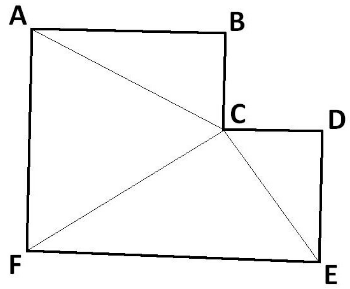
9. MEDICIONES Y CUBICACIONES

9.1) Se necesita medir la superficie de un solar como el representado en la figura. Para ello se realizó el croquis correspondiente y se midieron las alineaciones con cinta métrica. Los datos obtenidos fueron:

$D_{AB} = 13{,}77\ m$ $D_{BC} = 6{,}35\ m$ $D_{CD} = 6{,}56\ m$

$D_{DE} = 9{,}06\ m$ $D_{EF} = 20{,}06\ m$ $D_{FA} = 15{,}57\ m$

$D_{AC} = 15{,}02\ m$ $D_{FC} = 16{,}55\ m$ $D_{CE} = 11{,}11\ m$



La descomposición de una parcela en triángulos puede establecerse de distintas formas. En nuestro caso, vamos a realizarla tal como se muestra en la figura adjunta. Como valor de la superficie de la parcela, daremos la suma de las áreas de los tres triángulos formados. Calcularemos la superficie de cada triángulo aplicando la fórmula de Heron.

- Triángulo *ABC*: El semiperímetro *p* se calcula:

$$p = \frac{D_{AB} + D_{BC} + D_{AC}}{2} = 17{,}57\ m$$

y, aplicando la formula de Heron:

$$S_{ABC} = \sqrt{P\,(P - D_{AB})(P - D_{BC})(P - D_{AC})} = 43{,}71\,m^2$$

- Triángulo *ACF*:

$$p = \frac{D_{AC} + D_{FC} + D_{FA}}{2} = 23{,}57\ m$$

$$S_{ACF} = \sqrt{P\,(P - D_{AC})(P - D_{FC})(P - D_{FA})} = 106{,}38\,m^2$$

- Triángulo *FCE*:

$$p = \frac{D_{FC} + D_{CE} + D_{EF}}{2} = 23{,}86\ m$$

$$S_{FCE} = \sqrt{P\,(P - D_{FC})(P - D_{CE})(P - D_{EF})} = 91{,}93\,m^2$$

- Triángulo *CDE*:

$$p = \frac{D_{CD} + D_{DE} + D_{CE}}{2} = 13{,}365\ m$$

$$S_{CDE} = \sqrt{P\,(P - D_{CD})(P - D_{DE})(P - D_{CE})} = 29{,}71\,m^2$$

- Superficie del solar: Se obtiene sumando las superficies de los triángulos formados:

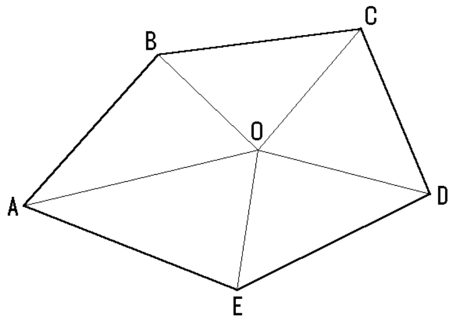
$$S_T = S_{ABC} + S_{ACF} + S_{FCE} + S_{CDE} = 271{,}73\,m^2$$

9.2) Se estacionó un instrumento topográfico en un punto O central de una parcela, se visaron los puntos que la limitaban y se tomaron los siguientes datos de campo:

Estación	Punto	L. acimutal	D.reducida
O	**A**	$7,447^g$	**346,237m**
	B	$61,808^g$	**226,497m**
	C	$166,167^g$	**255,431m**
	D	$243,482^g$	**252,549m**
	E	$328,208^g$	**234,269m**

Calcula la superficie de la parcela, por el método de radiación.

A partir de las visuales, dividimos la parcela en triángulos. En cada triángulo conocemos dos lados y el ángulo comprendido, lo que nos permite calcular su superficie.



- Cálculo de ángulos interiores:

$$A\hat{O}B = L_O^B - L_O^A = 54,361^g$$
$$B\hat{O}C = L_O^C - L_O^B = 104,359^g$$
$$C\hat{O}D = L_O^D - L_O^C = 77,315^g$$
$$D\hat{O}E = L_O^E - L_O^D = 84,726^g$$
$$E\hat{O}A = L_O^A - L_O^E = -320,761 = 79,239^g$$

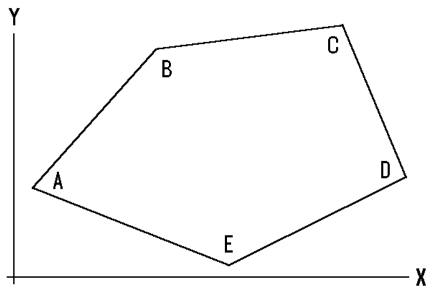
- Cálculo de la superficie:

$$S_{AOB} = \frac{D_{OA}\ D_{OB}\ \mathrm{sen}\ A\hat{O}B}{2} = 29.559,038\ m^2$$
$$S_{BOC} = \frac{D_{OB}\ D_{OC}\ \mathrm{sen}\ B\hat{O}C}{2} = 28.859,395\ m^2$$
$$S_{COD} = \frac{D_{OC}\ D_{OD}\ \mathrm{sen}\ C\hat{O}D}{2} = 30.228,250\ m^2$$
$$S_{DOE} = \frac{D_{OD}\ D_{OE}\ \mathrm{sen}\ D\hat{O}E}{2} = 28.734,853\ m^2$$
$$S_{EOA} = \frac{D_{OE}\ D_{OA}\ \mathrm{sen}\ E\hat{O}A}{2} = 38.418,768\ m^2$$

Obtenemos la superficie total de la parcela sumando las superficies de los cinco triángulos:

$$S_T = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOE} + S_{EOA} = 155.800,304 m^2$$

9.3) Una parcela está limitada por cinco puntos, de coordenadas:



$X_A = 108m$	$Y_A = 246m$
$X_B = 276m$	$Y_B = 445m$
$X_C = 624m$	$Y_C = 487m$
$X_D = 684m$	$Y_D = 205m$
$X_E = 411m$	$Y_E = 69m$

Calcula la superficie de la parcela utilizando el método de coordenadas cartesianas.

- Aplicamos directamente las expresiones de cálculo de superficies, a partir de las coordenadas cartesianas de los puntos que limitan la parcela:

$$S=\frac{1}{2}[\,X_A(\,Y_E-Y_B\,)+X_B(\,Y_A-Y_C\,)+X_C\ (\,Y_B-Y_D\,)+$$
$$+X_D(\,Y_C-Y_E\,)+X_E(\,Y_D-Y_A\,)\,]=155.848{,}50\,m^2$$

Calculamos la superficie respecto al otro eje, como comprobación:

$$S=\frac{1}{2}[\,Y_A(\,X_E-X_B\,)+Y_B(\,X_A-X_C\,)+Y_C\ (\,X_B-X_D\,)+$$
$$+Y_D(\,X_C-X_E\,)+Y_E(\,X_D-X_A\,)\,]=-155.848{,}50\,m^2$$

- También podemos calcular la superficie así:

$$S=\frac{1}{2}[\,(\,X_B-X_A\,)(\,Y_B+Y_A\,)+(\,X_C-X_B\,)(\,Y_C+Y_B\,)+$$
$$+(\,X_D-X_C\,)(\,Y_D+Y_C\,)+(\,X_E-X_D\,)(\,Y_E+Y_D\,)+(\,X_A-X_E\,)(\,Y_A+Y_E\,)\,]=155.848{,}50m^2$$

Como comprobación del método anterior podemos hacer:

$$S=\frac{1}{2}[\,(\,Y_B-Y_A\,)(\,X_B+X_A\,)+(\,Y_C-Y_B\,)(\,X_C+X_B\,)+$$
$$+(\,Y_D-Y_C\,)(\,X_D+X_C\,)+(\,Y_E-Y_D\,)(\,X_E+X_D\,)+(\,Y_A-Y_E\,)(\,X_A+X_E\,)\,]=-155.848{,}50m^2$$

9.4) *Calcula el movimiento de tierras a efectuar entre dos perfiles del proyecto de una carretera, distantes 25m. Las superficies de las secciones se midieron sobre un plano a escala 1:200. La primera sección es en desmonte y su superficie sobre plano es 6,42cm^2. La segunda es en terraplén y su superficie sobre plano es 10,85cm^2.*

Las superficies de las dos secciones vienen dadas a la escala del plano. Antes de calcular el movimiento de tierras debemos determinar sus superficies reales.

- Transformación de superficies, según la escala:

$$S_D=6{,}42\frac{200^2}{10.000}=25{,}68\,m^2$$
$$S_T=10{,}85\frac{200^2}{10.000}=43{,}40\,m^2$$

Puesto que se trata de perfiles de distinto tipo, uno en desmonte y otro en terraplén, suponemos que existe un perfil intermedio en que la rasante y el terreno coinciden. Este perfil tendrá una superficie nula. Las distancias reducidas entre el perfil intermedio y cada uno de los otros, se suponen proporcionales a las superficies S_D y S_T.

- Cálculo de distancias parciales:

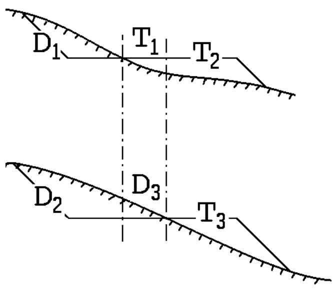
$$d_1=\frac{S_D}{S_D+S_T}\ d=\frac{25{,}68}{25{,}68+43{,}40}\ 25=9{,}29m$$
$$d_2=\frac{S_T}{S_D+S_T}\ d=\frac{43{,}40}{25{,}68+43{,}40}\ 25=15{,}71m$$

- Cálculo de volúmenes: aplicamos las expresiones de cálculo entre cada uno de los perfiles extremos y el perfil intermedio:

$$V_D = \frac{S_D}{2}\ d_1 = \frac{25,68}{2}\ 9,29 = 119,28\ m^3$$
$$V_T = \frac{S_T}{2}\ d_2 = \frac{43,40}{2}\ 15,71 = 340,83\ m^3$$

La primera parte, entre el primer perfil y el intermedio, será en desmonte; la segunda parte, entre el perfil intermedio y el perfil final, será en terraplén.

9.5) ***Calcula los volúmenes de tierras a mover entre los dos perfiles que se representan en la figura, sabiendo que la distancia entre ellos es de 25m. Las superficies, medidas sobre un plano a escala 1:200, son las siguientes:***



D_1 = 8,50cm²	***T_1 = 2,40cm²***
D_2 = 15,20cm²	***T_2 = 9,90cm²***
D_3 = 2,70cm²	***T_3 = 9,80cm²***

- Como en el ejercicio anterior, debemos calcular las superficies reales de cada sección, aplicando el factor de escala. Transformación de superficies, según la escala:

$$D_1 = \frac{8,50}{10.000}\ 200^2 = 34,00\ m^2$$
$$D_2 = \frac{15,20}{10.000}\ 200^2 = 60,80\ m^2$$
$$D_3 = \frac{2,70}{10.000}\ 200^2 = 10,80\ m^2$$
$$T_1 = \frac{2,40}{10.000}\ 200^2 = 9,60\ m^2$$
$$T_2 = \frac{9,90}{10.000}\ 200^2 = 39,60\ m^2$$
$$T_3 = \frac{9,80}{10.000}\ 200^2 = 39,20\ m^2$$

- Cálculo del volumen entre las superficies D_1 y D_2: como son perfiles del mismo tipo, en desmonte, aplicamos directamente la expresión:

$$V_{D_1D_2} = \frac{D_1 + D_2}{2}\ d = \frac{34,00 + 60,80}{2}\ 25 = 1.185\ m^3$$

- Cálculo del volumen entre las superficies T_1 y D_3: determinamos las distancias parciales a una sección intermedia de superficie nula:

$$d_1 = \frac{T_1}{T_1 + D_3}\ d = 11,76m$$
$$d_2 = \frac{D_3}{T_1 + D_3}\ d = 13,24m$$

Los volúmenes de tierras a mover son:

$$V_{T_1} = \frac{T_1}{2}\ d_1 = 56,47\ m^3$$

$$V_{D3} = \frac{D_3}{2}\ d_2 = 71,47\ m^3$$

• Cálculo del volumen entre las superficies T_2 y T_3: los dos perfiles son en terraplén.

