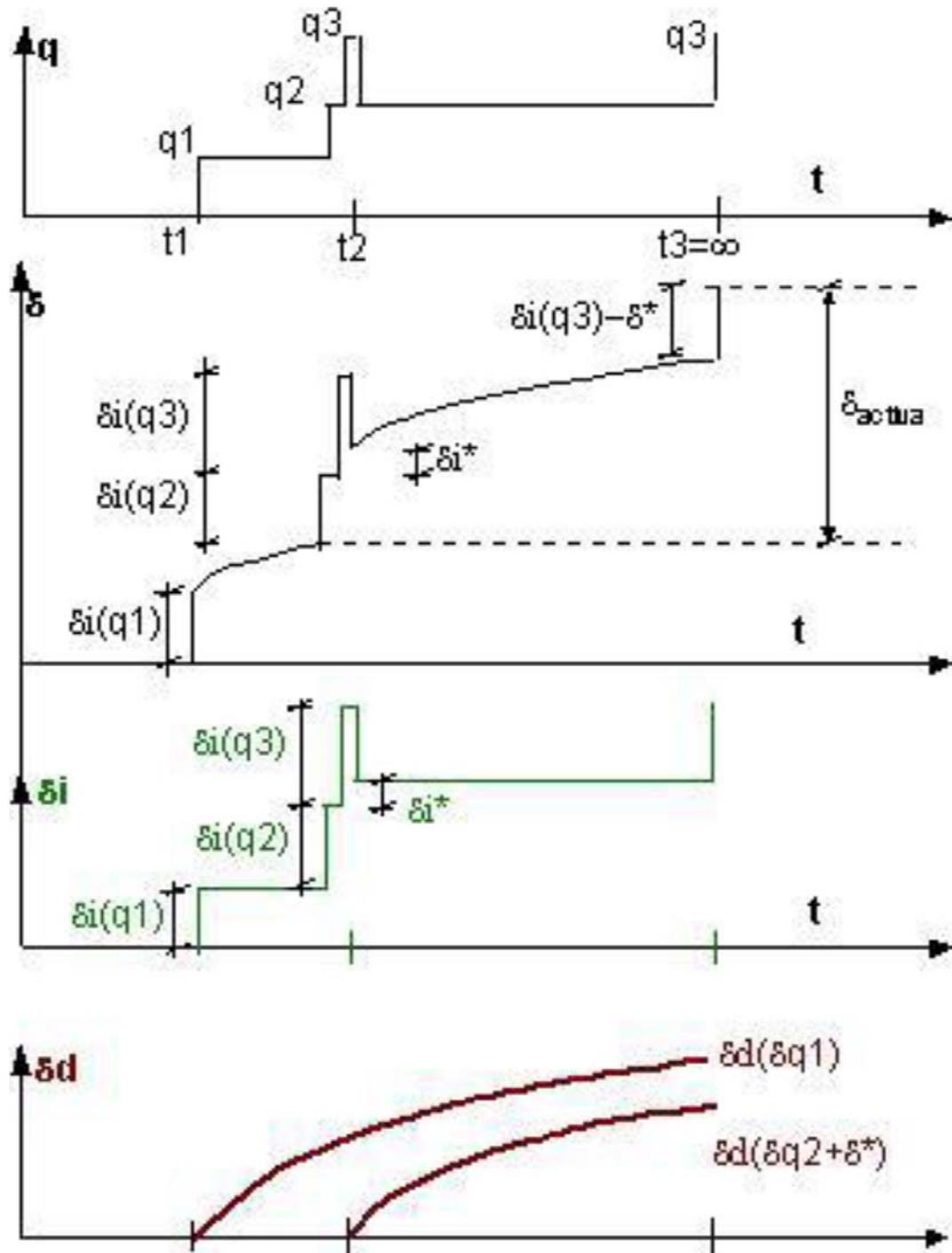
• **COMBINACIÓN DE ACCIONES:**

- Poco probable o característica  $\Rightarrow$  Flecha instantánea
- Cuasipermanente  $\Rightarrow$  Flecha diferida

