Bloque II: Geometría

3 Tangencias

3.1 Rectas tangentes

3.1.1 Rectas tangentes a una circunferencia “c” en un punto de tangencia “T” de ella y Rectas tangentes a una circunferencia “c” paralelas a una dirección “d” dada

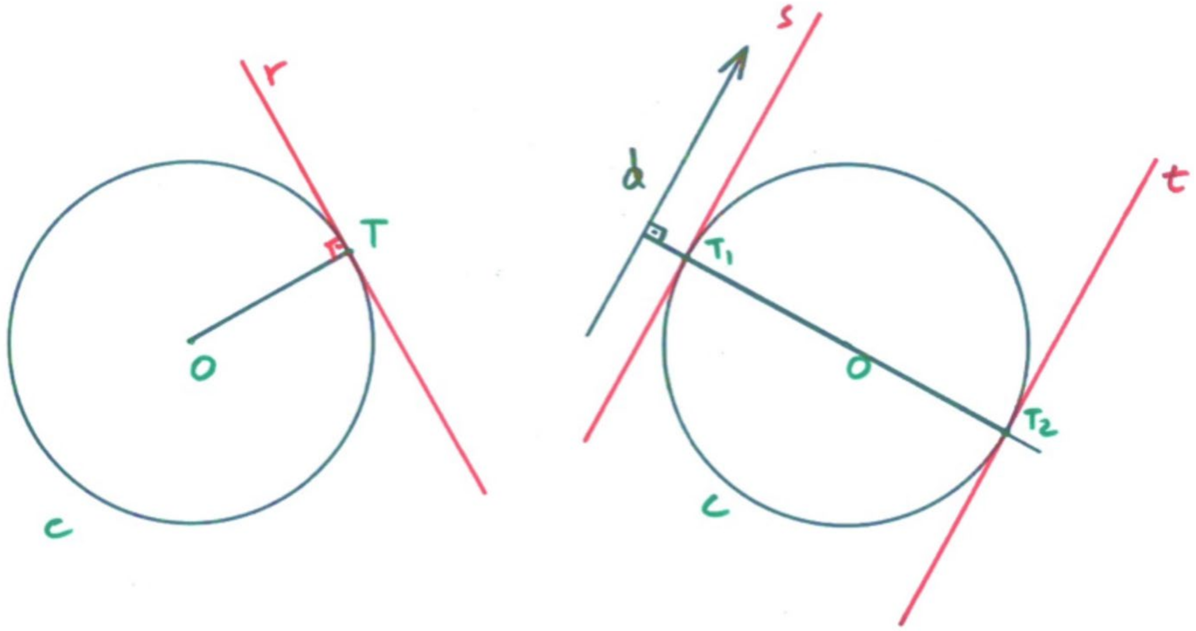

Ilustración 1 Rectas tangentes a una circunferencia “c” en un punto de tangencia “T” de ella y Rectas tangentes a una circunferencia “c” paralelas a una dirección “d” dada

3.1.1.1 Rectas tangentes a una circunferencia “c” en un punto de tangencia “T” de ella

Dada la circunferencia (c) de centro O y un punto tangencia T de ella, deseamos trazar su **recta tangente** (r), para ello, unimos T con O y trazamos la perpendicular a $\overline{TO}$ que pase por el punto T, esta **recta tangente** será la solución al ejercicio.

3.3.1.1.2 Rectas tangentes a una circunferencia “c” paralelas a una dirección “d” dada

Dada la circunferencia (c) de centro O y una dirección dada (d), deseamos trazar las **rectas tangentes a la circunferencia en una dirección dada**.

En primer lugar, partiendo desde O trazamos una recta perpendicular (r) a la dirección (d) que cortará a la circunferencia en los puntos de tangencia T1 y T2.

Finalmente trazamos rectas paralelas a la dirección (d) que pasen por los puntos de tangencia y obtendremos las rectas tangentes (s y t).

3.1.2 Rectas tangentes a una circunferencia "c" desde un punto exterior "P"

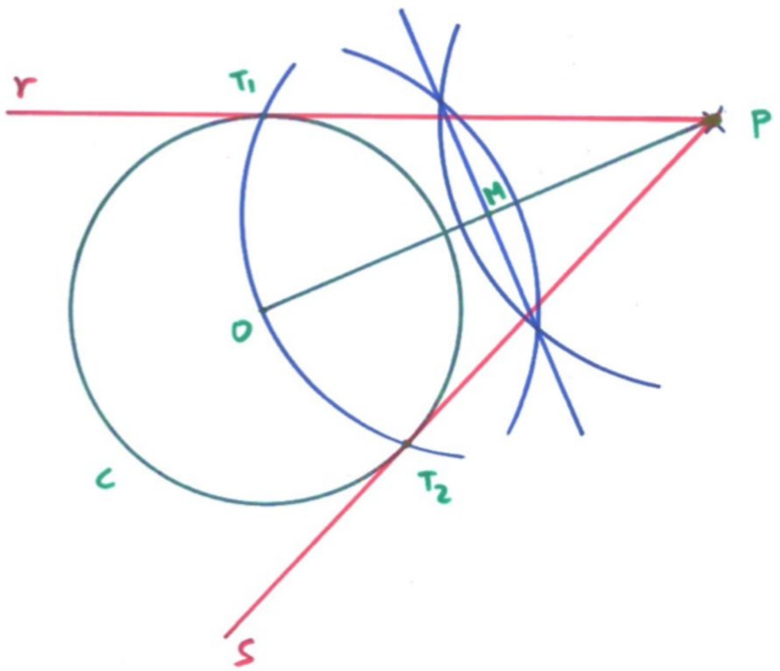

Ilustración 2 Rectas tangentes a una circunferencia "c" desde un punto exterior "P"

Dada la circunferencia (c) de centro O y un punto exterior a ella P deseamos trazar las **rectas tangentes a la circunferencia y al punto exterior** dado.

Para ello, unimos los puntos P y O dando lugar al segmento $\overline{\mathrm{PO}}$. Seguidamente trazamos la mediatriz de $\overline{\mathrm{PO}}$ y obtendremos el punto M.

