

LECCIÓN 10

ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE INESTABILIDAD

(Art. 43 EHE-08)

1. INTRODUCCIÓN
2. PLANTEAMIENTO GENERAL
 - 2.1 NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA
 - 2.2 NO LINEALIDAD DEL MATERIAL
 - 2.3 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS CONSIDERANDO AMBOS EFECTOS
3. ESTADO LÍMITE DE INESTABILIDAD
4. SOPORTES AISLADOS. MÉTODO APROXIMADO PROPUESTO POR LA EHE-08.
 - 4.1 FLEXIÓN COMPUESTA RECTA
 - 4.2 FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA
5. ESTRUCTURAS APORTICADAS

1. INTRODUCCIÓN

- PANDEO

Proceso de inestabilidad consecuencia de la falta de equilibrio en una estructura cuando las condiciones de equilibrio se plantean en la posición deformada de la pieza

- ANÁLISIS

- No es válido el análisis lineal
- Necesidad del análisis no-lineal:
 - a) No-linealidad geométrica
 - b) No-linealidad del material

- CÁLCULO RESISTENTE

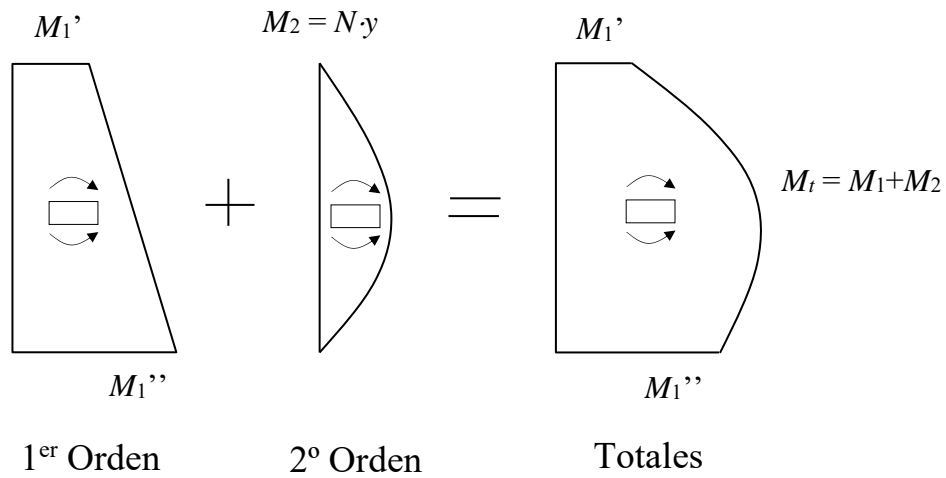
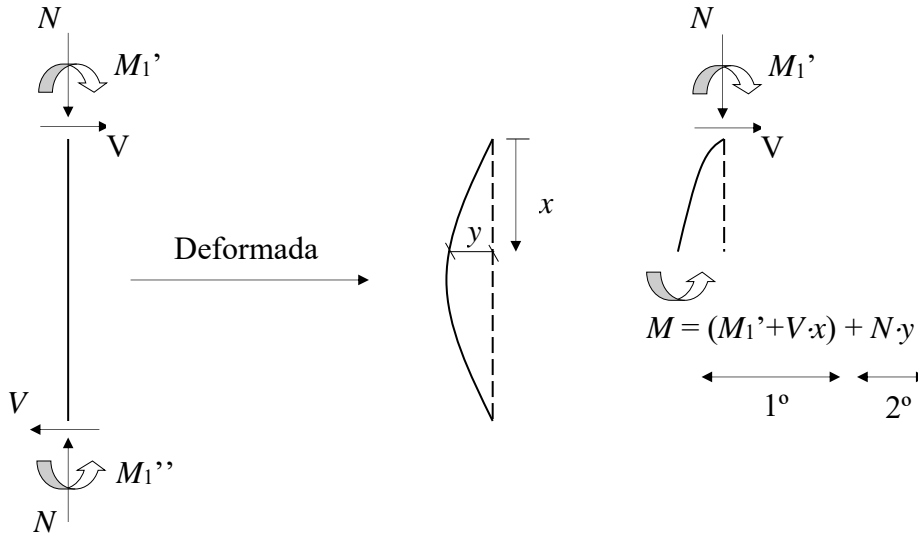
Dos posibles efectos:

- Inestabilidad
- Incremento de tensiones \Rightarrow Agotamiento

2. PLANTEAMIENTO GENERAL

2.1 NO-LINEALIDAD GEOMÉTRICA

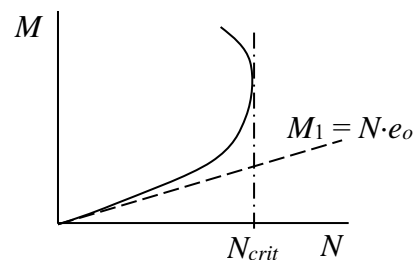
Se consideran los efectos de 2º orden por modificación de la geometría



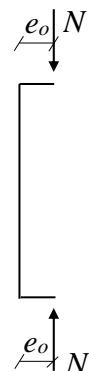
Consecuencia: $\uparrow N \Rightarrow \uparrow M_2 \Rightarrow \uparrow M_t \Rightarrow \uparrow y$

$N < N_{crit} \Rightarrow$ Estabilidad $M = M_1 + N \cdot y$

$N > N_{crit} \Rightarrow$ Inestabilidad

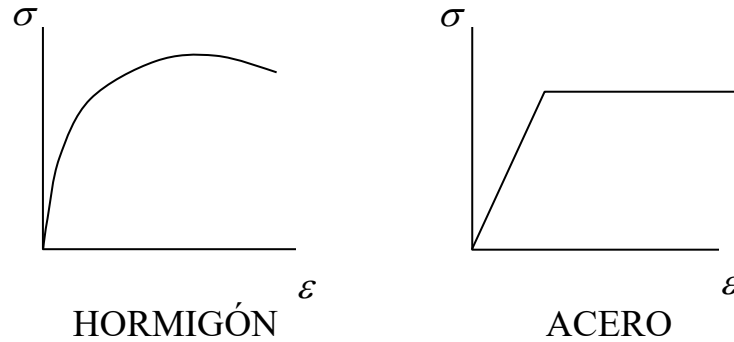


CASO REAL



2.2 NO-LINEALIDAD DEL MATERIAL

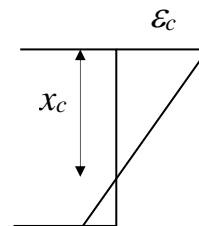
Se consideran los efectos de 2º orden debidos a la variación de la respuesta del material con el nivel de tensiones



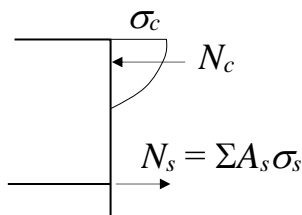
La no-linealidad del material tiene su influencia en los problemas de inestabilidad por pandeo mediante la relación del momento flector (M) con la curvatura (χ) para cada sección:

$$y''(x) = -M(x)/EI$$

con $\chi = d^2y(x)/dx^2 = y''(x) = \epsilon_c/x_c$



$$M_{tot} = M_1 + N \cdot y = -EI\chi \quad (EI \text{ depende de } N, \chi)$$



$$N = N_c + \Sigma A_s \sigma_s$$

$$M = M_c + \Sigma A_s \sigma_s z_s$$

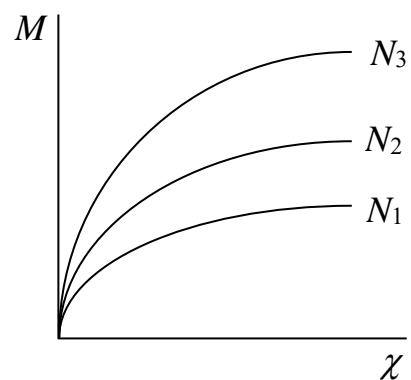
$$N = N(x_c, \chi)$$

$$M = M(x_c, \chi)$$

Eliminando x_c :