$$V_{T_2T_3} = \frac{T_2 + T_3}{2}\ d = 985,00\ m^3$$

Volumen total: se suman todos los volúmenes en desmonte, por un lado, y todos los volúmenes en terraplén, por otro lado:

$$V_D = V_{D_1D_2} + V_{D_3} = 1.256,47\ m^3$$

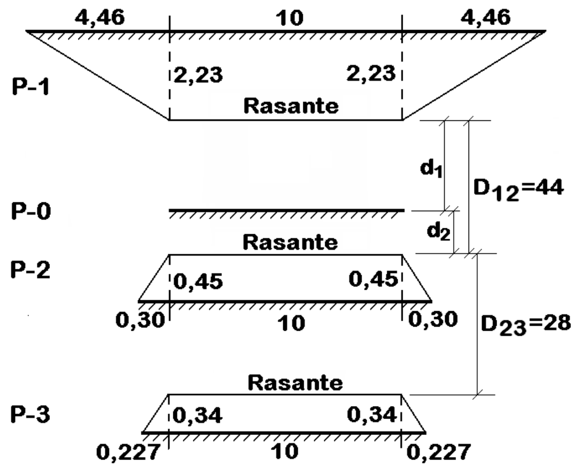
$$V_T = V_{T_1} + V_{T_2T_3} = 1.041,47\ m^3$$

9.6) *Calcula el movimiento de tierras a realizar entre tres perfiles consecutivos de un proyecto, con los siguientes datos:*
Rasante y terreno se consideran horizontales, en sentido transversal, en los tres perfiles. La anchura de la rasante es de 10m.
Pendiente de los taludes laterales: en desmonte 1/2 en terraplén 3/2

Altitudes	***Rasante***	***Terreno***
Perfil 1	***82,44***	***84,67***
Perfil 2	***81,92***	***81,47***
Perfil 3	***81,60***	***81,26***

Distancias entre perfiles: ***D_{12} = 44m*** ***D_{23} = 28m***

• Dibujamos los tres perfiles transversales teniendo en cuenta la anchura de la rasante, las diferencias de altitud entre rasante y terreno en cada uno de ellos y la pendiente de los taludes laterales. Como se aprecia en la figura adjunta, los tres perfiles tendrán forma de trapecio regular, ya que tanto el terreno como la rasante son horizontales en sentido transversal:



Perfil 1 (desmonte):

$$\text{cota roja} = 84,67 - 82,44 = 2,23m$$

$$p = \frac{1}{2} = \frac{2,23m}{x} \qquad x = 4,46m$$

Perfil 2 (terraplén):

$$\text{cota roja} = 81,92 - 81,47 = 0,45m$$

$$p = \frac{3}{2} = \frac{0,45m}{x} \qquad x = 0,30m$$

Perfil 3 (terraplén):

$$\text{cota roja} = 81,60 - 81,26 = 0,34m$$

$$p = \frac{3}{2} = \frac{0,34m}{x} \qquad x = 0,227m$$

Calculamos, en cada perfil, la superficie comprendida entre la rasante, el terreno y los taludes laterales. Como se aprecia en la figura:

$$S_{D1} = \frac{10 + (10 + 4,46 + 4,46)}{2} 2,23 = 32,246m^2$$

$$S_{T2} = \frac{10 + (10 + 0,30 + 0,30)}{2} 0,45 = 4,635m^2$$

$$S_{T3} = \frac{10 + (10 + 0,227 + 0,227)}{2} 0,34 = 3,477m^2$$

- Como los perfiles *1* y *2* son de distinto tipo, suponemos un perfil intermedio de superficie nula y calculamos las distancias a *1* y a *2*. Las distancias serán proporcionales a las superficies de los perfiles:

$$d_1 = \frac{S_{D1}}{S_{D1} + S_{T2}} D_{12} = 38,470m$$

$$d_2 = \frac{S_{T2}}{S_{D1} + S_{T2}} D_{12} = 5,530m$$

Los volúmenes de tierras a mover entre *1* y *2* serán:

$$V_{D12} = \frac{S_{D1} + 0}{2} d_1 = 620,250m^3$$

$$V_{T12} = \frac{0 + S_{T2}}{2} d_2 = 12,816m^3$$

Los perfiles *2* y *3* son del mismo tipo. Por tanto, se puede calcular directamente el movimiento de tierras entre ellos:

$$V_{T23} = \frac{S_{T2} + S_{T3}}{2} D_{23} = 113,568m^3$$

El movimiento de tierras total será:

$$Desmonte: \quad V_{D12} = 620,250m^3$$

$$Terraplén: \quad V_{T12} + V_{T23} = 126,384m^3$$

9.7) Se desea realizar el trazado de una vía de comunicación. Para ello se realiza la nivelación del eje de la misma, obteniéndose los siguientes datos:

Punto	***Cota***	***Distancia***
1	***50,00m***	
2	***49,77m***	***1-2 = 51m***
3	***49,60m***	***2-3 = 53m***
4	***49,88m***	***3-4 = 60m***
5	***49,78m***	***4-5 = 45m***
6	***49,04m***	***5-6 = 56m***
7	***49,56m***	***6-7 = 45m***
8	***49,28m***	***7-8 = 50m***
9	***49,20m***	***8-9 = 20m***

Traza el perfil longitudinal completo (modelo oficial) suponiendo la rasante de la vía de comunicación de pendiente uniforme y coincidente con los puntos 1 y 9. Calcula el movimiento de tierras a realizar entre los perfiles 3 y 4, suponiendo el

ancho de la vía de comunicación de 6,00m, los taludes laterales de pendiente 1:2 y el terreno horizontal a ambos lados del eje de dicha vía.

• Las cotas que se dan en el enunciado del ejercicio corresponden al terreno. Para trazar el perfil longitudinal, necesitamos calcular las cotas de la rasante en los mismos puntos.

Pendiente de la rasante: $p = (0{,}8/380) = 0{,}0021 = 0{,}21\%$

Cotas de la rasante:

La cota de la rasante en el punto *1* coincide con la del terreno:

$$Cota\ rasante_{Punto\ 1} = 50m$$

$$Cota\ rasante_{Punto\ 2} = 50 - Z_1^2 = 49{,}89m$$

$$Z_1^2 = p\ \ D_{1\text{-}2} = 0{,}0021\ \ D_{1\text{-}2} = 0{,}11m$$

$$Cota\ rasante_{Punto\ 3} = 50 - Z_1^3 = 49{,}78m$$

$$Z_1^3 = 0{,}0021\ \ D_{1\text{-}3} = 0{,}22m$$

$$Cota\ rasante_{Punto\ 4} = 50 - Z_1^4 = 49{,}65m$$

$$Z_1^4 = 0{,}0021\ \ D_{1\text{-}4} = 0{,}35m$$

$$Cota\ rasante_{Punto\ 5} = 50 - Z_1^5 = 49{,}56m$$

$$Z_1^5 = 0{,}0021\ \ D_{1\text{-}5} = 0{,}44m$$

$$Cota\ rasante_{Punto\ 6} = 50 - Z_1^6 = 49{,}44m$$

$$Z_1^6 = 0{,}0021\ \ D_{1\text{-}6} = 0{,}56m$$

$$Cota\ rasante_{Punto\ 7} = 50 - Z_1^7 = 49{,}35m$$

$$Z_1^7 = 0{,}0021\ \ D_{1\text{-}7} = 0{,}65m$$

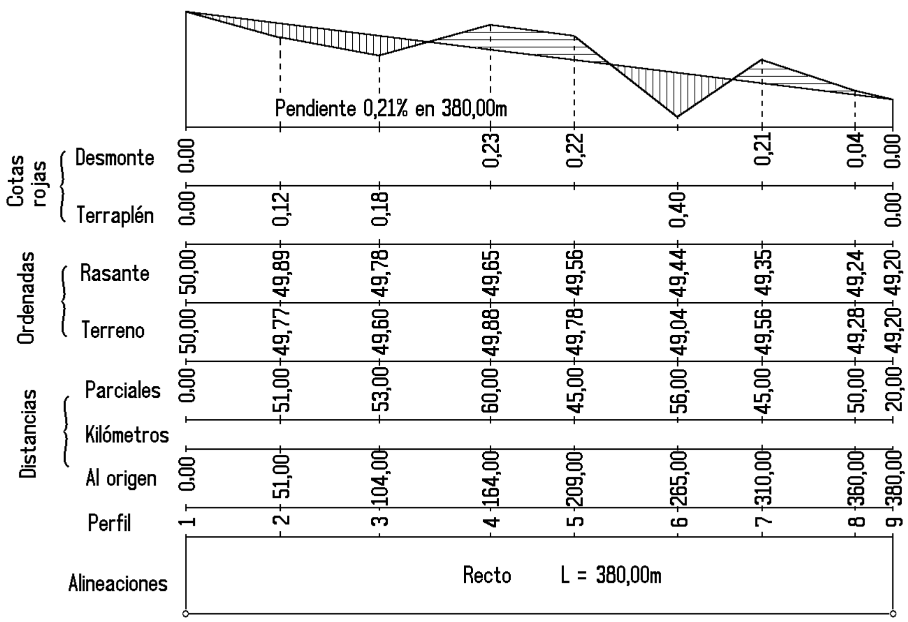
$$Cota\ rasante_{Punto\ 8} = 50 - Z_1^8 = 49{,}24m$$

$$Z_1^8 = 0{,}0021\ \ D_{1\text{-}8} = 0{,}76m$$

La cota de la rasante del punto *9* coincide con la del terreno:

$$Cota\ rasante_{Punto\ 9} = 49{,}20m$$

Perfil longitudinal:

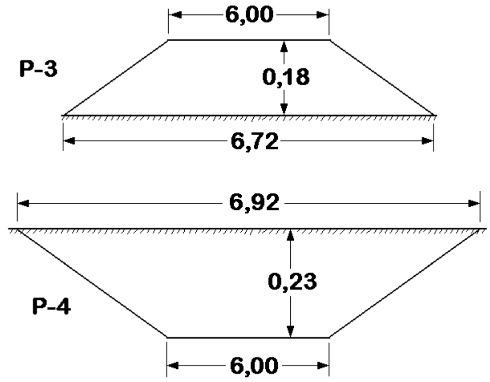


• Calculamos a continuación el movimiento de tierras entre los perfiles *3* y *4*, que se muestran en la figura adjunta. Las alturas (*0,18m* y *0,23m* respectivamente) corresponden a las cotas rojas del perfil longitudinal. La distancia que figura en el perfil longitudinal es $d = 60m$. Los taludes laterales tienen pendiente *1:2*. Las superficies correspondientes a los perfiles transversales serán, respectivamente:

$$T_3 = \frac{6{,}00 + 6{,}72}{2}\,0{,}18 = 1{,}1448\,m^2$$

$$D_4 = \frac{6{,}92 + 6{,}00}{2}\,0{,}23 = 1{,}4858\,m^2$$

y los volúmenes de tierras a mover:



$$d_1 = \frac{T_3}{T_3 + D_4}\,d = 26{,}111m$$

$$d_2 = \frac{D_4}{T_3 + D_4}\,d = 33{,}889m$$

$$V_T = \frac{T_3 + 0}{2}\,d_1 = 14{,}946\,m^3$$

$$V_{D_4} = \frac{D_4 + 0}{2}\,d_2 = 25{,}176\,m^3$$

El primero en terraplén y el segundo en desmonte.

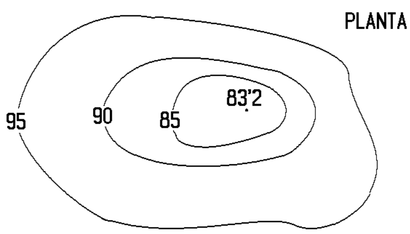
9.8) Se desea calcular el volumen de tierras necesario para rellenar una hondonada, hasta dejar una explanada a cota 95m. Para ello se determinaron, sobre un plano a escala 1:2.000 las superficies interiores a cada una de las curvas de nivel, que fueron:

$$\boldsymbol{S_{95} = 20{,}3\ cm^2}$$
$$\boldsymbol{S_{90} = 5{,}7\ cm^2}$$
$$\boldsymbol{S_{85} = 2{,}1\ cm^2}$$

Calcula el volumen total (en m^3) de tierras a emplear para rellenar la hondonada.

• Transformamos las superficies, medidas sobre plano, a superficies terreno. En este caso, el método de cubicación a emplear es el de las curvas de nivel.