Ahora utilizando el compás tomamos la distancia $\overline{\mathrm{OM}}$ y haciendo centro en M, trazamos un arco que cortará a la circunferencia en dos puntos que denominaremos **puntos de tangencia** (T1 y T2).

Por último, uniendo P con T1 y P con T2 obtendremos las rectas tangentes (r y s).

3.1.3 Rectas tangentes exteriores comunes a dos circunferencias "c1 y c2"

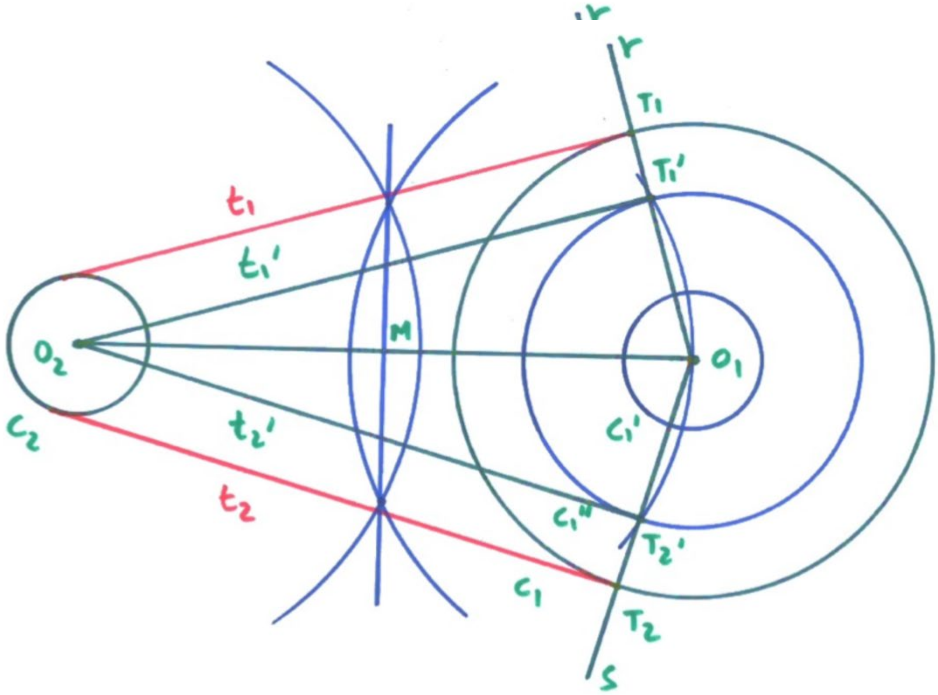

Ilustración 3 Rectas tangentes exteriores comunes a dos circunferencias "c1 y c2"

Dadas dos circunferencias (c1 y c2) de centros O1 y O2, deseamos trazar las **rectas tangentes exteriores** a ambas circunferencias. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

1. Siendo c1 mayor que c2, dibujamos una circunferencia con origen en O1 y radio r2 obteniéndose c1'. A continuación, tomamos el radio r1-r2 y haciendo centro en O1 dibujamos c1''.

2. Unimos O1 con O2, obteniéndose el segmento $\overline{O1O2}$ y trazamos la mediatriz que nos proporcionará su punto medio (M).

3. Ahora hacemos centro en M y trazamos un arco de radio $\overline{O1M}$, dicha arco cortará a c1'' en los puntos de tangencia T1' y T2'.

4. Al unir T1' y T2' con O2 obtenemos las rectas tangentes t1' y t2'.

5. Trazamos una recta (r) que parte de O1 y pase por T1', cortará a c1 en T1, repetimos el proceso con otra recta (s) que parte de O1 y pase por T2', cortando a c1 en T2.

6. Finalmente trazamos por T1 y T2 rectas paralelas a t1' y t2' respectivamente, dando lugar a las **rectas tangentes exteriores** a las circunferencias (t1 y t2).

3.1.4 Rectas tangentes interiores comunes a dos circunferencias "c1 y c2"

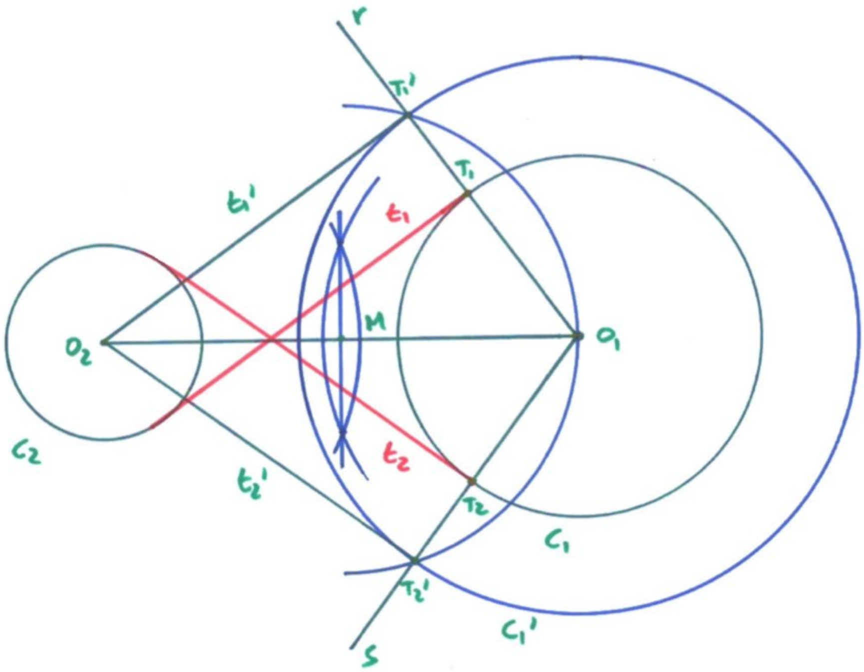

Ilustración 4 Rectas tangentes interiores comunes a dos circunferencias "c1 y c2"

Dadas dos circunferencias (c1 y c2) de centros O1 y O2, deseamos trazar las **rectas tangentes interiores** a ambas circunferencias. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

1. Siendo c1 mayor que c2, trazamos una circunferencia con origen en O1 y radio r1+r2 obteniéndose c1'.

2. Trazamos la mediatriz del segmento $\overline{O1O2}$ que nos proporcionará su punto medio (M).

3. Ahora hacemos centro en M y trazamos un arco de radio $\overline{O1M}$, dicho arco cortará a c1' en los puntos de tangencia T1' y T2'.