• **FLECHA TOTAL**

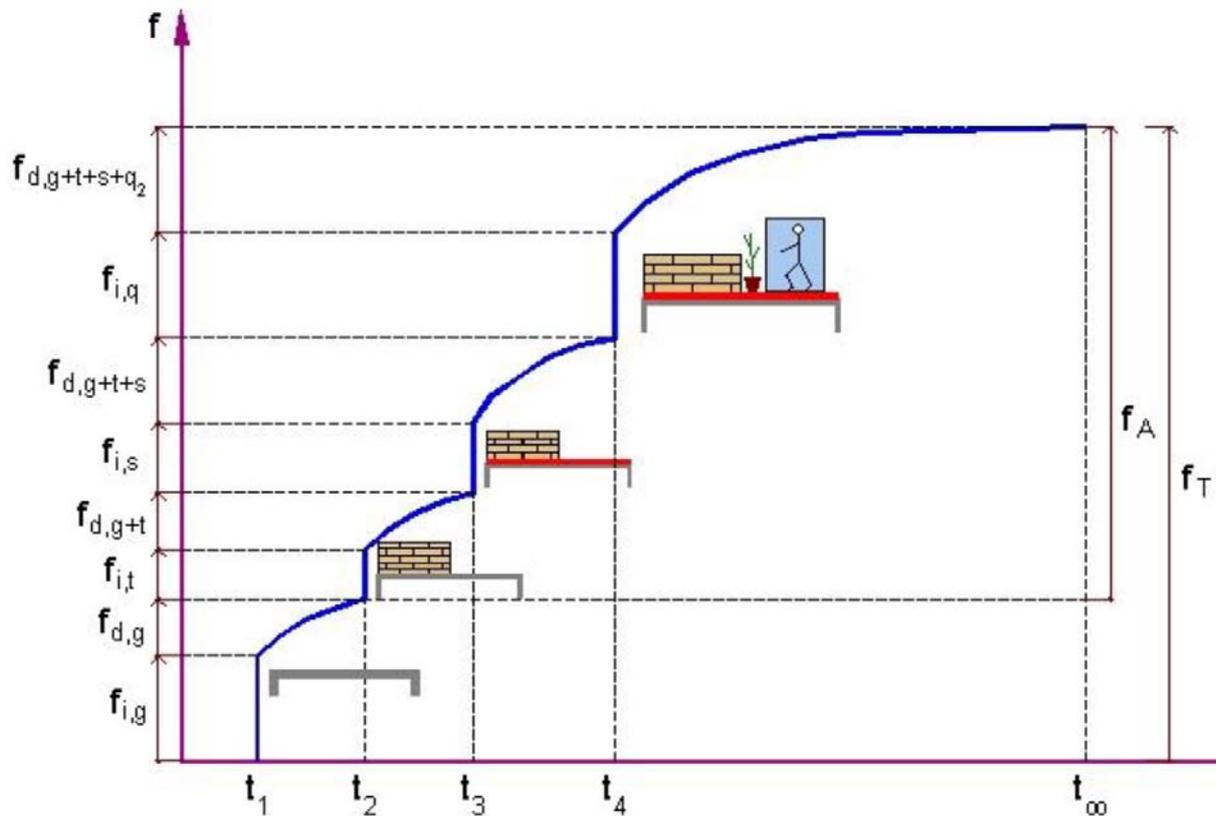
$$y_{total} = y_{inst} \text{ (comb. poco prob.)} + y_{dif} \text{ (comb. cuasiperm.)}$$

### 3.5 EVOLUCIÓN DE LAS FLECHAS EN FUNCIÓN DEL HISTORIAL DE CARGAS



Fuente: Corres *et al*, 2013

**Ejemplo:** Proceso de deformación de un forjado o viga considerando el caso habitual de ejecución (primero la tabiquería y luego el solado).