Transformación de superficies, según la escala:

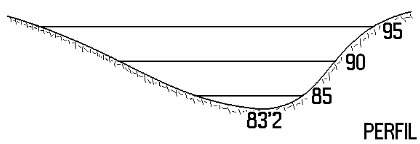


$$S_{95} = \frac{20{,}3\ \ 2.000^2}{10.000} = 8.120\,m^2$$

$$S_{90} = \frac{5{,}7\ \ 2.000^2}{10.000} = 2.280\,m^2$$

$$S_{85} = \frac{2{,}1\ \ 2.000^2}{10.000} = 840\,m^2$$

$$S_{83,2} = 0m^2$$



• Cálculo de volúmenes: calculamos el volumen entre cada dos curvas de nivel consecutivas multiplicando la equidistancia (*5m*) por la superficie media:

$$V_{95-90} = \frac{S_{95} + S_{90}}{2}\ 5 = 26.000\,m^3$$

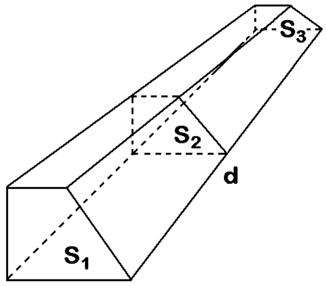
$$V_{90-85} = \frac{S_{90} + S_{85}}{2}\ 5 = 7.800\ m^3$$

$$V_{85-83,2} = \frac{S_{85} + S_{83,2}}{2}\ 1,8 = 756\ m^3$$

Volumen total:

$$V_{total} = V_{95\text{-}90} + V_{90\text{-}85} + V_{85\text{-}83,2} = 34.556 m^3$$

9.9) ***Para calcular el volumen de una zapata de hormigón se aplica el método del prismatoide. Se han medido las superficies de las dos caras extremas, obteniendo unas superficies de S_1 = 2,401 y S_3 = 2,571m^2. Sabiendo que la superficie media es S_2 = 2,5m^2 y la longitud de la zapata es 15m, calcula su volumen.***

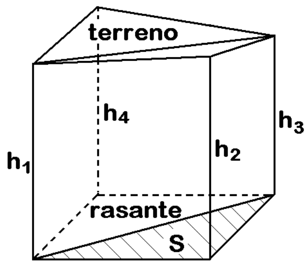


Se aplica la expresión estudiada para el método del prismatoide:

$$V = d\ \frac{S_1 + 4\ \ S_2 + S_3}{6} = 15\ \frac{2,403 + 4\ \ 2,5 + 2,571}{6} = 37,435 m^3$$

9.10) ***Se necesita calcular el volumen de tierras a extraer en la excavación de una obra. Para ello disponemos de los desniveles, en cada una de las esquinas, entre el terreno y la rasante. Sabiendo que la superficie horizontal es un cuadrado de 5m de lado y que se ha adaptado al terreno mediante triángulos, calcula el volumen mediante el método del prisma de base triangular, más preciso, y mediante el método de la cuadrícula.***

h_1 = 3,851 m
h_2 = 3,993 m
h_3 = 3,745 m
h_4 = 4,018 m



Comenzamos calculando el volumen aplicando el método del prisma de base triangular, que tiene la virtud de adaptarse con más precisión al terreno.

- Cálculo de la superficie de los triángulos: En este caso esta superficie se determina mediante la expresión de cálculo de superficie de un triángulo rectángulo. Si se tratase de un triángulo irregular podríamos aplicar la formula de Herón:

$$S = \frac{b\ \ h}{2} = \frac{5\ \ 5}{2} = 12,50\ m^2$$

- Cálculo de volumen: Se aplica la expresión en los dos prismas de base triangular que se generan en este caso:

$$V_1 = S\ \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} = 12,5\ \frac{3,851 + 3,993 + 3,745}{3} = 48,288\ m^3$$

$$V_2 = S\ \frac{h_1 + h_3 + h_4}{3} = 12,5\ \frac{3,851 + 3,745 + 4,018}{3} = 48,392\ m^3$$

El volumen final se obtiene sumando los volúmenes parciales:

$$V_T = V_1 + V_2 = 96{,}680\ m^3$$

- Cálculo de volumen mediante el método de la cuadrícula: En este caso se aplica directamente la expresión de cálculo:

$$V = S\,\frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} = 25\,\frac{3{,}851 + 3{,}993 + 3{,}745 + 4{,}018}{4} = 97{,}544\ m^3$$

9.11) Calcula el volumen de tierras que debe ser extraído de la parcela para obtener una superficie horizontal de cota $Z_0 = 42m$.
Se traza sobre el terreno una cuadrícula de 10m de lado, tal como se muestra en la figura adjunta. La cota del terreno en cada uno de los puntos es la siguiente:

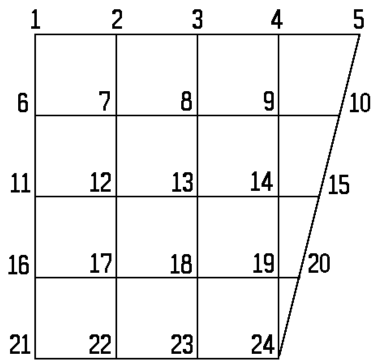
$Z_1 = 44{,}01m$	$Z_9 = 43{,}82m$	$Z_{17} = 43{,}82m$
$Z_2 = 43{,}98m$	$Z_{10} = 43{,}78m$	$Z_{18} = 43{,}75m$
$Z_3 = 43{,}91m$	$Z_{11} = 43{,}89m$	$Z_{19} = 43{,}68m$
$Z_4 = 43{,}85m$	$Z_{12} = 43{,}87m$	$Z_{20} = 43{,}66m$
$Z_5 = 43{,}81m$	$Z_{13} = 43{,}83m$	$Z_{21} = 43{,}78m$
$Z_6 = 43{,}95m$	$Z_{14} = 43{,}75m$	$Z_{22} = 43{,}72m$
$Z_7 = 43{,}92m$	$Z_{15} = 43{,}70m$	$Z_{23} = 43{,}63m$
$Z_8 = 43{,}85m$	$Z_{16} = 43{,}86m$	$Z_{24} = 43{,}51m$

Se trata de un ejercicio de aplicación del método de la cuadrícula.

- Determinación de volúmenes en los cuales la sección recta del prisma es un cuadrado: Se aplica la expresión:

$$V_{1-2-6-7} = S\,\frac{(Z_1 - Z_0) + (Z_2 - Z_0) + (Z_6 - Z_0) + (Z_7 - Z_0)}{4}$$

$V_{1\text{-}2\text{-}6\text{-}7} = 196{,}50m^3$
$V_{2\text{-}3\text{-}7\text{-}8} = 191{,}50m^3$
$V_{3\text{-}4\text{-}8\text{-}9} = 185{,}75m^3$
$V_{6\text{-}7\text{-}11\text{-}12} = 190{,}75m^3$
$V_{7\text{-}8\text{-}12\text{-}13} = 186{,}75m^3$
$V_{8\text{-}9\text{-}13\text{-}14} = 181{,}25m^3$
$V_{11\text{-}12\text{-}16\text{-}17} = 186{,}00m^3$
$V_{12\text{-}13\text{-}17\text{-}18} = 181{,}75m^3$
$V_{13\text{-}14\text{-}18\text{-}19} = 175{,}25m^3$
$V_{16\text{-}17\text{-}21\text{-}22} = 179{,}50m^3$
$V_{17\text{-}18\text{-}22\text{-}23} = 173{,}00m^3$
$V_{18\text{-}19\text{-}23\text{-}24} = 164{,}25m^3$



- Determinación de volúmenes en los cuales la sección recta del prisma es una superficie cuadrangular, pero no un cuadrado:

$$S_{4-5-9-10} = D_{4-9}\,\frac{D_{4-5} + D_{9-10}}{2} = 10\,\frac{10 + \frac{10\;\;30}{40}}{2} = 87{,}50\,m^2$$

$$Z_{4-5-9-10} = \frac{(Z_4 - Z_0) + (Z_5 - Z_0) + (Z_9 - Z_0) + (Z_{10} - Z_0)}{4}$$

$$V_{4-5-9-10} = S_{4-5-9-10} \quad Z_{4-5-9-10} = 158{,}81\, m^3$$

$$S_{9-10-14-15} = D_{9-14} \frac{D_{9-10} + D_{14-15}}{2} = 10 \frac{\frac{10\ 30}{40} + \frac{10\ 20}{40}}{2} = 62{,}50\, m^2$$

$$Z_{9-10-14-15} = \frac{(Z_9 - Z_0) + (Z_{10} - Z_0) + (Z_{14} - Z_0) + (Z_{15} - Z_0)}{4}$$

$$V_{9-10-14-15} = S_{9-10-14-15} \quad Z_{9-10-14-15} = 110{,}17\, m^3$$

$$S_{14-15-19-20} = D_{14-19} \frac{D_{14-15} + D_{19-20}}{2} = 10 \frac{\frac{10\ 20}{40} + \frac{10\ 10}{40}}{2} = 37{,}50\, m^2$$

$$Z_{14-15-19-20} = \frac{(Z_{14} - Z_0) + (Z_{15} - Z_0) + (Z_{19} - Z_0) + (Z_{20} - Z_0)}{4}$$

$$V_{14-15-19-20} = S_{14-15-19-20} \quad Z_{14-15-19-20} = 63{,}66\, m^3$$

- Determinación de volúmenes en los cuales la sección recta del prisma es un triángulo:

$$S_{19-20-24} = \frac{D_{19-24} \quad D_{19-20}}{2} = \frac{10 \frac{10\ 10}{40}}{2} = 12{,}50\, m^2$$

$$V_{19-20-24} = S_{19-20-24} \frac{(Z_{19} - Z_0) + (Z_{20} - Z_0) + (Z_{24} - Z_0)}{3} = 20{,}21\, m^3$$

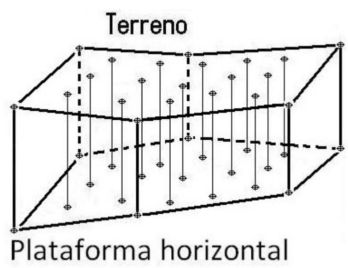
- Volumen total: Es la suma de todos los volúmenes parciales:

$$V_T = 2.545{,}10 m^3$$

9.12) *Para calcular el volumen de tierras a mover en una obra disponemos de las altitudes de una serie de puntos uniformemente distribuidos en la zona. Dichas altitudes son:*

$Z_1 = 19{,}456$ m	$Z_2 = 18{,}891$ m	$Z_3 = 18{,}903$ m	$Z_4 = 20{,}154$ m
$Z_5 = 19{,}512$ m	$Z_6 = 18{,}745$ m	$Z_7 = 19{,}923$ m	$Z_8 = 19{,}716$ m
$Z_9 = 20{,}007$ m	$Z_{10} = 19{,}254$ m	$Z_{11} = 18{,}813$ m	$Z_{12} = 19{,}803$ m
$Z_{13} = 18{,}957$ m	$Z_{14} = 19{,}799$ m	$Z_{15} = 19{,}143$ m	

La plataforma final a conseguir tendrá una altitud de Z_F = 17,500m y una superficie horizontal de 200m^2. Sabiendo que los taludes laterales son verticales, calcula el volumen de tierras a mover.



Este método requiere conocer las distancias verticales entre el terreno y la rasante en distintos puntos de la parcela, para ello se calcula en primer lugar los desniveles entre ambas superficies.

$$Z_F^1 = Z_1 - Z_F = 19{,}456 - 17{,}500 = 1{,}956 m$$

$$Z_F^2 = Z_2 - Z_F = 1{,}391 m \qquad Z_F^3 = Z_3 - Z_F = 1{,}403 m$$

$$Z_F^4 = Z_4 - Z_F = 2{,}654m \qquad Z_F^5 = Z_5 - Z_F = 2{,}012m$$
$$Z_F^6 = Z_6 - Z_F = 1{,}245m \qquad Z_F^7 = Z_7 - Z_F = 2{,}423m$$
$$Z_F^8 = Z_8 - Z_F = 2{,}216m \qquad Z_F^9 = Z_9 - Z_F = 2{,}507m$$
$$Z_F^{10} = Z_{10} - Z_F = 1{,}754m \qquad Z_F^{11} = Z_{11} - Z_F = 1{,}313m$$
$$Z_F^{12} = Z_{12} - Z_F = 2{,}303m \qquad Z_F^{13} = Z_{13} - Z_F = 1{,}457m$$
$$Z_F^{14} = Z_{14} - Z_F = 2{,}299m \qquad Z_F^{15} = Z_{15} - Z_F = 1{,}643m$$

Para calcular el volumen aplicamos la expresión aplicada a los *15* puntos conocidos:

$$V = S\,\frac{h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_n}{n} = S\,\frac{Z_F^1 + Z_F^2 + Z_F^3 + \cdots + Z_F^{15}}{15} = 381{,}013\ m^3$$

10. REPLANTEOS

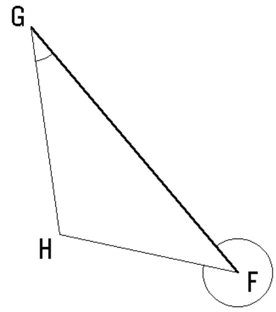
10.1) Las coordenadas de dos estaciones topográficas F y G son:

Estación F: 3.812,07 m E 1.631,32 m N

Estación G: 3.669,35 m E 1.746,89 m N

Se precisa replantear una estación auxiliar H, en un punto que tiene por coordenadas 3.700,00 m E; 1.675,00 m N. Determina los ángulos a situar en F y G para ubicar el punto H, calculando las distancias FH y GH para efectuar la comprobación. Se utilizó un instrumento de graduación sexagesimal.