4. Al unir T1' y T2' con O2 obtenemos las rectas tangentes t1' y t2'.

5. Seguidamente, trazamos una recta (r) que parte de O1 y pase por T1', cortará a c1 en T1, repetimos el proceso con otra recta (s) que parte de O1 y pase por T2', cortando a c1 en T2.

6. Finalmente trazamos por T1 y T2 rectas paralelas a t1' y t2' respectivamente, dando lugar a las **rectas tangentes interiores** a las circunferencias (t1 y t2).

3.2 Circunferencias tangentes

3.2.1 Circunferencias tangentes a una recta en punto de ella conocido el radio de la solución y Circunferencias tangentes a una recta en un punto de ella y que pasen por un punto exterior

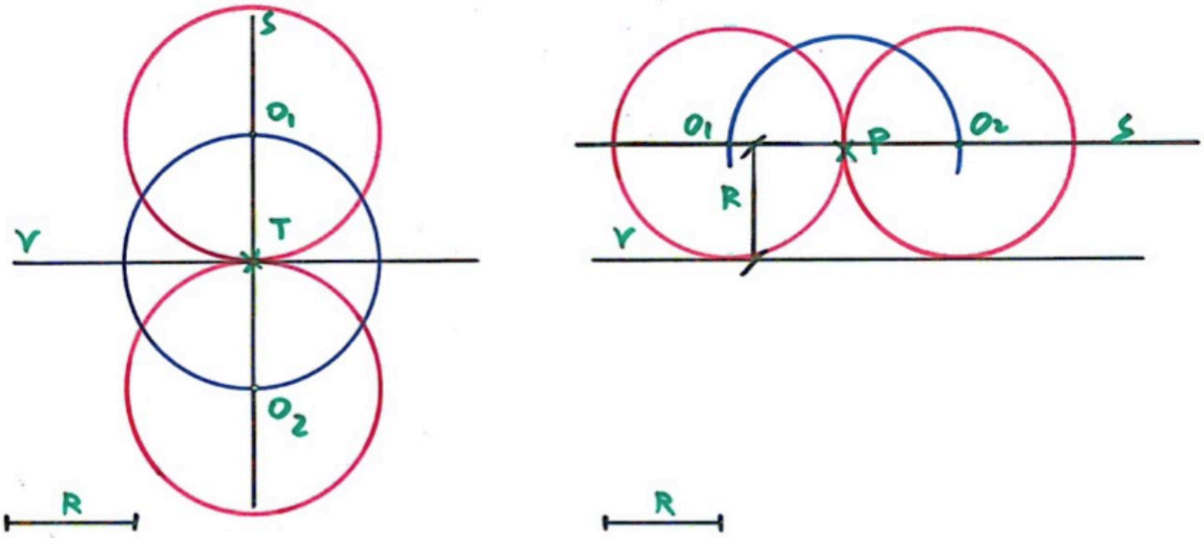

Ilustración 5 Circunferencias tangentes a una recta en punto de ella conocido el radio de la solución y Circunferencias tangentes a una recta en un punto de ella y que pasen por un punto exterior

3.2.1.1 Circunferencias tangentes a una recta en punto de ella conocido el radio de la solución

Dada una recta (r), un punto de tangencia T y el radio de la solución R, deseamos trazar las **circunferencias tangentes a la recta en un punto de ella**.

Para ello, utilizando el compás tomamos la distancia R y trazamos una circunferencia con centro en T. A continuación, trazamos una recta perpendicular (s) por T.

Dicha recta cortará a la circunferencia en dos puntos (O1 y O2) que serán los centros de las circunferencias solución.

3.2.1.2 Circunferencias tangentes a una recta en un punto de ella y que pasen por un punto exterior

Dada una recta (r), un punto P exterior a ella y el radio de la solución R, deseamos trazar las **circunferencias tangentes a una recta dado un punto de ella**.
Lo primero que tenemos que hacer es trazar una recta (s) paralela a (r) a una distancia R.

Hacemos centro en el punto P y trazamos un arco que cortará a (s) en dos puntos, O1 y O2, dichos puntos serán los centros de las circunferencias solución.

3.2.3 Circunferencias tangentes a una circunferencia en un punto de ella conocido el radio de la solución

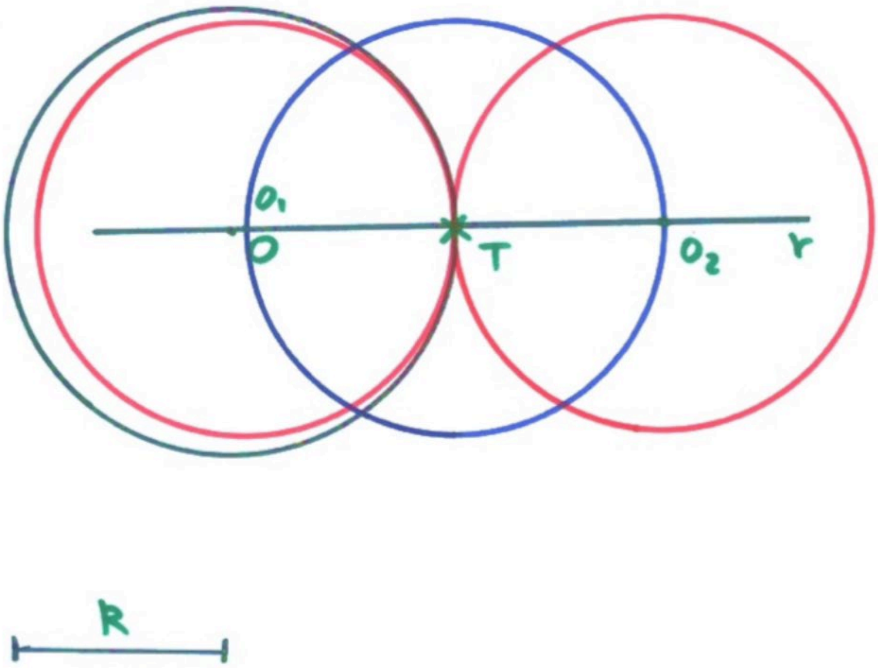

Ilustración 6 Circunferencias tangentes a una circunferencia en un punto de ella conocido el radio de la solución