Fuente: Gil, 2011

$t_1$ : peso propio del elemento estructural

$t_2$ : carga permanente del peso de la tabiquería (elemento dañable)

$t_3$ : carga permanente del peso del solado

$t_4$ : sobrecarga de uso

## 4. ELEMENTOS SOLICITADOS A TORSIÓN

$$\theta_{AB} = \int_A^B \theta \, dl$$

Giros por unidad de longitud:

$$\Rightarrow \text{Secciones no fisuradas} \quad \theta = \frac{T}{0,3E_c I_j}$$

$$\Rightarrow \text{Secciones fisuradas} \quad \theta = \frac{T}{0,1E_c I_j}$$

con  $T$  Torsor de servicio

$E_c$  Módulo de deformación longitudinal secante

$$E_c = 8500 \sqrt[3]{f_{cm,j}} \quad (\text{N/mm}^2)$$

$$\text{con } f_{cm,j} = f_{ck} + 8 \quad (\text{N/mm}^2)$$

$I_j$  = Mom. inercia a torsión de la sección bruta de horm.

## 5. ELEMENTOS SOLICITADOS A TRACCIÓN PURA

El alargamiento se obtiene de la integración de alargamientos unitarios medios de las armaduras

$$\text{Alargamiento} = \varepsilon_{sm} L$$

$\varepsilon_{sm}$  Alargamiento medio unitario de las armaduras

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[ 1 - k_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \geq 0,4 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$L$  Longitud del elemento

## 6. ESTADO LÍMITE DE VIBRACIONES

- Las vibraciones pueden afectar a la **funcionalidad** de la estructura:

- Incomodidad en los usuarios
- Inadecuado funcionamiento de equipos sensibles

- **Causas**

- Movimientos rítmicos (gente caminando, corriendo, saltando o bailando)
- Maquinaria
- Ráfagas de viento u oleaje
- Tráfico de carretera o ferrocarril
- Ciertos procedimientos constructivos (hincado de pilotes o tablestacas, compactación mecánica del suelo, etc.)

- **Comprobación**

### Valor mínimo de la frecuencia natural de vibración de la estructura [Hz]

| Estructura   | EHE-08 | CTE | EAE |
|--|--------|-----|-----|
| Gimnasios, polideportivos y palacios de deportes                             | 8      | 8   | 9   |
| Salas de fiestas o conciertos, locales públicos<br>SIN asientos fijos        | 7      | 7   | 8   |
| Salas de fiestas o conciertos, locales de<br>espectáculos CON asientos fijos | 3,4    | 3,4 | 3,4 |
| Viviendas, oficinas, centros comerciales                                     | -      | -   | 3,0 |
| Pasarelas peatonales   | 5      | -   | -   |

Para puentes y pasarelas peatonales se aporta una formulación simplificada en los comentarios del Art. 51 EHE-08

## • Obtención aproximada de la frecuencia natural de un forjado

### En función de la flecha:

- La frecuencia natural  $f_u$  se puede estimar, con gran aproximación, según la siguiente expresión:

$$f_u = \frac{18}{\sqrt{y_{cuasiperm}}} \text{ [Hz]}$$

$y_{cuasiperm}$  flecha máxima (en mm) producida en el forjado por la carga permanente más la fracción cuasipermanente de la sobrecarga.

Para calcular la flecha en forjados de hormigón, se toma la inercia equivalente fisurada. Como aproximación, puede adoptarse:

$$I_{fis} = \frac{1}{3} I_{bruta} = \frac{1}{3} \frac{1}{12} b h^3$$

- Otra forma de proceder es obtener  $f_u$  para la carga permanente y para la carga total. La frecuencia de vibración del forjado durante su vida útil estará comprendida entre ambas.