La situación es la que se muestra en la figura. Para replantear el punto *H* estacionamos dos goniómetros en los puntos *F* y *G*, visando respectivamente en las direcciones *F-H* y *G-H*. Una tercera persona se desplaza con una señal de puntería hasta que ésta quede perfectamente colimada por los dos goniómetros. Para determinar los ángulos a situar, operamos de la siguiente forma:



- Cálculo de acimutes:

$$\theta_G^F = 90 + arc\ tg\ \frac{|Y_F - Y_G|}{|X_F - X_G|} = 128,999^o = 128^o\ 59'57,925''$$

$$\theta_F^G = 308^o 59'57,925''$$

$$\theta_G^H = 90 + arc\ tg\ \frac{|Y_H - Y_G|}{|X_H - X_G|} = 156,909^o = 156^o\ 554'33,219''$$

$$\theta_F^H = 270 + arc\ tg\ \frac{|Y_H - Y_F|}{|X_H - X_F|} = 291,294^o = 291^o 17'37,205''$$

- Cálculo de distancias:

$$D_{GF} = \sqrt{(X_F - X_G)^2 + (Y_F - Y_G)^2} = 183,645m$$

$$D_{GH} = \sqrt{(X_H - X_G)^2 + (Y_H - Y_G)^2} = 78,151m$$

$$D_{FH} = \sqrt{(X_H - X_F)^2 + (Y_H - Y_F)^2} = 120,281m$$

- Cálculo de los ángulos de replanteo: estacionados en *G*, colimamos el punto *F*, anotando la lectura acimutal L_G^F. A continuación buscamos la visual al punto *H*. El ángulo que tenemos que girar será:

$$F\hat{G}H = \theta_G^H - \theta_G^F = 27,910^o = 27^o 54'35,294''$$

tal como se deduce de la figura. Por tanto, la lectura que debemos tener en el limbo horizontal para replantear el punto *H* será:

$$L_G^H = L_G^F + 27^o 54'35,294''$$

Simultáneamente, realizamos la misma operación con el instrumento estacionado en *F*: visamos a *G*, anotamos la lectura L_F^G y buscamos la visual a *H*. El ángulo que tendremos que girar, en sentido horario, vale:

$$G\hat{F}H = 360^o - (\theta_F^G - \theta_F^H) = 342{,}292^o = 342^o 17'39{,}280''$$

Por tanto, en la estación *F*, la lectura que debemos tener en el limbo horizontal para replantear el punto *H* será:

$$L_F^H = L_F^G + 342^o 17'39{,}280''$$

Naturalmente, si alguna de las lecturas calculadas, L_G^H o L_F^H, diese un valor mayor que 360^o, hemos de restarle 360^o antes de proceder al replanteo.

- Comprobación.

$$G\hat{H}F = \theta_H^G - \theta_H^F = 225{,}616^o = 225^o 36'56{,}014''$$

$$\frac{D_{GH}}{sen\,(360 - \hat{G}FH)} = \frac{D_{GF}}{sen\,(360 - \hat{G}HF)} \qquad D_{GH} = 78{,}151m$$

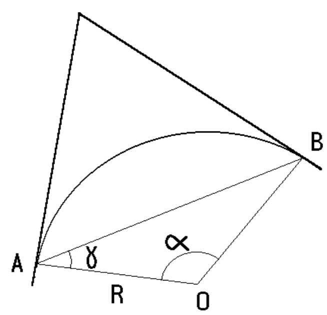
$$\frac{D_{FH}}{sen\,\hat{F}GH} = \frac{D_{GF}}{sen\,(360 - \hat{G}HF)} \qquad D_{FH} = 120{,}281m$$

10.2) Se desea replantear un tramo circular de radio 137m, correspondiente al proyecto de una carretera. Las coordenadas planas de los puntos de entrada y salida son, respectivamente:

$$X_A = 1.582{,}327m \qquad Y_A = 4.315{,}282m$$
$$X_B = 1.744{,}930m \qquad Y_B = 4.372{,}734m$$

Calcula las coordenadas planas del centro O de curvatura del tramo circular, sabiendo que dicho punto está situado al SE de A.

La situación es la que se muestra en la figura adjunta. A partir de ella se deduce fácilmente la forma de calcular las coordenadas de *O*. Como comprobación, las calcularemos tanto respecto a *A* como respecto a *B*.



- Cálculo del acimut θ_A^O:

$$\theta_A^B = arc\ tg\ \frac{|X_B - X_A|}{|Y_B - Y_A|} = 78{,}378^g$$

$$\theta_B^A = 278{,}378^g$$

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 172{,}454m$$

En la figura:

$$sen\,\frac{\alpha}{2} = \frac{D_{AB}}{2R} \qquad \alpha = 86{,}679^g$$

$$\gamma = 200 - \left(\frac{\alpha}{2} + 100\right) = 56{,}661^g$$

El acimut buscado vale:

$$\theta_A^O = \theta_A^B + O\hat{A}B = 135{,}039^g$$

Cálculo del acimut θ_B^O:

$$A\hat{B}O = \gamma = 56{,}661^g$$
$$\theta_B^O = \theta_B^A - \gamma = 221{,}716^g$$

- Cálculo de las coordenadas de *O*:

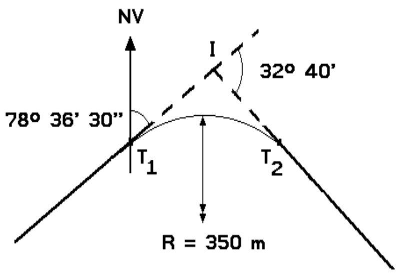
$$X_O = X_A + X_A{}^O = X_A + R \;\; sen\, \theta_A{}^O = 1.699{,}095m$$
$$X_O = X_B + X_B{}^O = X_B + R \;\; sen\, \theta_B{}^O = 1.699{,}095m$$
$$Y_O = Y_A + Y_A{}^O = Y_A + R \;\; cos\, \theta_A{}^O = 4.243{,}629m$$
$$Y_O = Y_B + Y_B{}^O = Y_B + R \;\; cos\, \theta_B{}^O = 4.243{,}629m$$

10.3) Se pretende replantear el eje de una nueva carretera. Una curva circular de radio 350m se debe situar entre dos alineaciones rectas, cuyo ángulo de intersección es de 32º40'. Los datos conocidos del proyecto son los siguientes:

$\theta_{T1}{}^I$ = 78º36'30"

Coordenadas de I: X_I = 957,33m Y_I = 943,82m

Sabemos que la distancia reducida del punto I al punto inicial de la medición es de 1.029,35m. Calcula las distancias al origen y las coordenadas planas de los puntos de tangencia de entrada y salida T_1 y T_2.



El punto inicial de la medición se sitúa sobre la primera alineación recta, a una distancia de *1.029,35m* al SO de *I*.

- Cálculo de las distancias de T_1 y T_2 al punto inicial: previamente hemos de calcular la longitud de las tangentes $T_1I = T_2I$ y la longitud del tramo curvo entre T_1 y T_2. Los radios correspondientes a estos dos puntos forman, en el centro de curvatura, un ángulo de:

$$\alpha = 32^o 40' = 32{,}667^o$$

ya que el ángulo $T_1\hat{I}T_2$ vale:

$$T_1\hat{I}T_2 = 180^o - 32^o 40'$$

y dichos radios son perpendiculares a las dos alineaciones rectas. La longitud del tramo curvo es:

$$Longitud\ del\ arco = T_1T_2 = \pi \;\; R \;\; (\frac{\alpha}{180}) = 199{,}549m$$

La longitud de las tangentes es:

$$Longitud\ de\ las\ tangentes = T = R \;\; tg\, \frac{\alpha}{2} = 102{,}568m$$

Distancia de T_1 al punto inicial = *1029,35 - 102,568 = 926,782m*

Distancia de T_2 al punto inicial = *926,782 + 199,549 = 1126,331m*

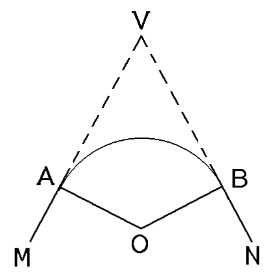
- Cálculo de las coordenadas de T_1 y T_2:

$$\theta_{T1}{}^I = 78^o\, 36'\, 30'' = 78{,}608^o$$
$$\theta_I{}^{T1} = \theta_{T1}{}^I + 180 = 258^o\, 36'\, 30'' = 258{,}608^o$$
$$\theta_I{}^{T2} = \theta_{T1}{}^I + 32^o\, 40' = 111^o\, 16'\, 30'' = 111{,}275^o$$
$$X_{T1} = X_I + X_I{}^{T1} = X_I + T \;\; sen\, \theta_I{}^{T1} = \;\; 856{,}782m$$
$$Y_{T1} = Y_I + Y_I{}^{T1} = Y_I + T \;\; cos\, \theta_I{}^{T1} = \;\; 923{,}561m$$
$$X_{T2} = X_I + X_I{}^{T2} = X_I + T \cdot sen\, \theta_I{}^{T2} = 1.052{,}908m$$
$$Y_{T2} = Y_I + Y_I{}^{T2} = Y_I + T \;\; cos\, \theta_I{}^{T2} = \;\; 906{,}604m$$

10.4) Se pretende enlazar dos tramos rectos de una vía de acceso con un arco de circunferencia, tal como se muestra en el croquis adjunto. Se conocen las coordenadas planas de los puntos:

$$X_A = 2.048m \qquad Y_A = 3.824m$$
$$X_B = 2.236m \qquad Y_B = 3.824m$$
$$X_V = 2.142m \qquad Y_V = 4.375m$$

Calcula el radio de la curva y la longitud del tramo curvo; calcula las coordenadas de dos puntos cualesquiera de la curva por el método de abscisas y ordenadas, tomando como eje X la recta AV y como eje Y la recta AO.



El método de abscisas y ordenadas permite calcular las coordenadas planas de los puntos de la curva circular a replantear, referidas a un sistema de ejes formado por las rectas *AV* y *AO*.

- Cálculo de los parámetros necesarios: todas las operaciones a realizar se deducen de la figura:

$$T = D_{AV} = D_{BV} = \sqrt{(X_V - X_A)^2 + (Y_V - Y_A)^2} = 558,961m$$

$$\theta_V^A = 200 + arc\ tg\ \frac{|X_A - X_V|}{|Y_A - Y_V|} = 210,757^g$$

$$\theta_V^B = 100 + arc\ tg\ \frac{|Y_B - Y_V|}{|X_B - X_V|} = 189,243^g$$

$$A\hat{V}B = \beta = \theta_V^A - \theta_V^B = 21,514^g$$

$$A\hat{V}O = \beta/2 = 10,757^g$$

$$V\hat{O}A = \alpha/2 = 200 - (100 + \beta/2) = 89,243^g$$

$$B\hat{O}A = \alpha = 178,486^g$$

- Cálculo del radio de la curva:

$$R = \frac{T}{tg\ \frac{\alpha}{2}} = 95,358m$$

Cálculo de la longitud del tramo curvo:

$$AB = 2\ \pi\ R\ \left(\frac{\alpha}{400}\right) = 267,351m$$

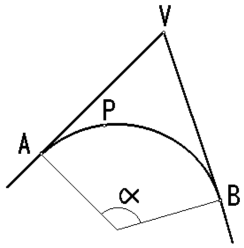
- Cálculo de las coordenadas de dos puntos de la curva: Vamos a tomar, por ejemplo, el valor de *γ* siguiente:

$$\gamma = \frac{\frac{\alpha}{2}}{2} = 44,621^g$$

Las expresiones a aplicar son:

$$X_1 = R\ \ sen\ \gamma = 61,498m$$
$$Y_1 = R - R\ \ cos\ \gamma = 22,480m$$

$$X_2 = R \;\; sen\, 2\gamma = 94{,}000m$$
$$Y_2 = R - R \;\; cos\, 2\gamma = 79{,}322m$$



10.5) *Se desea replantear un tramo de curva circular, situado entre los puntos de tangencia A y B. Se conocen las coordenadas planas de A y del vértice V:*

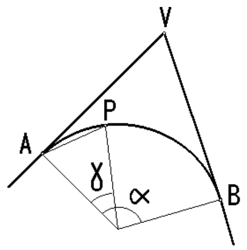
X_A = 1.123,12m Y_A = 547,93m
X_V = 1.404,57m Y_V = 952,87m

Se sabe que la curva debe pasar por el punto P, de coordenadas planas:

X_P = 1.197,56m Y_P = 619,69m

Calcula las coordenadas planas del punto B, el radio y la longitud de la curva.