Dada la circunferencia con centro en O, un punto de tangencia sobre ella T y el radio de la solución, deseamos trazar las **circunferencias tangentes a una circunferencia dado el punto de tangencia**.

Utilizando el compás, tomamos el radio proporcionado, hacemos centro en T y trazamos una circunferencia. Seguidamente trazamos la recta (r) que pase por O y por el punto T. La recta cortará a la circunferencia en los puntos O1 y O2, que serán los centros de las circunferencias solución.

3.2.4 Circunferencias tangentes a una recta y que pasen por dos puntos exteriores

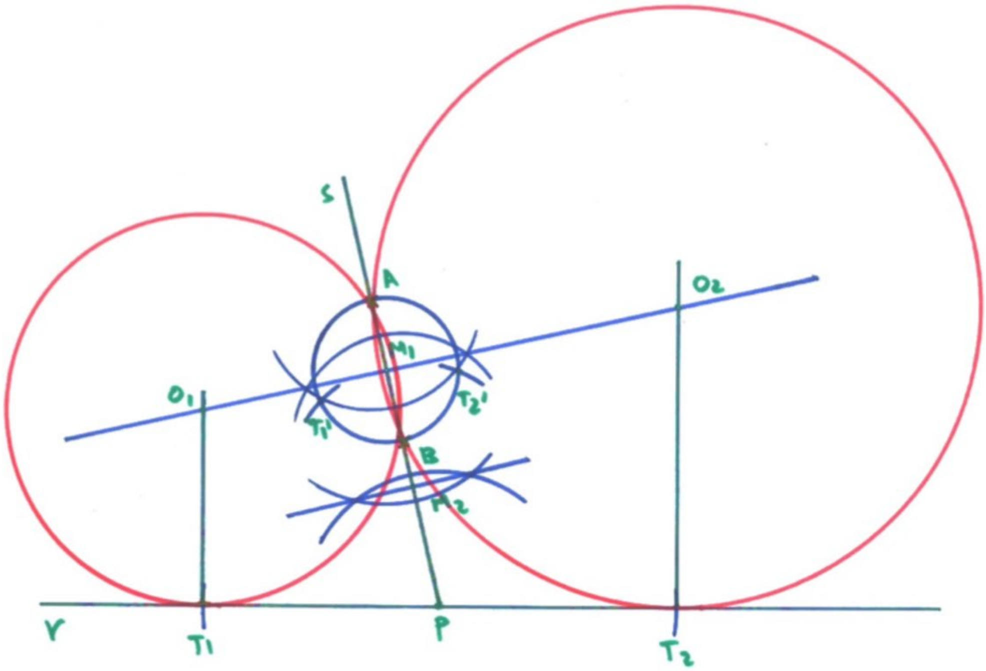

Ilustración 7 Circunferencias tangentes a una recta y que pasen por dos puntos exteriores

Dada una recta (r) y dos puntos de tangencia exteriores (A y B), deseamos trazar las **circunferencias tangentes a dos puntos exteriores**.

Para resolver el ejercicio seguiremos los siguientes pasos:

1. Unimos A con B mediante la recta (s) hasta que corte a la recta (r) en el punto P.
2. Construimos la mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, obteniéndose el punto M1.
3. Hacemos centro en M1 y trazamos una circunferencia que pase por A y B.
4. Ahora, hallamos las rectas tangentes a la circunferencia de centro M1 y un punto exterior P obteniéndose los puntos de tangencia T1’ y T2’. (Este paso está explicado en el ejercicio 3.4.1.3)
5. Una vez obtenidos los puntos de tangencia (T1’ y T2’), hacemos centro en P y tomando la distancia $\overline{\mathrm{PT1'}}$, trazamos un arco que corte a (r) en los puntos de tangencia T1 y T2.
6. Finalmente, trazamos dos rectas perpendiculares que partan de T1 y T2 hasta que corten a la mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ en los centros de las circunferencias solución (O1 y O2).

3.2.5 Circunferencias tangentes a una circunferencia y que pasen por dos puntos exteriores

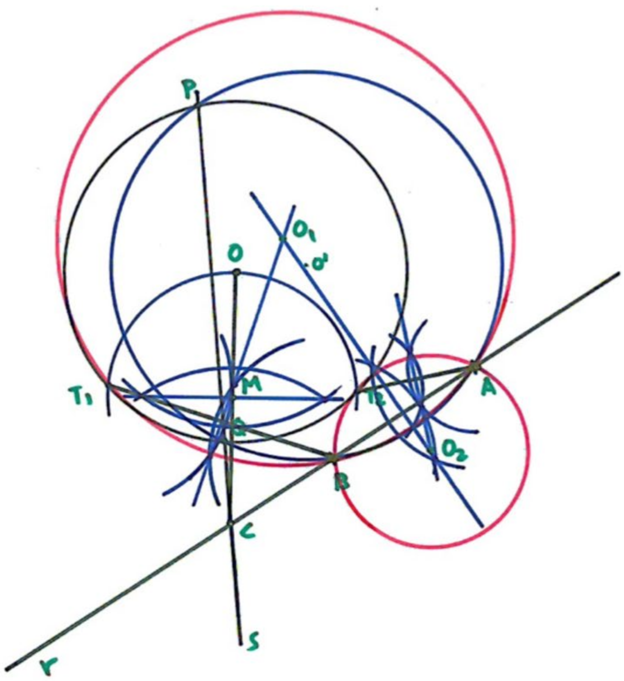

Ilustración 8 Circunferencias tangentes a una circunferencia y que pasen por dos puntos exteriores

Dada una circunferencia de centro O y dos puntos exteriores a ella A y B, deseamos trazar las **circunferencias tangentes a dos puntos exteriores.**

Para ello, debemos seguir los siguientes pasos:

1. Unimos A con B mediante la recta (r).

2. Trazamos una circunferencia cualquiera de centro O' que pase por A y B e interseccione con O en los puntos P y Q. Unimos P con Q mediante la recta (s).