$$f(M, N, \chi) = 0$$

⇒

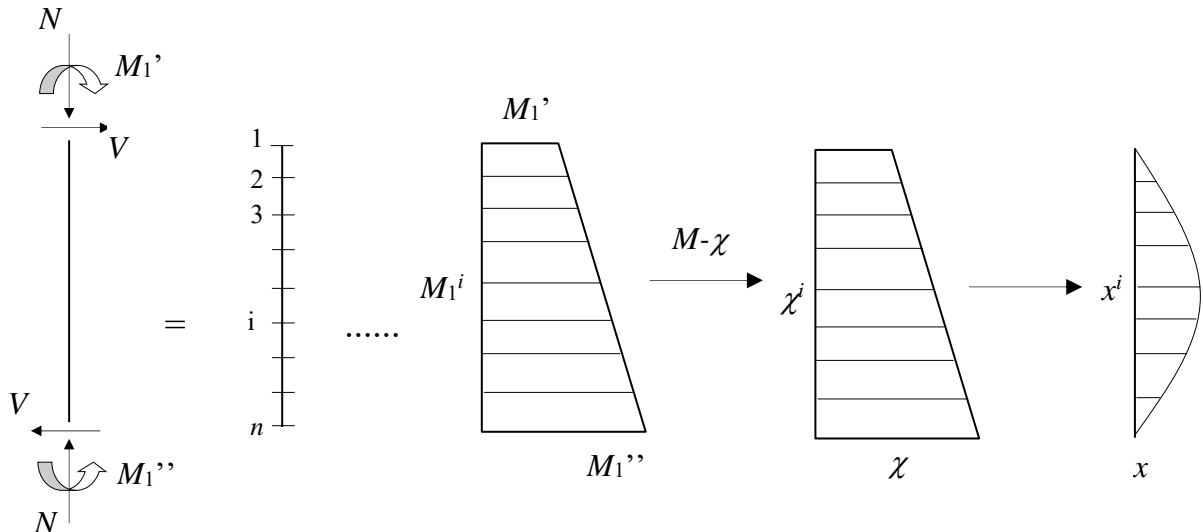


- **EFFECTOS DIFERIDOS** ⇒ La fluencia supone un aumento de las deformaciones para carga sostenida en el tiempo ⇒ Mayor flector de 2º orden ⇒ $N_{crit} \text{ (caso de carga sostenida)} < N_{crit} \text{ (caso de carga instantánea)}$

2.3 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS CONSIDERANDO AMBOS EFECTOS

Para N dado: $M_1 + N \cdot y = -EI(N, \chi)\chi$

Mediante integración numérica (elementos finitos, diferencias finitas):



1º) Calculamos los momentos de primer orden M_1^i

2º) A partir del diagrama $M-\chi$ correspondiente al axil dado se obtiene las curvaturas χ^i

3º) Con las curvaturas obtenemos las flechas x^i

4º) Calculamos los momentos de 2º orden $M_2^i = N \cdot x^i$

5º) Calculamos los momentos totales $M_t^i = M_1^i + M_2^i$

6º) Volvemos a 2º)

- Si el proceso converge \Rightarrow Equilibrio (aunque puede haber rotura si M_t es \gg)

- Si el proceso diverge \Rightarrow Inestabilidad

3. ESTADO LÍMITE DE INESTABILIDAD

✓ **Campo de aplicación**

- **Soportes aislados** y estructuras **aporticadas y reticulares**
- Efectos de la **torsión despreciables**
- $\lambda \leq 200$

✓ **Método general** (Art. 43.2)

✓ **Comprobación de estructuras intraslacionales** (Art. 43.3)

✓ **Comprobación de estructuras traslacionales** (Art. 43.4)

✓ **Comprobación de soportes aislados** (Art. 43.5)

* Método general

* Método aproximado. Flexión compuesta recta

* Método aproximado. Flexión compuesta esviada

4. SOPORTES AISLADOS. MÉTODO APROXIMADO

PROPUESTO POR LA EHE-08

4.1 FLEXIÓN COMPUESTA RECTA

- **Campo de aplicación:** Validez sólo para **sección y armadura constante**

- Esbeltez mecánica $\lambda = \frac{l_o}{i_c}$, $i_c = \sqrt{\frac{I}{A}}$

l_o = al longitud de pandeo

i_c radio de giro sección bruta horm. según eje \perp plano pandeo

- Esbeltez inferior $\lambda_{\text{inf}} = 35 \sqrt{\frac{C}{\nu} \left[1 + \frac{0,24}{e_2/h} + 3,4 \left(\frac{e_1}{e_2} - 1 \right)^2 \right]} \leq 100$