Si llamamos *γ/2* al ángulo *VÂP*, el ángulo que forman los radios en *A* y *P* vale el doble, es decir, *γ*. Podemos calcular el valor de este ángulo por diferencia de los acimutes de las alineaciones *A-P* y *A-V*.



- Cálculo de los parámetros necesarios:

$$T = D_{AV} = D_{BV} = \sqrt{(X_V - X_A)^2 + (Y_V - Y_A)^2} = 493{,}143m$$
$$D_{AP} = \sqrt{(X_P - X_A)^2 + (Y_P - Y_A)^2} = 103{,}396m$$
$$\theta_A^V = arc\ tg\ \frac{|X_V - X_A|}{|Y_V - Y_A|} = 38{,}668^g$$
$$\theta_V^A = 238{,}668^g$$
$$\theta_A^P = arc\ tg\ \frac{|X_P - X_A|}{|Y_P - Y_A|} = 51{,}167^g$$

El ángulo que buscamos vale:

$$\gamma/2 = \theta_A^P - \theta_A^V = 12{,}499^g$$

En la figura:

$$sen\ \frac{\gamma}{2} = \frac{D_{AP}}{2R} \qquad R = 265{,}020m$$

Para calcular el ángulo *α*:

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{T}{R} \qquad \alpha = 137{,}214^g$$

$$A\hat{V}B = \beta = 400 - (200 + \alpha) = 62{,}786^g$$
$$\theta_V^B = \theta_V^A - \beta = 175{,}882^g$$

- Cálculo de las coordenadas de B:

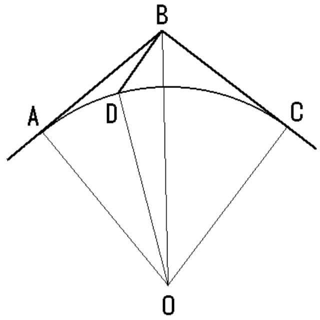
$$X_B = X_V + X_V^B = X_V + T \;\; sen\, \theta_V^B = 1.586{,}957m$$
$$Y_B = Y_V + Y_V^B = Y_V + T \;\; cos\, \theta_V^B = \;\; 494{,}695m$$

- Cálculo de la longitud del tramo curvo:

$$AB = 2\ \pi\ R\ \left(\frac{\alpha}{400}\right) = 571{,}212m$$

10.6) *Dos alineaciones rectas se cortan en el punto B. La recta AB tiene un acimut de θ_A^B = 115º y la recta BC un acimut de θ_B^C = 135º. Ambas rectas se quieren enlazar por*

medio de una curva circular que pasa a través del punto D, que se encuentra a una distancia de 45,72m de B y con acimut de $\theta_B^D = 285^o$. Calcula el radio de la curva y la longitud de la tangente.



La situación puede verse en la figura adjunta.

- Cálculo de los parámetros necesarios de la curva:

$$\theta_A^B = 115^o$$

$$\theta_B^A = \theta_A^B + 180^o = 295^o$$

$$\theta_B^C = 135^o$$

$$A\hat{B}C = \beta = \theta_B^A - \theta_B^C = 160^o$$

$$A\hat{O}C = \alpha = 360 - (\beta + 180) = 20^o$$

$$\theta_B^0 = \theta_B^C + \beta/2 = 215^o$$

$$A\hat{O}B = \alpha/2 = 10^o$$

$$D\hat{B}O = \theta_B^D - \theta_B^O = 70^o$$

- Cálculo del radio de la curva y de la longitud de las tangentes.

En el triángulo *ABO* obtenemos:

$$D_{OB} = R \ \frac{1}{\cos 10^o}$$

Y sabemos que $D_{OD} = R$

En el triángulo *DBO* aplicamos el teorema del coseno, cuya fórmula general es:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - (2 \ AC \ CB \ \cos AB)$$

Aplicándola en el triángulo DBO tenemos:

$$D_{OD}^2 = D_{OB}^2 + D_{DB}^2 - (2 \ D_{OB} \ D_{DB} \ \cos DO)$$

$$R^2 = (R \ \frac{1}{\cos 10^o})^2 + 45{,}72^2 - (2 \ (R \ \frac{1}{\cos 10^o}) \ 45{,}72 \ \cos 70^o)$$

Sustituimos valores y agrupando obtenemos:

$$0{,}031 \ R^2 - 31{,}757 \ R + 2090{,}318 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado mediante la conocida expresión:

$$X = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

obtenemos para *R* dos soluciones: *950,688m* y *70,719m*

Teniendo en cuenta la posición del punto *D*, el valor válido debe ser *R = 950,402m* ya que en función de estos valores, las longitudes respectivas de las tangentes serían:

$$T = R \ tg \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{para } R = 950{,}688m \quad \Rightarrow \quad T = 167{,}632m$$

$$\text{para } R = 70{,}719m \quad \Rightarrow \quad T = 12{,}470m$$

Este último valor de *12,470m* no es admisible ya que $D_{BD} = 45{,}72m$

Por tanto, la solución sería:

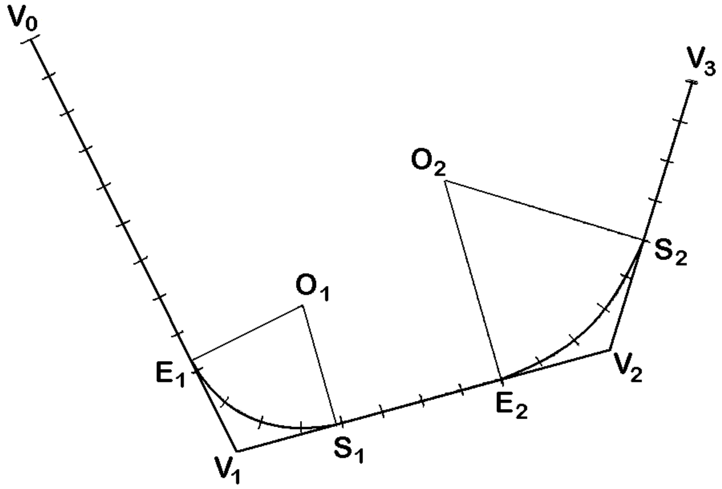
$$R = 950{,}688m$$

$$T = 167{,}632m$$

10.7) *Una carretera viene definida por las alineaciones comprendidas entre el siguiente listado de vértices:*

V_0 (1.000 ; 1.000) V_1 (1.050 ; 900) V_2 (1.140 ; 925) V_3 (1.160 ; 990)

En los vértices V_1 y V_2 se adaptan sendas curvas circulares de radios R_1 = 30m y R_2 = 50m, respectivamente. Sabiendo que el origen de la obra esta en el V_0, calcula las coordenadas del punto P, sobre el eje, en el PK: 0+215.



La situación de los vértices y las alineaciones puede verse en el croquis adjunto. Se han marcado puntos cada *5m* sobre el eje de la carretera. Los cálculos de los distintos elementos de las curvas se realizan como en los ejercicios anteriores.

- Cálculo de los acimutes y distancias reducidas de cada eje: se calculan a partir de las coordenadas conocidas de los vértices:

V_0V_1: $\theta_0^1 = 170{,}483^g$ $D_{01} = 111{,}803m$

V_1V_2: $\theta_1^2 = 82{,}751^g$ $D_{12} = 93{,}408m$

V_2V_3: $\theta_2^3 = 19{,}003^g$ $D_{23} = 68{,}007m$

Por tanto, los ángulos en los vértices serán:

ángulo en V_1: $\beta_1 = 200^g - (170{,}483^g - 82{,}751^g) = 112{,}268^g$

ángulo en V_2: $\beta_2 = 200^g - (82{,}751^g - 19{,}003^g) = 136{,}252^g$

Y los ángulos en los centros de las curvas:

ángulo en O_1: $\alpha_1 = 200^g - \beta_1 = 87{,}732^g$

ángulo en O_2: $\alpha_2 = 200^g - \beta_2 = 63{,}748^g$

Las tangentes de las curvas se calculan:

$$E_1V_1 = V_1S_1 = R_1 \ tg\ \alpha_1/2 = 24{,}712m$$

$$E_2V_2 = V_2S_2 = R_2 \ tg\ \alpha_2/2 = 27{,}359m$$

El desarrollo de los arcos será:

$$E_1S_1 = 2\ \pi\ R_1 \frac{\alpha_1}{400} = 41{,}343m$$

$$E_2S_2 = 2\ \pi\ R_2 \frac{\alpha_2}{400} = 50{,}068m$$

• Sumando las longitudes de los distintos tramos podemos calcular el PK de los puntos singulares que van definiendo el trazado y de esta forma localizar la situación del PK: *0+215.*

El vértice V_0 se encuentra en el inicio de la obra: PK: *0+000*

El punto de entrada de la primera curva, E_1, se encuentra restando a la distancia D_{01} la tangente de la primera curva, E_1V_1:

$$D_{01} - E_1V_1 = 87{,}091 \quad \rightarrow \quad \text{PK: } 0+87{,}091$$

El punto de salida de la primera curva, S_1, se encuentra en:

$$87{,}091 + E_1S_1 = 128{,}434 \quad \rightarrow \quad \text{PK: } 0+128{,}434$$

Añadiendo al anterior PK la longitud del tramo recto comprendido entre S_1 y E_2 obtenemos el del punto de entrada de la segunda curva, E_2:

$$S_1E_2 = D_{12} - E_1V_1 - E_2V_2 = 41{,}337$$

$$128{,}434 + 41{,}337 = 169{,}771 \quad \rightarrow \quad \text{PK: } 0+169{,}771$$

Sumando el arco de la segunda curva, E_2S_2, nos encontramos en el punto de salida de ésta, S_2:

$$169{,}771 + E_2S_2 = 219{,}838 \quad \rightarrow \quad \text{PK: } 0+219{,}838$$

Para determinar la situación del vértice V_3, hacemos:

$$219{,}838 + D_{23} - V_2S_2 = 260{,}487 \quad \rightarrow \quad PK\text{: } 0+260{,}487$$

• Por tanto, *P* (PK: *0+215*) se sitúa entre los puntos E_2 y S_2, es decir dentro del arco de la segunda curva. Partiendo del punto de entrada E_2, el desarrollo del arco hasta *P* tiene el siguiente valor:

$$215 - 169{,}771 = 45{,}229m$$

El ángulo de este desarrollo en el centro de la curva se calcula:

$$2\,\pi\,R_2\,\frac{\varphi}{400} = 45{,}229m$$

Despejando:

$$\varphi = 45{,}229\,\frac{400}{2\,\pi\,R_2} = 57{,}587^g$$

La cuerda del arco desde el punto de entrada E_2 hasta el punto *P* será:

$$E_2P = 2\,R_2\ sen\ \varphi/2 = 43{,}703m$$

Las coordenadas del punto E_2 se calculan a partir del vértice V_1 y su distancia:

$$V_1E_2 = D_{12} - E_2V_2 = 66{,}049m$$

Aplicando las fórmulas taquimétricas:

$$X_{E2} = 1.050 + V_1E_2\ sen\ \theta_1^2 = 1.113{,}639m$$

$$Y_{E2} = 900 + V_1E_2\ cos\ \theta_1^2 = 917{,}678m$$

A partir de las anteriores coordenadas se calculan las de *P*, sabiendo que:

$$E_2P = 43{,}703m$$

$$\theta_{E2}^P = \theta_1^2 - \varphi/2 = 53{,}957^g$$

Aplicando las formulas taquimétricas:

$$X_P = X_{E2} + E_2P\ \ sen\ \theta_{E2}^P = 1.146{,}402m$$

$$Y_P = Y_{E2} + E_2P\ \ cos\ \theta_{E2}^P = 946{,}601m$$

- De esta forma se pueden obtener las coordenadas de puntos del eje de la obra lineal cada cierto intervalo, por ejemplo cada 5 metros, calculando posteriormente el listado de replanteo de dichos puntos desde una base topográfica cercana.