3. Las rectas (r) y (s) se cortarán en el punto C, hallamos las rectas tangentes a la circunferencia de centro O obteniéndose los puntos de tangencia T1 y T2. (Este paso está explicado en el ejercicio 3.4.1.3)

4. Ahora tenemos que construir las circunferencias solución a partir de tres puntos, (A, B y T1) y (A, B y T2). Para construir la primera circunferencia unimos T1 con B y hacemos las mediatrices de los segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{BT1}}$. El punto en el que se cortarán las mediatrices será O1.

5. Para construir la segunda circunferencia unimos T2 con A y hacemos la mediatriz del 1segmentos $\overline{\mathrm{AT2}}$, ya que la mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, ya la hemos dibujado. El punto en el que se cortarán las mediatrices será O2.

6. Finalmente trazamos las circunferencias solución.

3.2.6 Circunferencias tangentes a una circunferencia en un punto de ella y que pasen por un punto exterior

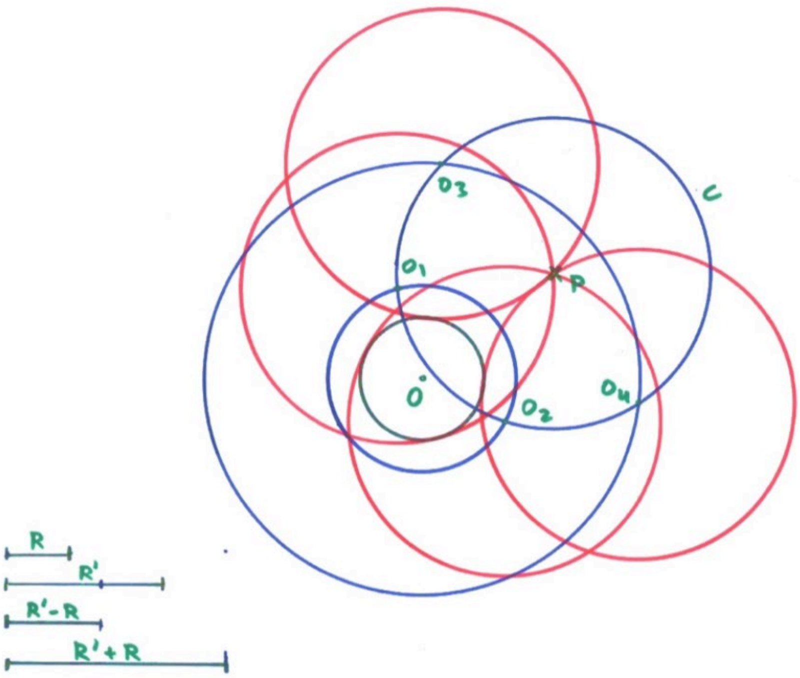

Ilustración 9 Circunferencias tangentes a una circunferencia en un punto de ella y que pasen por un punto exterior

Dada una circunferencia de centro O y radio R, un punto exterior P y siendo R’ el radio de la circunferencia solución, deseamos trazar las **circunferencias tangentes a una circunferencia y que pase por un punto exterior.**

Para realizar este ejercicio seguiremos los siguientes pasos:

1. Hacemos centro en P y trazamos una circunferencia (c) de radio R’.

2. Ahora, pinchamos en O y trazamos dos circunferencias, una con radio R+R’ y la otra con R-R.

3. Las intersecciones de estas circunferencias con (c) determinarán los centros de las circunferencias solución del ejercicio (O1, O2, O3 y O4).

4 Figuras homológicas

4.1 Obtención de figuras homológicas mediante afinidad

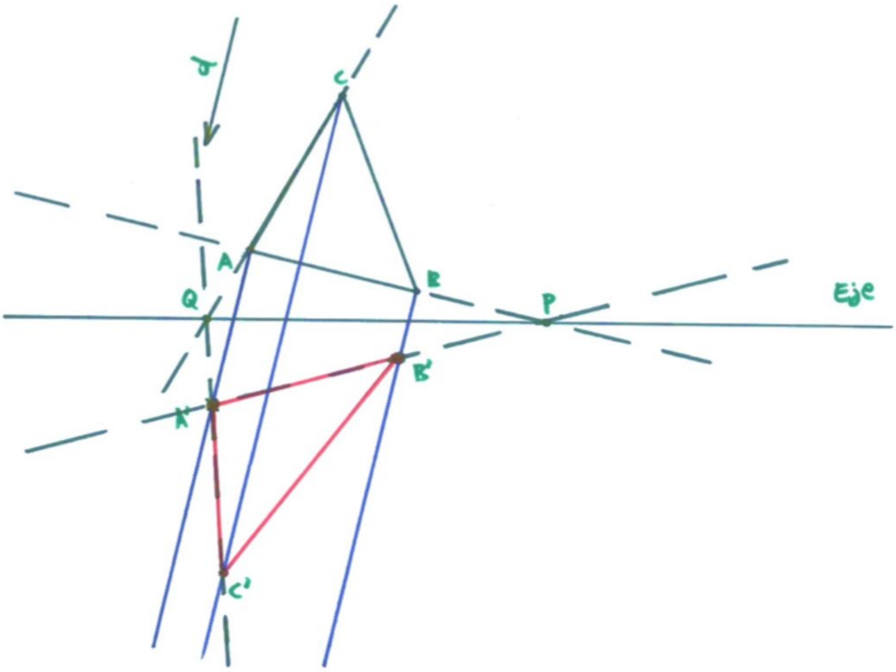

Ilustración 10 Obtención de figuras homológicas mediante afinidad

La **afinidad** es la transformación de una figura plana en otra figura que cumple que sus rectas afines son paralelas a la dirección de afinidad dada. Los puntos afines que componen las figuras interseccionan con el eje en lo que denominaremos **punto doble**.