C Coeficiente que depende de la disposición de armaduras
 = 0,24 (armad. simétrica en dos caras opuestas en el plano de flex.)
 = 0,20 (armadura igual en las cuatro caras)
 = 0,16 (armadura simétrica en las caras laterales)

ν = $N_d/(A_c f_{cd})$ Axil adimensional o reducido de cálculo en el soporte

h Canto de la sección en el plano de flexión considerado

e_2 Excentricidad en extremo de mom. MÁX $e_2 = M_{d,\text{max}}/N_d$ (se toma +)

e_1 Excentricidad en extremo de mom. MÍN $e_1 = M_{d,\text{min}}/N_d$
 (e_1 se toma + si el flector $M_{d,\text{min}}$ tiene el mismo signo que $M_{d,\text{max}}$)

$e_2, e_1 \geq h/20$ y 2 cm (Excentricidad mínima, incertidumbre posición axil)

En estructuras traslacionales adoptar $e_1 = e_2$

- Casos: $\lambda < \lambda_{\text{inf}} \Rightarrow$ No necesaria comprobación, aunque considerar excentricidad, incluyendo la mín. ($h/20$ y 2 cm)

$\lambda_{\text{inf}} < \lambda \leq 100 \Rightarrow$ Método aproximado

$100 < \lambda \leq 200 \Rightarrow$ Método general

$\lambda > 200 \Rightarrow$ No contemplado en EHE-08

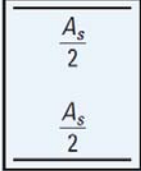
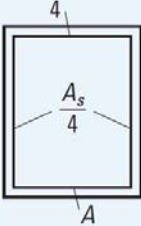
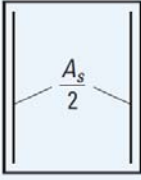
λ_{inf} puede ajustarse más para soportes de edificación si se conoce la cuantía mecánica de armadura (comentarios art. 43.1.2):

$$\lambda_{inf} = 35 \sqrt{\frac{A\omega + 0,12}{\nu} \left[1 + \frac{B}{e_2 / h} + 3,4 \left(\frac{e_1}{e_2} - 1 \right)^2 \right]} \leq 100$$

ω Cuantía mecánica total de armadura del soporte

A, B Constantes de la tabla 43.1.2

Tabla 43.1.2

Disposición de armadura	A	B
	0,40	$\frac{0,40\omega + 0,12}{\omega + 0,56}$
	0,27	$\frac{0,27\omega + 0,12}{0,93\omega + 0,56}$
	0,14	$\frac{0,14\omega + 0,12}{0,85\omega + 0,56}$

Fuente: EHE-08, 2011

- **Excentricidad total** $e_{tot} = e_e + e_a \geq e_2 \Rightarrow M_{tot} = N \cdot e_{tot}$

Excentricidad de cálculo de 1^{er} orden equivalente e_e

$e_e = 0,6e_2 + 0,4e_1 \geq 0,4e_2$ soportes intraslacionales

$e_e = e_2$ soportes traslacionales

Excentricidad ficticia e_a

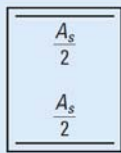
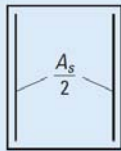
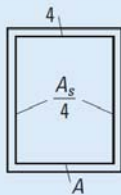

Representa los efectos de 2º orden y cubre los efectos de la fluencia

$$e_a = (1 + 0,12\beta)(\varepsilon_y + 0,0035) \frac{h + 20e_e}{h + 10e_e} \frac{l_o^2}{50i_c}$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

β Factor de armado $\beta = \frac{(d - d')^2}{4i_s^2}$, siendo i_s el radio giro de las armaduras (tabla 43.5.1)

