UNIDAD DIDÁCTICA I

1. CONCEPTO DE TOPOGRAFÍA

1.1.- DEFINICIÓN

La ***Topografía*** (de *topos*, "lugar", y *grafos*, "descripción") es la ciencia que estudia los métodos para obtener la representación gráfica de una parte de la superficie terrestre con todos sus elementos, tanto naturales como artificiales.

Todo estudio de ingeniería, desde el proyecto de un tramo de carretera o una línea eléctrica hasta el diseño de un sistema de riego, precisa una representación clara y fidedigna del terreno en el que se va a desarrollar. Sobre esta representación, el equipo de ingeniería proyectará las obras a realizar, efectuará los cálculos y valorará los costes y la viabilidad del estudio. Cada proyecto de ingeniería se apoya en un trabajo topográfico, que puede tener dos fases:

- La primera es un *levantamiento topográfico*, que consiste en realizar todas las mediciones necesarias de la zona de interés, con objeto, en general, de obtener un plano topográfico de la misma.
- La segunda es un *replanteo*, que consiste en señalar sobre el terreno, empleando técnicas topográficas, todos los detalles necesarios para el desarrollo de las obras que contemple el proyecto. Estas obras habrán sido diseñadas sobre planos topográficos.

La Topografía es competencia de distintos organismos del Estado, pero también de empresas y organismos privados, ya que cualquier proyecto supone, en general, la elaboración de nuevos planos topográficos, a escalas grandes y suficientemente detallados. Estos planos pueden ser elaborados por la misma empresa u organismo que acomete el proyecto, si dispone del personal y los equipos adecuados, o por otras empresas u organismos especializados. Pero, en cualquier caso, los ingenieros relacionados con el proyecto tendrán que poseer los conocimientos suficientes para determinar:

- Las necesidades del proyecto en cuanto a cartografía: planos de situación, planos de detalle, etc.
- La escala o escalas más adecuadas para cada uno de estos planos, la equidistancia entre curvas de nivel, etc.
- Las tolerancias que pueden exigirse. En función de estas tolerancias deben fijarse los métodos e instrumentos a utilizar en el levantamiento topográfico.

La formación básica del ingeniero precisa, por tanto, de amplios conocimientos en este grupo de ciencias. A menudo el ingeniero será el responsable directo de la elaboración del levantamiento topográfico necesario para un proyecto concreto; en otras ocasiones, será responsable de la supervisión de este trabajo. En cualquier caso, sus conocimientos deben ser suficientes para acometer con garantías esta etapa, tan importante para la elaboración de cualquier estudio o proyecto.

1.2.- RELACIÓN DE LA TOPOGRAFÍA CON OTRAS CIENCIAS

La Topografía comparte métodos e instrumentos con otras ciencias, pero también dispone de muchos que le son propios. La aplicación racional de los métodos topográficos y el empleo de los instrumentos topográficos deben permitirnos cubrir los objetivos de esta ciencia: facilitar al ingeniero y a la sociedad en general la base cartográfica necesaria para la elaboración de cualquier proyecto, con unos errores que en ningún momento superen las tolerancias fijadas.

Distinguiremos entre las ciencias afines y complementarias, cuyo objeto es similar o complementario al de la Topografía, y las ciencias auxiliares, con campos de actuación diferentes, pero que intercambian con la Topografía y sus ciencias afines los conocimientos científicos que sirven, en buena medida, de base a éstas.

1.2.1.- Ciencias afines y complementarias

Dos ciencias íntimamente relacionadas con la Topografía, ya que también se ocupan del estudio de la Tierra, son la *Astronomía de Posición* y la *Geodesia*.

La Astronomía de Posición se interesa por todas las cuestiones relativas al estudio de los astros, su movimiento relativo, sus posiciones en el espacio con respecto al tiempo, etc., orientadas a conocer la posición de puntos sobre la superficie terrestre (*latitud* y *longitud*) y el momento temporal (hora local u hora universal) con respecto a unos sistemas de referencia: *paralelos*, *meridianos*, *norte geográfico*, *eje* y velocidad de giro terrestre, etc.

La Geodesia se ocupa de la forma y dimensiones de la Tierra. Proporciona los métodos e instrumentos para determinar las posiciones relativas de una serie de puntos, bien elegidos, distribuidos por toda la superficie del globo, con ayuda de los cuales puede deducirse la forma y dimensiones de grandes superficies de la Tierra o de toda ella. Estos puntos se denominan *vértices geodésicos*. En Geodesia la forma real de la superficie terrestre, que no es una figura regular, se sustituye por un *elipsoide de revolución*.