Dada una figura, un eje impropio, una dirección de afinidad y un par de puntos afines deseamos hallar su figura homológica por **afinidad**.

En primer lugar, trazamos los haces proyectivos que parten desde los vértices de la figura, en este caso un triángulo (A, B y C). Estos haces deben trazarse paralelamente a la dirección dada.

A continuación, trazamos la recta $\overline{\mathrm{AB}}$ que cortará con el eje en el punto doble P. Unimos P con A' mediante la recta $\overline{\mathrm{PA'}}$ que cortará al haz proyectivo del vértice B dando lugar al punto B'.

Repetimos el proceso trazando la recta $\overline{\mathrm{AC}}$ y obtendremos el punto doble Q. Unimos Q con A' mediante la recta $\overline{\mathrm{QA'}}$ que cortará al haz proyecto del vértice C en el punto C', quedando la figura homológica construida.

4.2 Obtención de figuras homológicas mediante homotecia

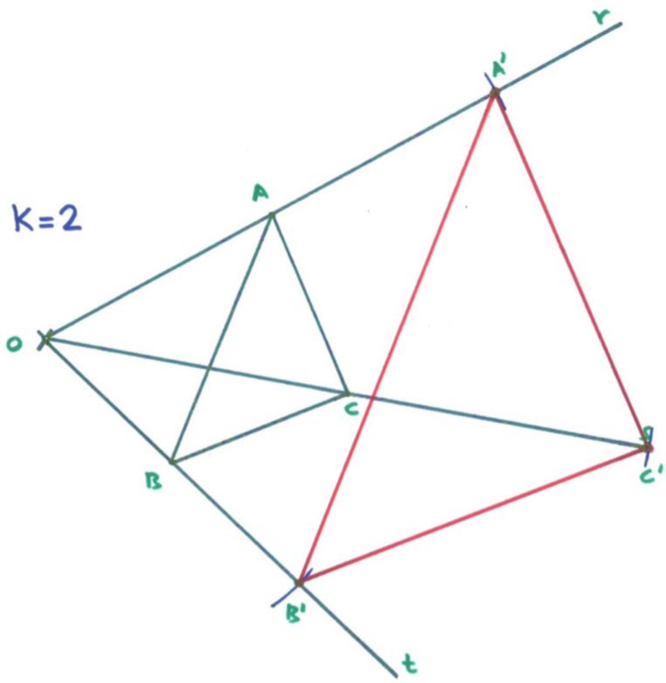

Ilustración 11 Obtención de figuras homológicas mediante homotecia

Una **homotecia** consiste en la transformación de una figura plana en otra figura proporcional de mayor o menor tamaño. Los puntos de esta nueva figura, denominados homotéticos, están multiplicados por el valor de la razón k a partir de un punto fijo (centro de homología).

Dada una figura y un centro impropio, se desea dibujar su figura homológica por **homotecia**.

Para poner en práctica este concepto, comenzamos trazando rectas desde el centro homológico O que pasen por los vértices de la figura plana.

En este caso al tratarse de un triángulo tendremos los vértices A, B y C. Unimos los vértices con O mediante las rectas r, s y t. Multiplicando por la razón k obtendremos nuevos vértices A', B' y C' quedando la figura homológica construida.

5 Curvas cónicas

5.1 Elipses

5.1.1 Trazado de la elipse a partir de circunferencias afines

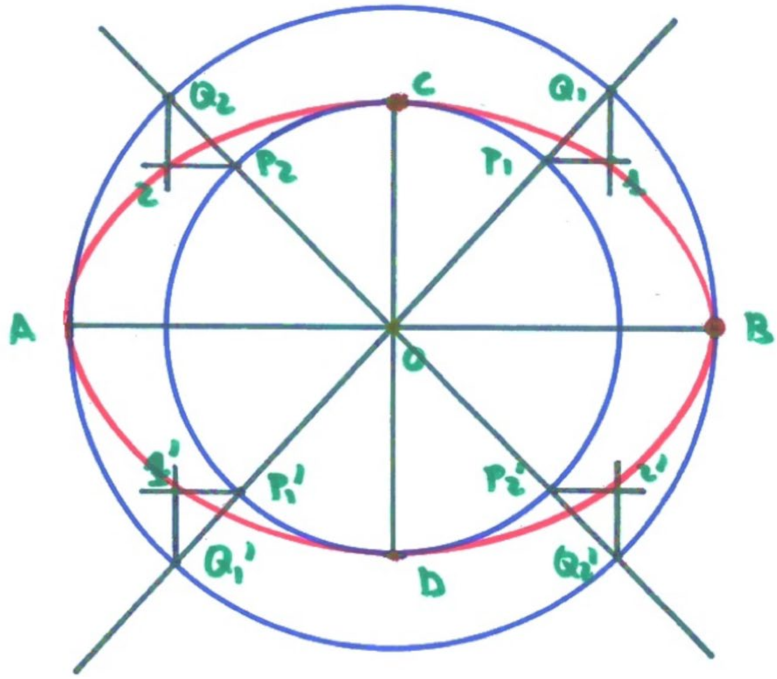

Ilustración 12 Trazado de la elipse a partir de circunferencias afines

Dados los ejes de una elipse, $\overline{AB}$ eje mayor y $\overline{CD}$ eje menor, se desea trazar la **elipse a partir de circunferencias afines**.

Comenzamos haciendo centro en O y dibujamos las circunferencias afines, una de radio $\overline{OA}$ y otra de radio $\overline{OC}$.