Ejemplo de listado de replanteo desde la Base topográfica de coordenadas (*1.103,206* ; *893,737*) entre el PK: *0+200* y el *0+225*:

PK:	*Coord. X*	*Coord. Y*	*Acimut*	*Distancia*
200,000	*1.138,651*	*933,824*	*46,093*	*53,510*
205,000	*1.141,657*	*937,817*	*45,665*	*58,494*
210,000	*1.144,249*	*942,090*	*44,806*	*63,424*
215,000	*1.146,402*	*946,601*	*43,614*	*68,267*
219,838	*1.148,046*	*951,149*	*42,212*	*72,848*
220,000	*1.148,093*	*951,304*	*42,161*	*72,999*
225,000	*1.149,564*	*956,083*	*40,704*	*77,692*

10.8) Se pretende unir dos tramos rectos de una vía de comunicación, 1-2 y 5-6, mediante dos arcos de clotoide, 3-2 y 4-5 y un arco circular, 3-4.

Los datos conocidos son los siguientes:

$X_1 = 32.719,042m \quad Y_1 = 52.000,414m$

$X_6 = 32.365,715m \quad Y_6 = 51.568,191m$

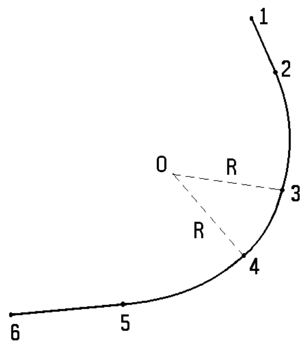
$\theta_1^2 = 158,844^g \quad \theta_5^6 = 272,809^g$

Longitud de la clotoide 2-3 = $L_{2\text{-}3} = 71,492m$

Longitud de la clotoide 4-5 = $L_{4\text{-}5} = 69,258m$

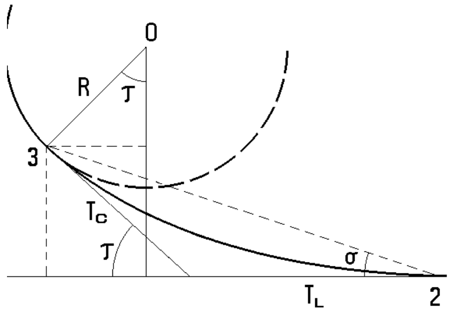
Radio del tramo circular 3-4 = R = 100m

Distancia del punto 1 al inicio de la obra = $P.K._1 = 2.724,891m$



En este ejercicio se presenta un caso habitual en el trazado de vías de comunicación, en el que encontramos, en el sentido de avance del proyecto, un tramo recto (tramo *1-2*), una clotoide (tramo *2-3*), una curva circular (tramo *3-4*), una nueva clotoide (tramo *4-5*), y finalmente, un tramo recto (tramo *5-6*), como se puede observar en la figura adjunta.

- Cálculo de los parámetros de la clotoide *2-3*. En el esquema adjunto no se ha representado la curva según unos ejes orientados al Norte, sino que se ha hecho coincidir el eje *X* con la prolongación del tramo recto *1-2*, de manera que las coordenadas que se calculen en este apartado no se podrán considerar como las coordenadas orientadas que utilizamos habitualmente en Topografía.



Obtenemos en primer lugar el parámetro de esta clotoide, que será función de su longitud y del radio de su punto final, en este caso del punto *3*, y que coincide con el radio de la curva circular intermedia.

$$A^2 = R \ \ L_{2\text{-}3} = 7.149,200 \quad \Rightarrow \quad A = 84,553$$

Calculamos τ, que es el ángulo formado entre la prolongación del tramo recto anterior (tramo *1-2*) y una recta tangente a la curva en el punto final de la clotoide, el punto *3*:

$$\tau = r\ \frac{L}{2R} = 22{,}757^g$$

r = Número de grados de un radian, en centesimales = $63{,}662^g$

La orientación de la tangente corta, *Tc*, es el acimut de la recta tangente al punto *3*, utilizada anteriormente.

$$Orientación\ de\ Tc = \theta_1^2 + \tau = 181{,}601^g$$

Calculamos ahora las coordenadas parciales entre los puntos final e inicial de esta clotoide. Para ello, como ya se comentó, no se utilizan unos ejes orientados según la meridiana. En las expresiones siguientes hacemos $L = L_{2\text{-}3}$:

$$X_2^3 = L - \frac{L^5}{10\,(2A^2)^2} + \frac{L^9}{216\,(2A^2)^4} - \frac{L^{13}}{9360\,(2A^2)^6} = 70{,}584m$$

$$Y_2^3 = \frac{L^3}{3\,(2A^2)} - \frac{L^7}{42\,(2A^2)^3} + \frac{L^{11}}{1320\,(2A^2)^5} - \frac{L^{15}}{75600\,(2A^2)^7} = 8{,}441m$$

El ángulo σ es el formado entre la prolongación del tramo recto *1-2* y la alineación *2-3*, y lo obtenemos:

$$\sigma = arc\ tg\,\frac{|Y_2^3|}{|X_2^3|} = 7{,}577^g$$

La distancia recta entre los puntos inicial y final de la clotoide se obtiene:

$$Cuerda\ de\ la\ clotoide = D_{2-3} = \sqrt{(X_2^3)^2 + (Y_2^3)^2} = 71{,}087m$$

Las coordenadas parciales entre el centro de la curva circular *3-4* y el punto inicial de esta clotoide se consiguen a partir de las coordenadas parciales entre los puntos final e inicial de la clotoide y corrigiendo la proyección del radio sobre esos ejes:

$$X_2^0 = X_2^3 - R\ \ sen\ \tau = 35{,}594m$$

$$Y_2^0 = X_2^3 + R\ \ cos\ \tau = 164{,}263m$$

Se define como retranqueo a la diferencia entre la coodenada Y_2^O y el radio de la curva circular *3-4*, que coincide con el radio final de la clotoide *2-3*, medido sobre la recta que pasa por el centro *O* de la curva circular y es perpendicular al eje *X* del esquema anterior.

$$Retranqueo = \Delta R = Y_2^0 - R = 64{,}263m$$

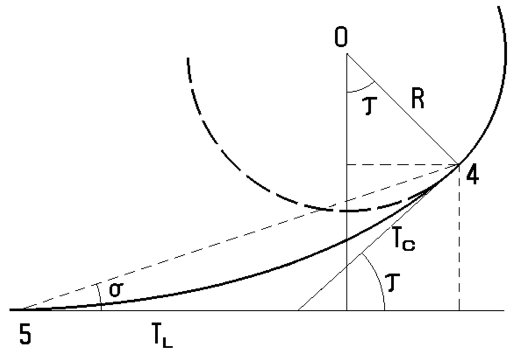
La tangente corta es la distancia entre el punto final de la clotoide y la intersección de la recta tangente a la curva en dicho punto y la prolongación del tramo recto anterior.

$$T_C = Y_2^3/sen\ \tau = 24{,}125m$$

La tangente larga es la distancia entre el punto inicial de la clotoide y la intersección de la prolongación del tramo recto y la tangente corta.

$$T_L = X_2^3 - Y_2^3\ \ cotg\ \tau = 47{,}984m$$

- Cálculo de los parámetros de la clotoide *5-4*. El proceso de cálculo es semejante al descrito para la clotoide *2-3*, pero realizado sobre el esquema adjunto.



$$A^2 = R\ L_{4\text{-}5} = 6.925,800$$

De donde:

$$A = 83,221$$

$$\tau = r\ L/2R = 22,046m$$

r = Número de grados de un radián, en centesimales.

$$Orientación\ de\ Tc = \theta_5^6 - \tau = 250,763^g$$

$$X_5^4 = L - \frac{L^5}{10\,(\,2\,A^2\,)^2} + \frac{L^9}{216\,(\,2\,A^2\,)^4} - \frac{L^{13}}{9360\,(\,2\,A^2\,)^6} = 68,432m$$

$$Y_5^4 = \frac{L^3}{3\,(\,2\,A^2\,)} - \frac{L^7}{42\,(\,2\,A^2\,)^3} + \frac{L^{11}}{1320\,(\,2\,A^2\,)^5} - \frac{L^{15}}{75600\,(\,2\,A^2\,)^7} = 7,926m$$

$$\sigma = arc\ tg\ \frac{|\,Y_5^4\,|}{|\,X_5^4\,|} = 7,341^g$$

$$Cuerda\ de\ la\ clotoide = D_{4\text{-}5} = \sqrt{(\,X_5^4\,)^2 + (\,Y_5^4\,)^2} = 68,890m$$

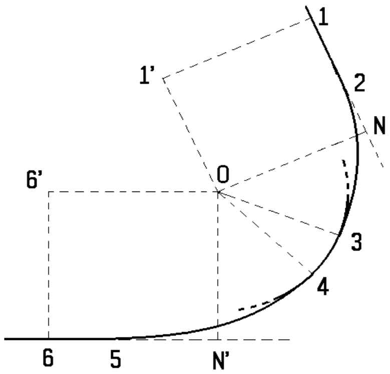
$$X_5^0 = X_5^4 - R\ \ sen\ \tau = 34,491m$$

$$Y_5^0 = X_5^4 + R\ \ cos\ \tau = 162,496m$$

$$Retranqueo = \Delta R = Y_5^0 - R = 62,496m$$

$$T_C = Y_5^4/sen\ \tau = 23,353m$$

$$T_L = X_5^4 - Y_5^4\ \ cotg\ \tau = 46,465m$$



• Cálculo de las coordenadas absolutas del centro de curvatura del arco circular. Para obtenerlas utilizamos el proceso representado en la figura. En primer lugar calculamos las coordenadas absolutas de los puntos *1'* y *6'* a partir de las de los puntos *1* y *6*, ya conocidas. Estas coordenadas son ya según un sistema de ejes orientados según la meridiana. Utilizamos las coordenadas parciales calculadas anteriormente como distancias, obteniendo ahora su proyección real sobre los ejes orientados. Se calculan también los acimutes correspondientes a las alineaciones *1-1'* y *6-6'* a partir de acimutes ya conocidos.

$$X_{1'} = X_1 + Y_2^O\ \ sen\,(\theta_1^2 + 100) = 32.587,926m$$

$$Y_{1'} = Y_1 + Y_2^O\ \ cos\,(\theta_1^2 + 100) = 51.901,466m$$

$$X_{6'} = X_6 + Y_5^O\ \ sen\,(\theta_5^6 + 100) = 32.298,412m$$

$$Y_{6'} = Y_6 + Y_5^O\ \ cos\,(\theta_5^6 + 100) = 51.716,089m$$

Resolvemos el triángulo *1'-O-6'* con el fin de conocer las distancias *1'-O* y *6'-O*, para ello calculamos las magnitudes necesarias para aplicar el teorema del seno:

$$D_{1'}^{6'} = \sqrt{(\,X_{6'} - X_{1'}\,)^2 + (\,Y_{6'} - Y_{1'})^2} = 343,786m$$

$$\theta_{6'}^{1'} = arc\ tg\ \frac{|\,X_{1'} - X_{6'}\,|}{|\,Y_{1'} - Y_{6'}\,|} = 63,744^g$$

$$1'6'O = \theta_{6'}^{0} - \theta_{6'}^{1'} = 72,809 - \theta_{6'}^{1'} = 9,065^g$$

$$6'1'O = \theta_{1'}^{6'} - \theta_{1'}^{O} = \theta_{1'}^{6'} - 158,844 = 108,630^g$$

$$1'O\,6' = 200 - (1'6'O + 6'1'O) = 86,035^g$$

$$\frac{D_{1'-0}}{sen\,1'6'O} = \frac{D_{1'-6'}}{sen1'O6'} \qquad D_{1'-0} = 49{,}987m$$

$$\frac{D_{6'-0}}{sen\,6'1'0} = \frac{D_{1'-6'}}{sen1'06'} \qquad D_{6'-0} = 351{,}184m$$

Una vez conocidas las distancias calculamos las coordenadas del punto *O* a partir de las coordenadas de *1'* y *6'*, comprobando los resultados.

$$X_O = X_{1'} + D_{1'-O} \;\; sen\,\theta_{1'}^{O} = 32.618{,}037m$$
$$X_O = X_{6'} + D_{6'-O} \;\; sen\,\theta_{6'}^{O} = 32.618{,}037m$$
$$Y_O = Y_{1'} + D_{1'-O} \;\; cos\,\theta_{1'}^{O} = 51.861{,}566m$$
$$Y_O = Y_{6'} + D_{6'-O} \;\; cos\,\theta_{6'}^{O} = 51.861{,}566m$$