### Empleando la expresión para una placa isótropa:

$$f = \frac{\alpha}{L^2} \sqrt{\frac{E t^3}{12 \cdot \mu (1 - \nu^2)}}$$

$E$  módulo de deformación longitudinal [N/m<sup>2</sup>]

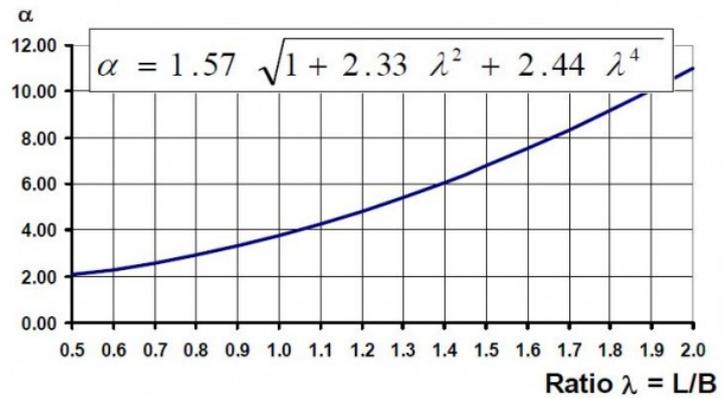
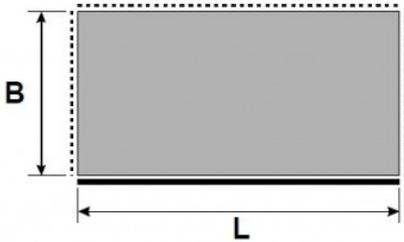
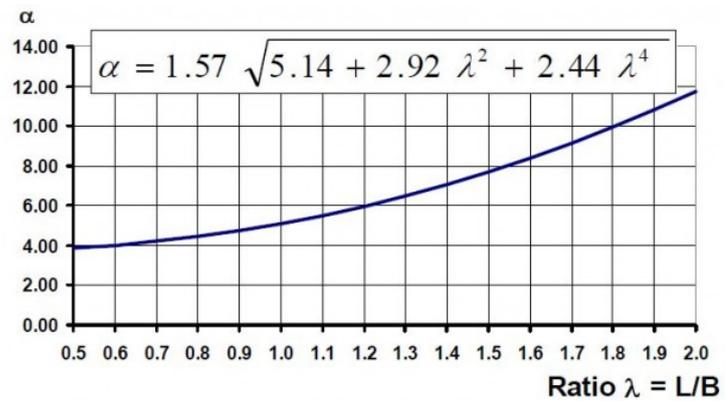
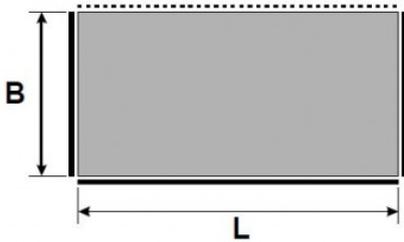
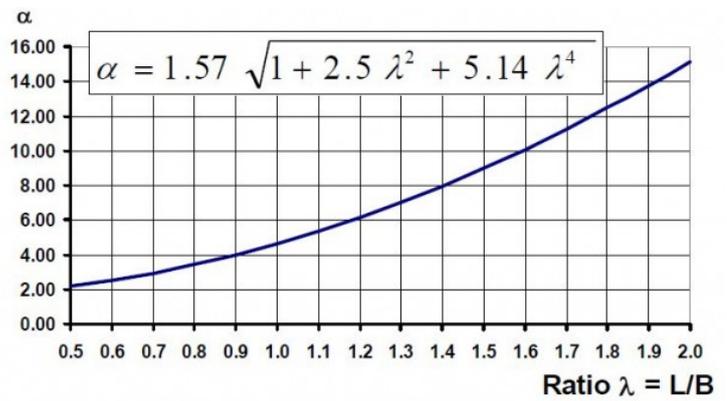
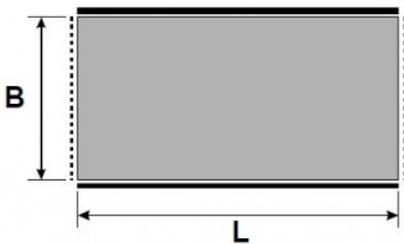
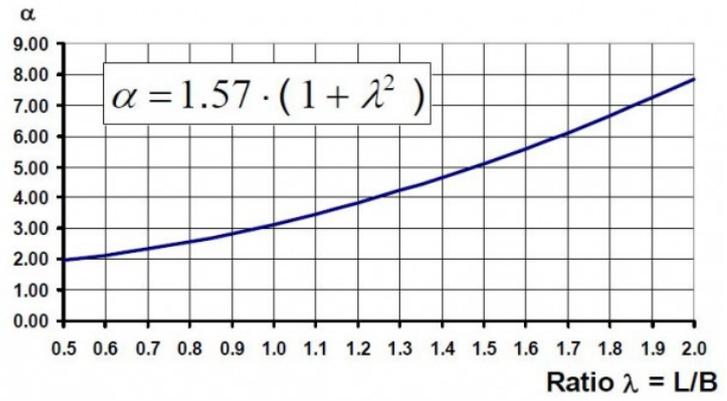
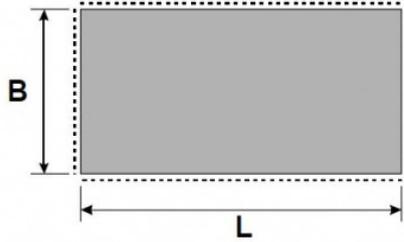
$t$  espesor de la placa [m]