A continuación, trazamos una recta que pase por O que cortará a las circunferencias en 4 puntos P1, Q1, P1’ y Q1’. Ahora trazamos rectas paralelas al eje mayor que pasen por P1 y P1’ y1 rectas paralelas al eje menor que pasen por Q1 y Q1’. La intersección de P1 con Q1 nos dará el punto 1, y la intersección de P1’ con Q1’ nos dará el punto 1’.

Repetiremos este procedimiento tantas veces como creamos necesario, a mayor número de puntos obtenidos de la elipse mejor definida será su construcción. En este caso para simplificar el ejercicio solo hallaremos los puntos 2 y 2’.

Finalmente, uniendo los puntos de la elipse bien usando una plantilla de curvas o bien a mano alzada obtendremos el trazado solución.

5.1.2 Obtención de la elipse a partir de dos diámetros conjugados

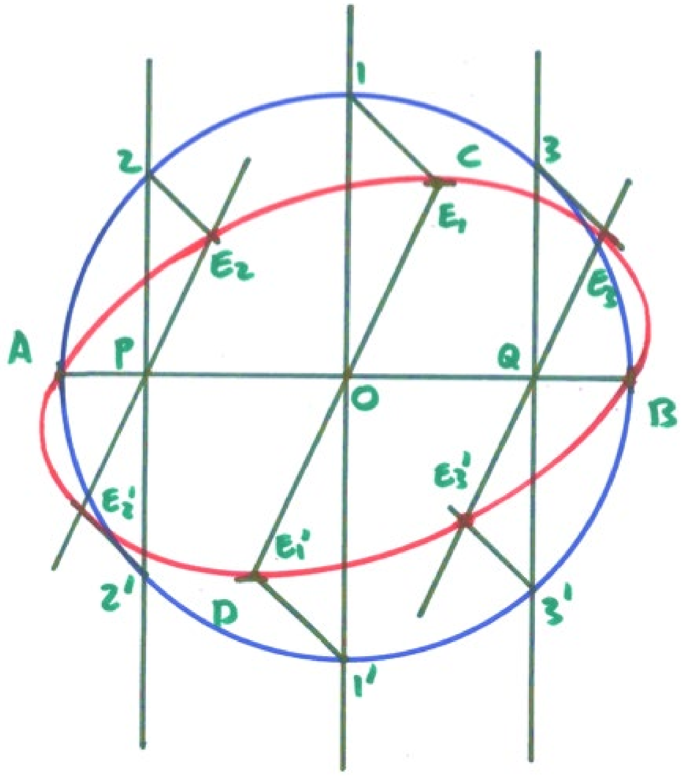

Ilustración 13 Obtención de la elipse a partir de dos diámetros conjugados

Dados los diámetros conjugados $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{CD}}$ de una elipse, se desea trazar la **elipse a partir de dos diámetros conjugados.**

En primer lugar, haciendo centro en O trazamos una circunferencia de radio $\overline{\mathrm{OA}}$, seguidamente trazamos una recta perpendicular que pase por el centro de la elipse O que cortará a la circunferencia en los puntos 1 y 1'.

A continuación, unimos los puntos obtenidos anteriormente con los extremos del diámetro conjugado $\overline{\mathrm{CD}}$. Ahora trazamos una recta perpendicular al diámetro $\overline{\mathrm{AB}}$ que lo cortará en el punto P y dibujamos una recta paralela al diámetro $\overline{\mathrm{CD}}$ que pase por el punto de intersección P.

Hecho esto trazamos rectas paralelas a $\overline{\mathrm{C1}}$ y $\overline{\mathrm{D1}}$ que cortarán con la recta paralela a $\overline{\mathrm{CD}}$ en los puntos $\overline{\mathrm{E2}}$ y $\overline{\mathrm{E2}}'$. (Los puntos $\overline{\mathrm{E1}}$ y $\overline{\mathrm{E1}}'$ son los extremos del diámetro conjugado $\overline{\mathrm{CD}}$).

Repetiremos este procedimiento tantas veces como creamos necesario, a mayor número de puntos obtenidos de la elipse mejor definida será su construcción. En este caso para simplificar ejercicio solo hallaremos los puntos $\overline{\mathrm{E3}}\ y\ \overline{\mathrm{E3}'}$.

Finalmente, uniendo los puntos de la elipse bien usando una plantilla de curvas o bien a mano alzada obtendremos el trazado solución.