• Cálculo de las coordenadas de los puntos inicial y final de las clotoides. Calculamos en primer lugar los acimutes que van a intervenir en el proceso y serán los correspondientes al itinerario *O-N-2-3* para el cálculo de las coordenadas de los puntos *2* y *3*, y los correspondientes al itinerario *O-N'-5-4* para las coordenadas de *5* y *4:*

$$\theta_O^N = \theta_1^2 - 100 = 58{,}844^g$$
$$\theta_N^2 = \theta_1^2 + 200 = 358{,}844^g$$
$$\theta_2^3 = \theta_1^2 + \sigma = 166{,}421^g$$
$$\theta_O^{N'} = \theta_5^6 - 100 = 172{,}809^g$$
$$\theta_{N'}^5 = \theta_5^6 = 272{,}809^g$$
$$\theta_5^4 = \theta_6^5 - \sigma = 65{,}468^g$$

Para obtener las coordenadas del punto *2* seguimos el itinerario *O-N-2*, procediendo a la proyección de las coordenadas parciales, calculadas anteriormente sobre unos ejes no orientados, sobre unos ejes ya orientados.

$$X_2 = X_O + Y_2^O \;\; sen\,\theta_O^N + X_2^O \;\; sen\,\theta_N^2 = 32.727{,}712m$$
$$Y_2 = Y_O + Y_2^O \;\; cos\,\theta_O^N + X_2^O \;\; cos\,\theta_N^2 = 51.988{,}926m$$

El cálculo de las coordenadas del punto *3*, con los datos ya conocidos, es inmediato.

$$X_3 = X_2 + D_{2-3} \;\; sen\,\theta_2^3 = 32.763{,}492m$$
$$Y_3 = Y_2 + D_{2-3} \;\; cos\,\theta_2^3 = 51.927{,}500m$$

Repetimos el proceso de cálculo ya descrito para la obtención de las coordenadas de los puntos *5* y *4*. Seguimos el itinerario ya mencionado *O-N'-5*.

$$X_5 = X_O + Y_5^O \;\; sen\,\theta_O^{N'} + X_5^O \;\; sen\,\theta_{N'}^5 = 32.653{,}957m$$
$$Y_5 = Y_O + Y_5^O \;\; cos\,\theta_O^{N'} + X_5^O \;\; cos\,\theta_{N'}^5 = 51.699{,}380m$$
$$X_4 = X_5 + D_{5-4} \;\; sen\,\theta_5^4 = 32.712{,}959m$$
$$Y_4 = Y_5 + D_{5-4} \;\; cos\,\theta_5^4 = 51.734{,}942m$$

• Cálculo del P.K. de cada uno de los puntos singulares.

Punto *1*:

$$PK_1 = 2.724{,}891m$$

Punto *2*: se obtiene sumando al PK_1 la longitud del tramo recto *1-2*:

$$PK_2 = PK_1 + D_{1-2} = PK_1 + \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = 2.739{,}283m$$

Punto *3:* se suma al PK_2 la longitud de la clotoide *2-3*:

$$PK_3 = PK_2 + L_{2-3} \;\; (longitud\ de\ la\ clotoide) = 2.810{,}775m$$

Punto *4:* el proceso es semejante. La longitud del tramo circular *3-4* se obtiene conociendo el ángulo *α* formado en el centro del tramo circular *O* y conocido por la diferencia de acimutes de las visuales *O-3* y *O-4*:

$$PK_4 = PK_3 + L_{3\text{-}4} \text{ (longitud del tramo circular)} = 2.946{,}087m$$

$$L_{3-4} = \frac{2\ \pi\ R\ \alpha}{400} = 135{,}312m$$

$$\alpha = \text{Angulo en O del tramo circular} = \theta_O^4 - \theta_O^3 = 86{,}142^g$$

$$\theta_O^4 = 100 + arc\ tg\ \frac{|Y_4 - Y_O|}{|X_4 - X_O|} = 159{,}048^g$$

$$\theta_O^3 = arc\ tg\ \frac{|X_3 - X_O|}{|Y_3 - Y_O|} = 72{,}906^g$$

Para los siguientes puntos operamos de forma semejante a la descrita anteriormente.

Punto *5*:

$$PK_5 = PK_4 + L_{4\text{-}5} \text{ (longitud de la clotoide)} = 3.015{,}345m$$

Punto *6*:

$$PK_6 = PK_5 + D_{5-6} = PK_5 + \sqrt{(X_6 - X_5)^2 + (Y_6 - Y_5)^2} = 3.332{,}038m$$

- Coordenadas de un punto intermedio en cada tramo. Para determinarlas calculamos la distancia del punto intermedio al punto inicial de cada tramo y a partir del acimut de cada alineación y con las coordenadas del punto inicial del tramo se obtienen las coordenadas buscadas.

Alineación *1-2*: *PI1*

$$D_1^{PI1} = \frac{D_{1-2}}{2} = 7{,}196m$$

$$X_{PI1} = X_1 + D_{1\text{-}PI1}\ sen\ \theta_1^2 = 32.723{,}377m$$

$$Y_{PI1} = Y_1 + D_{1\text{-}PI1}\ cos\ \theta_1^2 = 51.994{,}670m$$

Clotoide *2-3*: *PI2*. Para este caso, repetimos el cálculo de las coordenadas parciales de esta clotoide, cuyo punto inicial es *2* y el punto final es *PI2*. Recordamos que estas coordenadas parciales se calculan sobre un sistema de ejes no orientado.

$$L_{2-\Pi 2} = \frac{L_{2-3}}{2} = 35{,}746m$$

$$A^2 = 3.574{,}60$$

$$X_2^{PI2} = L - \frac{L^5}{10(2A^2)^2} + \frac{L^9}{216(2A^2)^4} - \frac{L^{13}}{9360(2A^2)^6} = 35{,}632m$$

$$Y_2^{PI2} = \frac{L^3}{3(2A^2)} - \frac{L^7}{42(2A^2)^3} + \frac{L^{11}}{1320(2A^2)^5} - \frac{L^{15}}{75600(2A^2)^7} = 2{,}125m$$

$$\theta_2^{PI2} = \theta_1^2 + arc\ tg\ \frac{|Y_2^{PI2}|}{|X_2^{PI2}|} = 162{,}636^g$$

$$D_2^{PI2} = \sqrt{(X_2^{PI2})^2 + (Y_2^{PI2})^2} = 35{,}695m$$

$$X_{PI2} = X_2 + D_2^{PI2}\ sen\ \theta_2^{PI2} = 32.747{,}480m$$

$$Y_{PI2} = Y_2 + D_2^{PI2}\ cos\ \theta_2^{PI2} = 51.959{,}204m$$

Arco circular *3-4: PI3*. En este caso, partimos de las coordenadas del punto *O*, y debemos calcular θ_O^{PI3}:

$$D_3^{PI3} = \frac{D_{3-4}}{2} = 67,656m$$

$$\alpha = D_{3-PI3} \; \frac{400}{2\,\pi\,R} = 43,071^g$$

$$\theta_O^{A} = \theta_O^{3} + \alpha = 115,977^g$$

$$X_{PI3} = X_O + R \;\; sen\; \theta_O^{PI3} = 32.714,904m$$

$$Y_{PI3} = Y_O + R \;\; cos\; \theta_O^{PI3} = 51.836,732m$$

En los siguientes apartados utilizamos los procedimientos descritos anteriormente.
Clotoide *4-5*: *PI4*

$$L_{5-PI4} = \frac{L_{4-5}}{2} = 34,629m$$

$$A^2 = 3.462,90$$

$$X_5^{PI4} = L - \frac{L^5}{10\,(\,2\,A^2\,)^2} + \frac{L^9}{216\,(\,2\,A^2\,)^4} - \frac{L^{13}}{9360\,(\,2\,A^2\,)^6} = 34,525m$$

$$Y_5^{PI4} = \frac{L^3}{3\,(\,2\,A^2\,)} - \frac{L^7}{42\,(\,2\,A^2\,)^3} + \frac{L^{11}}{1320\,(\,2\,A^2\,)^5} - \frac{L^{15}}{75600\,(\,2\,A^2\,)^7} = 1,994m$$

$$\theta_5^{PI4} = \theta_6^5 - arc\;tg\,\frac{|\,Y_5^{PI4}\,|}{|\,X_5^{PI4}\,|} = 69,136^g$$

$$D_5^{PI4} = \sqrt{(\,X_5^{PI4}\,)^2 + (\,Y_5^{PI4}\,)^2} = 34,583m$$

$$X_{PI4} = X_5 + D_5^{PI4} \;\; sen\; \theta_5^{PI4} = 32.684,555m$$

$$Y_{PI4} = Y_5 + D_5^{PI4} \;\; cos\; \theta_5^{PI4} = 51.715,497m$$

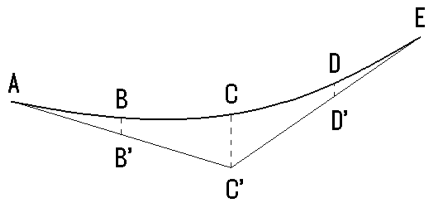
Alineación *5-6*: *PI5*

$$D_5^{PI5} = \frac{D_{5-6}}{2} = 158,346m$$

$$X_{PI5} = X_5 + D_{5-PI5} \;\; sen\; \theta_5^{6} = 32.509,836m$$

$$Y_{PI5} = Y_5 + D_{5-PI5} \;\; cos\; \theta_5^{6} = 51.633,785m$$

10.9) Se desea dar cotas a los puntos que conforman el acuerdo vertical entre los puntos A y E de un vía de comunicación. La distancia entre ellos es de 180m. El tramo A-C' es de 90m y tiene una pendiente del -1,00%. El tramo C'-E es de 90m y con una pendiente del 2,20%. Los puntos B' y D' se sitúan en los puntos medios de las alineaciones A-C' y C'-E. Determinar las cotas de B, C y D, sabiendo que Z_A = 57,87m y Z_E = 58,95m.



Se trata, en este ejercicio, de suavizar el punto de contacto entre dos tramos, de pendiente uniforme. Para ello se utilizan, generalmente, curvas parabólicas. La situación se muestra en la figura.

- Cálculo de las cotas sobre la rasante, sin el acuerdo vertical: se calculan las altitudes partiendo de los dos extremos, de los que conocemos su altitud. Comprobamos en el punto central C' la exactitud de los cálculos realizados.

$$Z_{B'} = Z_A - Z_A^{B'} = 57,87 - \frac{45}{100} = 57,42m$$

$$Z_{C'} = Z_A - Z_A^{C'} = 57,87 - \frac{90}{100} = 56,97m$$

$$Z_{D'} = Z_E - Z_E^{D'} = 58,95 - \frac{2,2\ \ 45}{100} = 57,96m$$

$$Z_{C'} = Z_E - Z_E^{C'} = 58,95 - \frac{2,2\ \ 90}{100} = 56,97m$$

- Cálculo de las cotas sobre el acuerdo vertical: para obtener el desnivel en cada punto aplicamos la expresión siguiente, cambiando cada vez el valor de la distancia l del punto inicial al punto de interés:

$$h = \frac{(\ p - (\ -q\ ))\ \ l^2}{400\ \ L}$$

Debemos calcular previamente la diferencia de pendientes:

$$(p - (-q)) = -1 - (+2,2) = -3,2\%$$

Puesto que la diferencia de pendientes adopta un valor negativo, se toma la suma de ambas, prescindiendo del signo:

$$p + q = 1 + 2,2 = 3,2\%$$

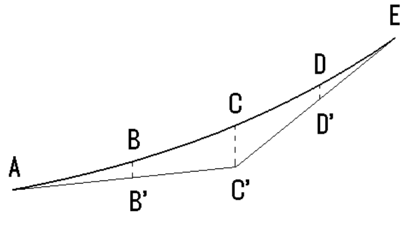
Aplicando la expresión anterior:

$$Z_B = Z_{B'} + BB' = 57,42 + \frac{3,2\ \ 45^2}{400\ \ 90} = 57,60m$$

$$Z_C = Z_{C'C} + CC' = 56,97 + \frac{3,2\ \ 90^2}{400\ \ 90} = 57,69m$$

$$Z_D = Z_{D'} + DD' = 57,96 + \frac{3,2\ \ 45^2}{400\ \ 90} = 58,14m$$

10.10) Se desea dar cotas a los puntos que conforman el acuerdo vertical entre los puntos A y E de un vía de comunicación. La distancia entre ellos es de 200m. El tramo A-C' es de 100m y tiene una pendiente del 1,80%. El tramo C'-E es de 100m y con una pendiente del 2,50%. Los puntos B' y D' se sitúan en los puntos medios de las alineaciones A-C' y C'-E. Determinar las cotas de B, C, D y E, sabiendo que Z_A = 57,87m.



El proceso de cálculo es similar al empleado en el ejercicio anterior. Puesto que sólo conocemos la altitud del punto *A*, no es posible, en esta ocasión, realizar comprobaciones.