La diferencia entre la Geodesia y la Topografía estriba en que esta última se refiere a superficies de terreno mucho más reducidas. De hecho, en Topografía se suele suponer que la parte de la superficie terrestre que se está estudiando es plana. El límite de actuación de la Topografía, o frontera entre ésta y la Geodesia, será aquella dimensión para la cual los errores debidos a la simplificación consistente en no considerar la curvatura terrestre, dejen de ser despreciables.

La Geodesia, con el establecimiento de los vértices geodésicos, proporciona la estructura o armazón a partir de la cual puede trabajar la Topografía. Ésta, en efecto, hará uso habitualmente de la Geodesia, y en algunos casos también de la Astronomía de Posición, para la situación y orientación de sus trabajos. Normalmente se admite que el campo de aplicación de la Topografía queda delimitado por el triángulo geodésico de tercer orden, en cuyo interior cabe suponer plana la superficie terrestre sin introducir errores (al menos en planimetría) importantes.

La *Cartografía* es otra de las ciencias íntimamente relacionadas con la Topografía y la Geodesia. La Cartografía proporciona los métodos y los criterios para representar la superficie terrestre, o una parte de ella, en un mapa. El elipsoide de revolución no es una superficie desarrollable, por lo que se hace necesaria una transformación para poder representarlo en una superficie plana. Con el apoyo de la informática surgen los *Sistemas de Información Geográfica* (SIG o GIS) definidos como una integración organizada de hardware, software y datos geográficos diseñada para capturar, almacenar, manipular, analizar y desplegar en todas sus formas la información geográficamente referenciada con el fin de resolver problemas complejos de planificación y gestión.

La *Fotogrametría* es la ciencia que se ocupa de la obtención de medidas sobre la forma, dimensiones y posición de los objetos, a partir de imágenes fotográficas de los mismos. Una parte importante del campo de actuación de la Fotogrametría es común al de la Topografía. La Fotogrametría libera a la Topografía de algunas de sus tareas más tediosas: medición de los puntos que definen los objetos. La Topografía, por su parte, proporciona a la Fotogrametría un apoyo imprescindible para el desarrollo de sus trabajos: ayuda a fijar la situación espacial de los objetos.

La *Teledetección* se refiere no sólo a la captación de datos desde el aire o desde el espacio sino también al posterior tratamiento de datos de la superficie terrestre. Los datos se obtienen desde sensores instalados en plataformas espaciales, en virtud de la interacción electromagnética existente entre la tierra y el sensor, siendo la fuente de radiación bien proveniente del sol (teledetección pasiva) o del propio sensor (teledetección activa). Existen tres tipos de información que se puede recoger:

- Espacial, indicando la organización en el espacio de los elementos.
- Espectral, denotando la naturaleza de las superficies.
- Temporal, donde se observan los cambios en el tiempo de una determinada zona.

Los *Sistemas Globales de Navegación por Satélite* (GNSS), un caso particular de los cuales es el GPS (Sistema de Posicionamiento Global), consisten en una constelación de satélites perfectamente localizados espacial y temporalmente que transmite datos que, procesados convenientemente por los receptores, pueden proporcionar a los usuarios información sobre la posición (coordenadas Geográficas) y la hora (cuatro dimensiones) con una gran exactitud, en cualquier parte de la superficie terrestre.

1.2.2.- Ciencias auxiliares

Estas ciencias auxiliares aportan a la Topografía y a sus ciencias afines muchos de sus fundamentos, a menudo puramente formales o teóricos, pero a su vez se han beneficiado de todo el desarrollo científico conseguido por éstas. Tanto es así, que en los principios de ciencias como la Matemática y la Física se encuentra el interés del hombre por la Astronomía y no resulta fácil establecer cual de ellas debe más a la otra.

La Topografía se basa, en primer lugar, en algunas ramas de la *Matemática*, tales como la *Trigonometría* y la *Geometría*. Lo mismo sucede para todas sus ciencias afines, y en particular para la Fotogrametría, que también hace uso de la *Geometría Proyectiva* y de determinados métodos del *Cálculo Numérico* y del *Algebra Matricial*.

Para la determinación y tratamiento de los errores se emplea la *Estadística* y la *Teoría de Errores*. El tratamiento de errores es vital en Topografía, ya que nos señala las limitaciones de cada método topográfico y de cada tipo de instrumento, y en todo momento nos está indicando la calidad del trabajo realizado y, por tanto, su validez.

El desarrollo y la fabricación de los instrumentos astronómicos, geodésicos, topográficos y fotogramétricos se basan en algunas ramas de la *Física*, como la *Óptica* y la *Mecánica*. Las técnicas de fabricación de estos instrumentos van a determinar su calidad y sus limitaciones en cuanto a precisión.

El *Dibujo* y los sistemas de representación aportan una serie de técnicas, importantes para el trazado final de los resultados del trabajo topográfico. La edición y reproducción de los mapas y planos suponen, además, la intervención de las *Artes Gráficas*.