Tabla 43.5.1

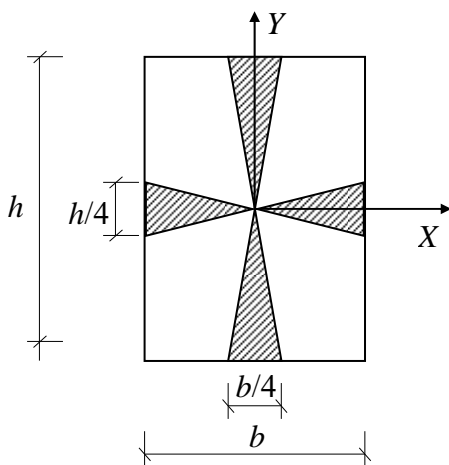
Disposición de armadura	i_s^2	β
	$\frac{1}{4}(d - d')^2$	1,0
	$\frac{1}{12}(d - d')^2$	3,0
	$\frac{1}{6}(d - d')^2$	1,5
	$\frac{1}{8}(d - d')^2$	2,0

Fuente: EHE-08, 2011

4.2 FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA

- Método válido sólo para: **Sección rectangular y armadura constante**
- Si las excentricidades de cálculo e_x y e_y están en las zonas sombreadas de la figura, puede hacerse comprobaciones separadas según los dos planos principales de simetría.

Esto ocurre si se cumple alguna de las dos condiciones:



$$\frac{e_x/b}{e_y/h} \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{e_y/h}{e_x/b} \leq \frac{1}{4}$$

- Si no se cumple ninguna de las condiciones anteriores, se considera que el soporte se encuentra en buenas condiciones respecto al pandeo, si se cumple la siguiente condición:

$$\frac{M_{xd}}{M_{xu}} + \frac{M_{yd}}{M_{yu}} \leq 1$$

M_{xd}, M_{yd} Momentos de cálculo considerando los efectos de 2º orden (considerando e_{tot})

M_{xu}, M_{yu} Momentos últimos o máximos resistidos por la sección

Es decir, se predimensiona la sección con M_{xd} y M_{yd} ; se obtiene M_{xu} y M_{yu} ; y se realiza la comprobación.

5. ESTRUCTURAS APORTICADAS

• ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES

Aquellas cuyos nudos, bajo solicitaciones de cálculo, presentan desplazamientos transversales cuyos efectos pueden ser despreciados desde el punto de vista de la estabilidad del conjunto

Se consideran estructuras claramente intraslacionales las que:

- 1) Tengan muros o núcleos de contraviento,
- 2) dispuestos de forma que aseguren la rigidez torsional de la estructura, y
- 3) cumplan:

$$N_d \leq k_1 \frac{n}{n+1,6} \frac{\sum EI}{h^2}$$

N_d Carga vertical de cálculo que llega a la cimentación con la estructura totalmente cargada

k_1 = 0,62 (ó 0,31 si los elementos de arriostram. han fisurado en ELU)

n número de plantas

$\sum EI$ suma de rigideces a flexión de los elementos de contraviento en la dirección considerada (en sección bruta)

h altura total de la estructura, desde la cara superior de cimientos

Como norma general, según la Guía de Aplicación de la EHE-08:

- Edificios < 8 plantas
- Altura < 2×menor longitud
- Vigas y forjados con luz/canto ≤ 20 y hormigonados monolíticamente
- Aunque no existan pantallas o núcleos frente a viento pero sí tabiquería y cerramiento de fábrica unidos a la estructura

- **ESTRUCTURAS TRASLACIONALES**

Aquellas que presentan desplazamientos con efectos no despreciables.