- Cálculo de las cotas sobre la rasante:

$$Z_{B'} = Z_A - Z_A^{B'} = 8,92 + \frac{1,8\ \ 50}{100} = 9,82m$$

$$Z_{C'} = Z_A - Z_A^{C'} = 8{,}92 + \frac{1{,}8\ \ 100}{100} = 10{,}72m$$

$$Z_{D'D} = Z_{C'} - Z_{C'}^{D'} = 10{,}72 + \frac{2{,}5\ \ 50}{100} = 11{,}97m$$

$$Z_{E'} = Z_{C'} - Z_{C'}^{E} = 10{,}72 + \frac{2{,}5\ \ 100}{100} = 13{,}22m$$

- Cálculo de las cotas sobre el acuerdo vertical:

$$h = \frac{(\,p - (\,-q\,))\ \ l^2}{400\ \ L}$$

Debemos calcular previamente la diferencia de pendientes:

$$(p - (-q)) = 1{,}8 - (+2{,}5) = -0{,}7\%$$

Al igual que en el ejercicio anterior, prescindimos del signo y hacemos:

$$1{,}8 + 2{,}5 = 4{,}3\%$$

Aplicando la expresión anterior:

$$Z_B = Z_{B'} + BB' = 9{,}82 + \frac{4{,}3\ \ 50^2}{400\ \ 100} = 10{,}09m$$

$$Z_C = Z_{C'} + CC' = 10{,}72 + \frac{4{,}3\ \ 100^2}{400\ \ 100} = 11{,}80m$$

$$Z_D = Z_{D'} + DD' = 11{,}97 + \frac{4{,}3\ \ 50^2}{400\ \ 100} = 12{,}24m$$

11. AUSCULTACIONES

11.1) Para el control de movimientos en una obra civil, por intersección directa mediante mediciones angulares, se ha aplicado el método de las series. Desde uno de los puntos de estación, E, se realizaron seis series y los errores de cierre obtenidos en cada vuelta de horizonte fueron los siguientes:

$e_1 = 3^s$ $e_2 = 10^s$ $e_3 = 5^s$ $e_4 = 1^s$ $e_5 = 2^s$ $e_6 = 7^s$

Determina cuáles de las series deben ser rechazadas teniendo en cuenta que se empleó un instrumento topográfico dotado de un anteojo de 30 aumentos y cuya apreciación en la medida de ángulos horizontales es m = 5^s.

Cuando se aplica el método de las series en una auscultación, deben repetirse todas las mediciones de cualquier vuelta de horizonte cuyo error de cierre sea superior a:

$$\sqrt{2}\sqrt{e_{pa}^2 + e_{la}^2}$$

e_{pa} y e_{la} son los errores acimutales de puntería y de lectura que, como sabemos, dependen de las características del instrumento empleado:

$$e_{pa} = \frac{10''}{A}\left(1 + \frac{4\ A}{100}\right) \approx \frac{30^s}{30}\left(1 + \frac{4\ 30}{100}\right) = 2{,}20^s$$

$$e_{la} = \frac{2}{3}m = \frac{2}{3}5^s = 3{,}33^s$$

Por tanto, se repetirán las series con errores superiores a:

$$\sqrt{2}\sqrt{e_{pa}^2 + e_{la}^2} = 5{,}65^s$$

Deben rechazarse y repetirse las series *2ª* y *6ª*, cuyos errores ($e_2 = 10^s$ y $e_6 = 7^s$) son superiores a $5{,}65^s$.

11.2) Se ha realizado un itinerario planimétrico de precisión para la auscultación de una obra civil. El itinerario consta de 5 tramos, de longitud media D = 50m. Se empleó una estación total de características:

Precisión del estabilizador del compensador del nivel electrónico: $P_e = 30^s$
Número de aumentos del anteojo: A = 30
Precisión del dispositivo de lectura de ángulos, según el fabricante, p = 5^s
Error en la medida de la distancia: e_d = 3mm+3ppm

Se ha dispuesto un sistema de centrado forzado en todas las estaciones. Las observaciones angulares, tanto de frente como de espaldas, se realizaron dos veces aplicando la regla de Bessel y las distancias se midieron cuatro veces. Calcula los errores de cierre a priori del itinerario.

<u>Errores en ángulos acimutales:</u>

- Verticalidad:

$$e_{va} = \frac{P_e}{4} = \frac{30^s}{4} = 7{,}5^s$$

- Dirección: despreciamos el error de dirección, ya que se trabaja con sistemas de centrado forzado.
- Puntería: como se aplica la regla de Bessel, dividimos este error por $\sqrt{2}$:

$$e_{pa} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{10''}{A}\ (1+\frac{4A}{100}) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{30^s}{30}(1+\frac{4\ 30}{100}) = 1{,}56^s$$

- Lectura: como se aplica la regla de Bessel, dividimos este error por $\sqrt{2}$:

$$e_{la} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{3}p = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{3}5^s = 2{,}36^s$$

- Error angular total:

$$E_a = \sqrt{e_{va}^2 + e_{da}^2 + e_{pa}^2 + e_{la}^2} = 8{,}01^s$$

Errores en distancia:

- Error en la medida de la distancia: cada distancia se mide cuatro veces, por lo que dividimos el error por $\sqrt{4}$:

$$e_d = \frac{1}{\sqrt{4}}(3mm + 3\frac{D}{1.000}) = \frac{1}{\sqrt{4}}(3mm + 3\frac{50}{1.000}) = 1{,}575mm = 0{,}001575m$$

- Despreciamos los restantes errores, ya que se emplea un sistema de centrado forzado en todas las estaciones.
- Error total en distancia:

$$E_d = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_i^2} = 0{,}001575m$$

Errores de cierre.

Los errores angulares y lineales se acumulan, a lo largo de itinerario, de la siguiente forma:

$$e_{ca} = \frac{E_a\ D}{r^s}\sqrt{\frac{n'\ (\ n'+1\ )\ (\ 2n'+1\ )}{6}} = 0{,}0047m$$

$$e_{cl} = E_d\ \sqrt{n'} = 0{,}0035m$$

n' = número de tramos del itinerario = *5*

11.3) Para la auscultación de una estructura se midieron las distancias reducidas desde tres estaciones A, B y C a un punto de control P situado en ésta. Calcula los valores más probables de las coordenadas de P, mediante mínimos cuadrados, con los datos siguientes:

Coordenadas planas de las estaciones:

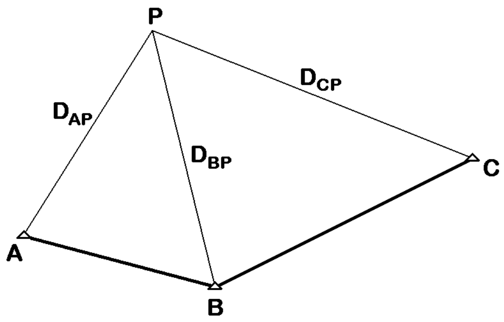
A (1.000 ; 1.040)   B (1.150 ; 1.000)   C (1.350 ; 1.100)

Distancias observadas (valores medios):

$D_A^P = 188{,}684m$ $D_B^P = 206{,}160m$ $D_C^P = 269{,}253m$

Como coordenadas aproximadas para el punto P se tomarán los valores:

$X'_P = 1.100$ $Y'_P = 1.200.$



En este ejercicio los puntos *A*, *B* y *C* son fijos y sus coordenadas no varían. Por tanto, las únicas incógnitas son las correcciones en los valores de las coordenadas del punto de control *P*, es decir dX_P y dY_P. Puesto que disponemos de tres observaciones, una desde cada punto de estación, el sistema estará compuesto por tres ecuaciones. En la ecuación tipo:

$$\frac{1}{(D_E^P)_{CAL}}\left[-(X'_P-X_E)dX_E-(Y'_P-Y_E)dY_E+(X'_P-X_E)dX_P+(Y'_P-Y_E)dY_P\right]=$$

$$=D_E^P-(D_E^P)_{CAL}+v$$

E representa al punto de estación y *P* al punto visado. dX_P, dY_P, dX_E, dX_E serían las incógnitas. $(D_E^P)_{CAL}$ es la distancia entre ambos puntos, calculada a partir de los datos aproximados, y D_E^P es la distancia observada. Asignaremos el mismo peso a todas las observaciones.

- Distancias calculadas: tomamos las coordenadas fijas de las tres estaciones y las coordenadas aproximadas del punto *P*. Las distancias serán:

$$(D_A^P)_{CAL}=\sqrt{(X'_P-X_A)^2+(Y'_P-Y_A)^2}=188{,}6796m$$

$$(D_B^P)_{CAL}=\sqrt{(X'_P-X_B)^2+(Y'_P-Y_B)^2}=206{,}1553m$$

$$(D_C^P)_{CAL}=\sqrt{(X'_P-X_C)^2+(Y'_P-Y_C)^2}=269{,}2582m$$

- Ecuaciones: al ser fijos los tres puntos de estación, sus correspondientes diferenciales se anulan y las únicas incógnitas son, como hemos indicado, los diferenciales correspondientes a las coordenadas del punto *P*, dX_P y dY_P. Por tanto, las ecuaciones serán:

$$\frac{1}{(D_A^P)_{CAL}}\left[(X'_P-X_A)dX_P+(Y'_P-Y_A)dY_P\right]=D_A^P-(D_A^P)_{CAL}+v_A$$

$$\frac{1}{(D_B^P)_{CAL}}\left[(X'_P-X_B)dX_P+(Y'_P-Y_B)dY_P\right]=D_B^P-(D_B^P)_{CAL}+v_B$$

$$\frac{1}{(D_C^P)_{CAL}}\left[(X'_P-X_C)dX_P+(Y'_P-Y_C)dY_P\right]=D_C^P-(D_C^P)_{CAL}+v_C$$

Sustituyendo:

$$\frac{(1.100-1.000)dX_P+(1.200-1.040)dY_P}{188{,}6796}=188{,}684-188{,}6796+v_A$$

$$\frac{(1.100-1.150)dX_P+(1.200-1.000)dY_P}{206{,}1553}=206{,}160-206{,}1553+v_B$$

$$\frac{(1.100-1.350)dX_P+(1.200-1.100)dY_P}{269{,}2582}=269{,}253-269{,}2582+v_C$$

Es decir:

$$0{,}5300\ dX_P+0{,}8480\ dY_P=0{,}0044+v_A$$

$$-0{,}2425\ dX_P+0{,}9701\ dY_P=0{,}0047+v_B$$

$$-0{,}9285\ dX_P+0{,}3714\ dY_P=-0{,}0052+v_C$$

- Solución: obtenemos los valores de las incógnitas mediante

$$X=(A^tA)^{-1}A^tL$$

Los resultados obtenidos son los siguientes:

$$dX_P=0{,}0055m \qquad dY_P=0{,}0039m$$

y los valores obtenidos para las coordenadas del punto incógnita serán:

$$X_P = X'_P + dX_P = 1.100,0055m$$
$$Y_P = Y'_P + dY_P = 1.200,0039m$$

En el caso de observaciones de distancias, como en el de observaciones de ángulos, la solución final se obtiene por iteraciones, tomando como nuevas coordenadas aproximadas de *P* los valores que acabamos de calcular. Se repite el proceso hasta que las diferencias entre los resultados de las iteraciones sean despreciables. En nuestro caso la solución se obtiene en la primera iteración, ya que los resultados de los valores de X_P e Y_P coinciden con los obtenidos en la segunda.

- Calcularemos también los semiejes de la elipse de error. La matriz de los residuos es:

$$V = A\,X - L = \begin{vmatrix} 0,001840554 \\ -0,002234476 \\ 0,001634324 \end{vmatrix}$$

$$(\sigma_0)^2 = \frac{V^t V}{r} = 0,000011$$

r, número de grados de libertad del ajuste, se obtiene restando al número de ecuaciones el de incógnitas: $r = 3 - 2 = 1$

$$\Sigma = (\sigma_0)^2\, Q = (\sigma_0)^2 (A^t A)^{-1} = \begin{vmatrix} 0,00000926 & 0,000000674 \\ 0,000000674 & 0,00000619 \end{vmatrix}$$

Los semiejes de la elipse de error serán:

$$a = \frac{(\sigma_X)^2 + (\sigma_Y)^2 + \sqrt{(\sigma_X)^2 - (\sigma_Y)^2 + 4(\sigma_{XY})^2}}{2} = 0,00088$$

$$b = \frac{(\sigma_X)^2 + (\sigma_Y)^2 - \sqrt{(\sigma_X)^2 - (\sigma_Y)^2 + 4(\sigma_{XY})^2}}{2} = -0,00087$$