5.2.1 Trazado de hipérbolas por radio vectores y trazado de asíntotas de una elipse a partir de sus diámetros conjugados

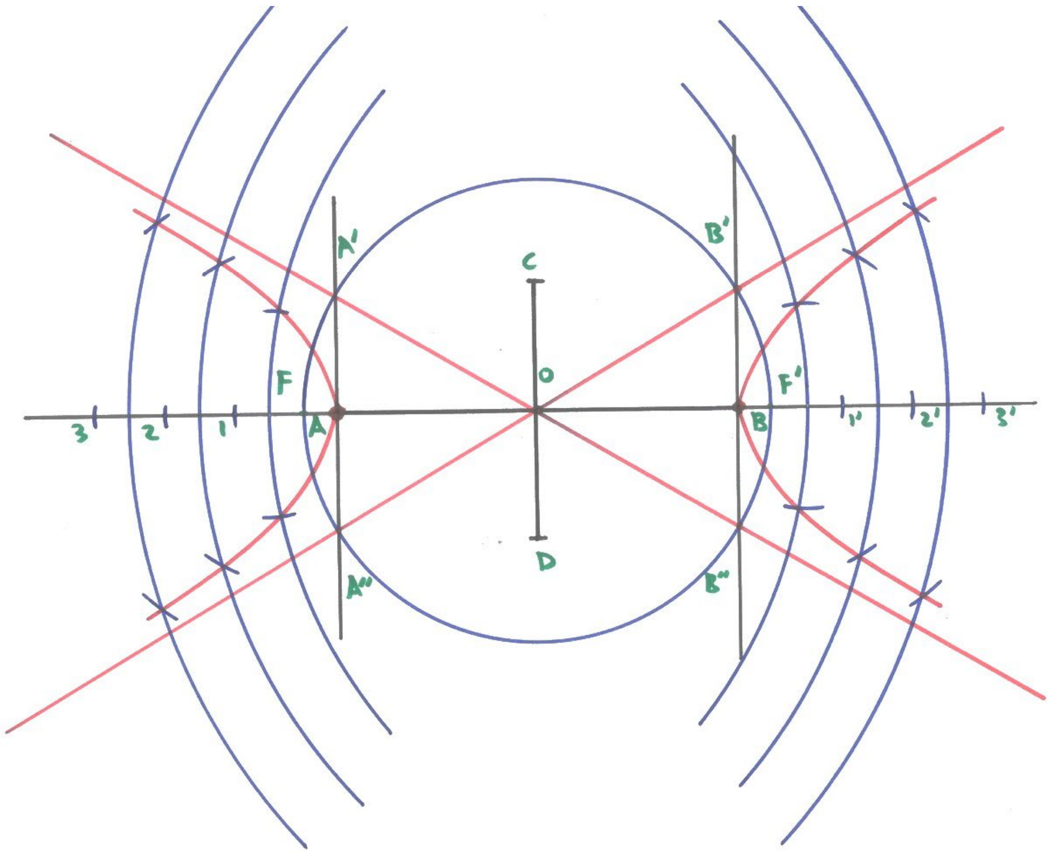

Ilustración 14 Trazado de hipérbolas por radio vectores y trazado de asíntotas de una elipse a partir de sus diámetros conjugados

Dados los ejes real $\overline{\mathrm{AB}}$ e imaginario $\overline{\mathrm{CD}}$ de una hipérbola, se desea trazar la **hipérbola por radio vectores y hallar sus asíntotas**.

Lo primero que tenemos que hacer es hallar los focos, F y F', para ello, tomamos la distancia $\overline{\mathrm{AC}}$ y haciendo centro en O trazamos una circunferencia, seguidamente trazamos una recta que pase por el eje real $\overline{\mathrm{AB}}$, dicha recta interseccionará con la circunferencia en los puntos F y F'.

A continuación, trazamos dos rectas perpendiculares, una por A y la otra por B que cortarán a la circunferencia focal en los puntos A', A'', B' y B''. Uniendo A' con B'' obtendremos la primera asíntota y uniendo B' con A'' obtendremos la segunda asíntota.

Una vez obtenidas las asíntotas vamos a dibujar la hipérbola

Tomando como origen F, trazamos una serie de arcos de igual distancia que cortarán al eje real en los puntos 1, 2, y 3 (en este caso solo dibujaremos 3).

Bien, ahora medimos la distancia B1, B2 y B3 y haciendo centro en F' dibujamos los arcos correspondientes. Ahora medimos la distancia A1, A2 y A3 haciendo centro en F dibujamos otros tres nuevos arcos que cortarán a los arcos trazados anteriormente en los puntos de la rama de la hipérbola.

Finalmente, uniendo los puntos de la hipérbola bien usando una plantilla de curvas o bien a mano alzada obtendremos la rama de la hipérbola.

Realizando el ejercicio de forma inversa podremos construir la otra rama de la hipérbola.

5.2.2 Trazado de parábolas a partir de haces proyectivos

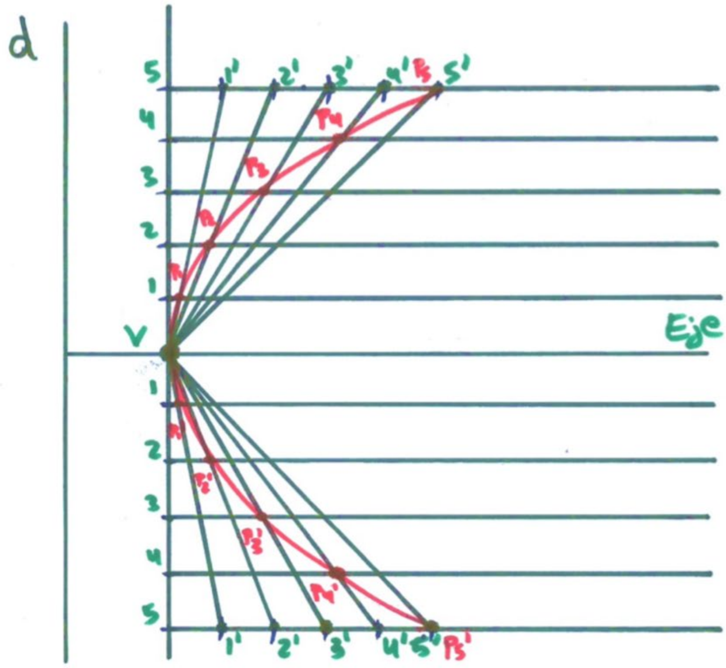

Ilustración 15 Trazado de parábolas a partir de haces proyectivos

Dado el eje de la parábola, su vértice V y su directriz d, se desea dibujar la **parábola por haces proyectivos**.

Para ello, trazamos una recta perpendicular al eje que pase por el vértice, seguidamente dibujamos arcos de una misma distancia que cortarán a la recta en los puntos 1, 2, 3, 4 y 5.

A continuación, trazamos rectas paralelas al eje que pasen por estos puntos y en la recta 5 dibujamos arcos con la misma distancia que cortarán en los puntos 1’, 2’, 3’, 4’ y 5’.

Ahora dibujamos rectas con origen en V y que pasen por 1’, 2’, 3’, 4’ y 5’. La intersección de las rectas anteriores con las rectas paralelas al eje (1, 2, 3, 4 y 5), dará lugar a los puntos de la parábola (P1, P2, P3, P4 y P5).

De esta forma obtendremos los puntos de media parábola (P1, P2, P3, P4 y P5), repitiendo el proceso en la parte inferior del eje obtendremos los puntos restantes para completar la parábola (P1’, P2’, P3’, P4’ y P5’).

Finalmente, uniendo los puntos de la parábola bien usando una plantilla de curvas o bien a mano alzada obtendremos la parábola.