- **COMPROBACIÓN**

- a) **Intraslacionales:**

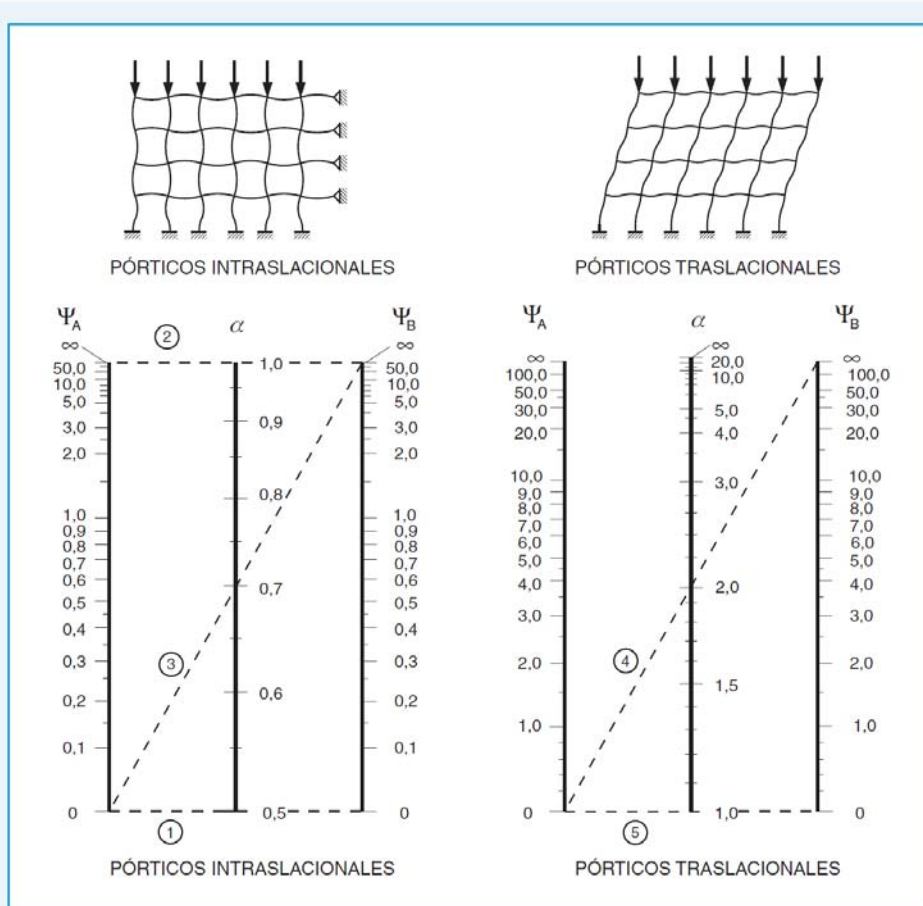
- Cálculo de esfuerzos en teoría de 1^{er} orden
- Comprobación de los efectos de 2^o orden en cada soporte aisladamente (obteniendo el coeficiente de pandeo α como pórtico intraslacional)

- b) **Traslacionales:**

- Método general
- Si $\delta \leq h/750$ y $n < 15$:
 - 1) Cálculo de esfuerzos en teoría de 1^{er} orden
 - 2) Comprobación de efectos de 2^o orden en cada soporte aisladamente (obteniendo el coeficiente de pandeo α como pórtico traslacional)

siendo:

- δ Desplazamiento máximo en cabeza bajo cargas horizontales características, en teoría de 1^{er} orden y secciones brutas
- h altura total de la estructura



α Factor de longitud de pandeo, que adopta, para los casos indicados, los siguientes valores:

- | | |
|---|------------------|
| 1 Soporte biempotrado | $(\alpha = 0,5)$ |
| 2 Soporte biarticulado | $(\alpha = 1,0)$ |
| 3 Soporte articulado-empotrado | $(\alpha = 0,7)$ |
| 4 Soporte en ménsula | $(\alpha = 2,0)$ |
| 5 Soporte biempotrado con extremos desplazables | $(\alpha = 1,0)$ |

En lugar de los nomogramas anteriores pueden emplearse las siguientes fórmulas:

– Para pórticos intraslacionales:

$$\alpha = \frac{0,64 + 1,4(\Psi_A + \Psi_B) + 3\Psi_A \cdot \Psi_B}{1,28 + 2(\Psi_A + \Psi_B) + 3\Psi_A \cdot \Psi_B}$$

– Para pórticos traslacionales:

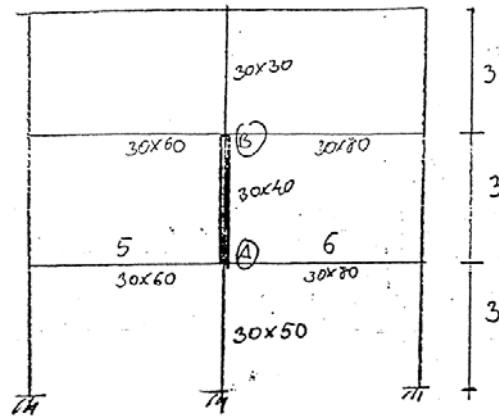
$$\alpha = \sqrt{\frac{7,5 + 4(\Psi_A + \Psi_B) + 1,6\Psi_A \cdot \Psi_B}{7,5 + (\Psi_A + \Psi_B)}}$$

Ψ Relación de rigideces $\Sigma[EI/L]$ de los soportes a $\Sigma[EI/L]$ de las vigas, en cada extremo A y B del soporte considerado. Como valor de l se tomará la inercia bruta de la sección.

$$\Psi = 0 \text{ (extremo empotrado)} \quad \Psi \rightarrow \infty \text{ (extremo articulado)}$$

Ejemplo

Obtener la longitud de pandeo del pilar AB, gráfica y analíticamente, suponiendo la estructura intraslacional y que el módulo de deformación longitudinal E es el mismo en todos los elementos de la estructura.



Extremo A:

$$\text{Pilares} \rightarrow \Sigma I/L = (30 \cdot 40^3/12)/300 + (30 \cdot 50^3/12)/300 = 1575 \text{ cm}^3$$

$$\text{Vigas} \rightarrow \Sigma I/L = (30 \cdot 60^3/12)/500 + (30 \cdot 80^3/12)/500 = 3213,3 \text{ cm}^3$$

$$\text{Cociente} \rightarrow \Psi_A = (\text{Pilares}/\text{Vigas})_A = 0,490$$

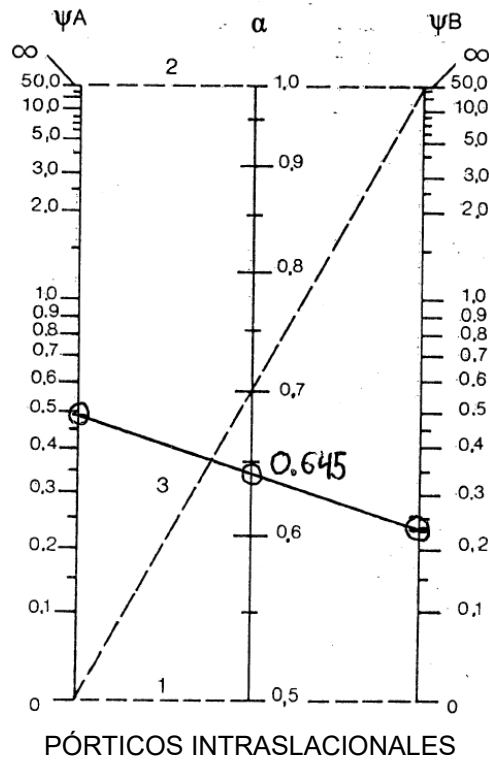
Extremo B:

$$\text{Pilares} \rightarrow \Sigma I/L = (30 \cdot 40^3/12)/300 + (30 \cdot 30^3/12)/300 = 758,33 \text{ cm}^3$$

$$\text{Vigas} \rightarrow \Sigma I/L = (30 \cdot 60^3/12)/500 + (30 \cdot 80^3/12)/500 = 3213,3 \text{ cm}^3$$

$$\text{Cociente} \rightarrow \Psi_B = (\text{Pilares}/\text{Vigas})_B = 0,236$$

Gráficamente:



Gráficamente $\rightarrow \alpha = 0,645 \quad l_0 = \alpha l = 0,645 \cdot 3 = 1,94 \text{ m}$

Analíticamente $\rightarrow \alpha = 0,651 \quad l_0 = \alpha l = 0,651 \cdot 3 = 1,95 \text{ m}$

Si la estructura fuera traslacional: $\alpha = 1,135 \quad l_0 = 1,135 \cdot 3 = 3,40 \text{ m}$