$\mu$  masa del forjado (con solado) [Kg/m<sup>2</sup>]

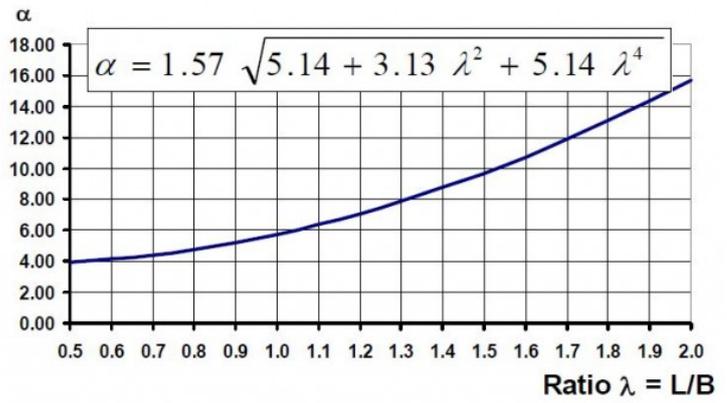
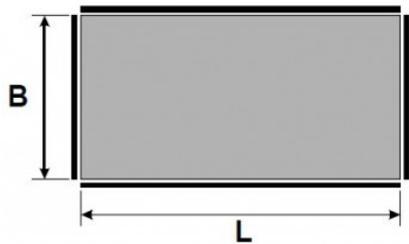
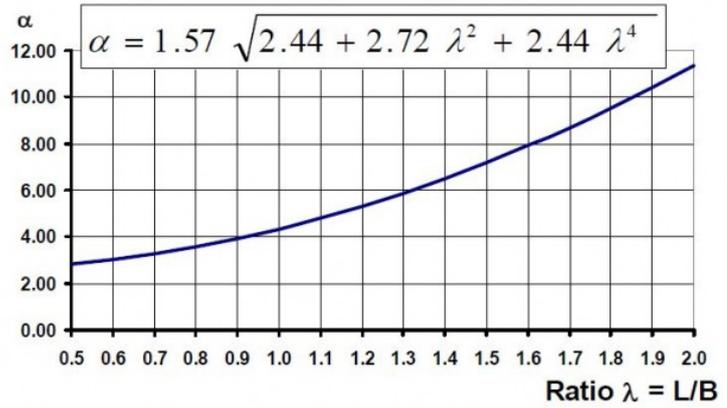
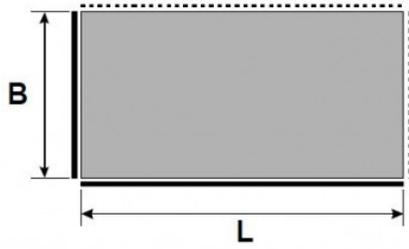
$\nu$  coeficiente de Poisson

$L$  largo de la placa [m]

$\alpha$  coeficiente función de las condiciones de contorno de la placa:



clamped    hinged



clamped    hinged

Fuente: Feldmann et al, 2009