La *Electrónica* y la *Informática* han cobrado, en los últimos años, un papel muy importante, tanto en la fabricación de los modernos instrumentos electrónicos, como en el tratamiento de la información.

Nuevamente la *Física*, esta vez en todas sus ramas relacionadas con las técnicas espaciales, interviene de forma importante en la concepción y creación de los nuevos sistemas de Teledetección y de posicionamiento global por satélites.

1.3.- MAPAS Y PLANOS

Mapa es una representación plana de la superficie terrestre o de una parte de ella, cuya gran extensión requiere el empleo de métodos cartográficos, ya que habrá que tener en cuenta la curvatura terrestre. Los mapas se refieren a zonas muy amplias y, por tanto, sus escalas son pequeñas, en general. Aunque de gran utilidad para muchas aplicaciones, los mapas elaborados por el Estado no serán suficientes, normalmente, para cubrir las exigencias de los proyectos de ingeniería, que se localizan en zonas reducidas y para los que se precisa una representación a gran escala del terreno.

Si el mapa abarca todo el globo se llama planisferio y si la representación se hace con dos hemisferios, se denomina mapamundi. Los mapas marinos se denominan cartas. Los mapas pueden ser:

- *Geográficos*: Contemplan una gran superficie (continente o nación).
- *Físicos*: Representan un determinado tipo de accidente (ríos, cordilleras,...).
- *Políticos*, *históricos*, etc.

Cuando la superficie a representar es menor y no se requiere el uso de proyecciones cartográficas, se habla de planos. Se trata de proyecciones ortogonales sobre un plano de referencia horizontal y suelen constituir la base topográfica para los trabajos de ingeniería.

1.4.- ESCALA Y LÍMITE DE PERCEPCIÓN VISUAL

Escala es la relación lineal de semejanza entre un mapa o plano y la parte del terreno real representada en él. Se admite que la vista humana puede alcanzar a percibir magnitudes de hasta *1/4* de milímetro, con errores inferiores a *1/5* de milímetro. Este *límite de la percepción visual*, que se fija en *0'20mm*, representa, según sea la escala del plano, magnitudes de la realidad muy distintas.

Por ejemplo, a escala *1:5.000*, *0'20 milímetros* suponen:

5.000 x 0'20 = 1.000mm = 1 metro

En un plano a esta escala es inútil alcanzar una precisión en el levantamiento topográfico de detalles superior a este valor, ya que los detalles menores de *1m* no tienen representación visible en el plano. La escala del plano en el que se va a materializar el trabajo topográfico debe ser, por tanto, tenida en cuenta a la hora de planificar y realizar dicho trabajo.

A una escala *1:5.000*, en la que el límite de la percepción visual supone *1m*, tendríamos que levantar topográficamente los dos lindes de un camino de *5-7m* de anchura, que en el plano aparecerían como dos líneas bien diferenciadas. A una escala *1:50.000*, en la que el límite de la percepción visual supone *10m*, por el contrario, el camino se representaría por una sola línea, por lo que sería suficiente levantar topográficamente su eje, con el consiguiente ahorro de tiempo y trabajo.

La *tolerancia*, o error máximo admisible en un trabajo topográfico, dependerá, por las mismas razones, de la escala del plano final. La tolerancia fijada para un trabajo topográfico concreto nunca podrá ser menor que el límite de la percepción visual multiplicado por el denominador de la escala.

1.5.- CONCEPTO DE PLANIMETRÍA Y ALTIMETRÍA

En Topografía obtenemos una representación plana (en dos dimensiones) de la realidad tridimensional, proyectándola ortogonalmente sobre un plano horizontal. La proyección ortogonal del terreno sobre un plano horizontal *XY* permitirá situar cualquier punto sobre ese plano y dibujar en planta todos los detalles, pero será preciso introducir algún sistema adicional para representar también la información correspondiente al eje vertical *Z*.

Llamamos *planimetría* a la parte del trabajo topográfico consistente en determinar la situación de los puntos del terreno en el plano de proyección *XY*. Los instrumentos y métodos topográficos *planimétricos* son los que se emplean para realizar las mediciones que nos van a permitir obtener una representación planimétrica del terreno.

La *altimetría* será la parte correspondiente al eje vertical *Z*. Del mismo modo, se habla de instrumentos y métodos topográficos *altimétricos*, cuyo objeto será permitirnos determinar la *altitud* de los distintos puntos del terreno. La representación planimétrica del terreno suele completarse con *curvas de nivel*, un sistema convencional que permite incorporar en el plano los detalles altimétricos, dibujando las intersecciones de la superficie del terreno con una serie de planos horizontales, equidistantes y paralelos. El incremento de *Z* entre dos curvas de nivel consecutivas se denomina *equidistancia*.

1.6.- INFLUENCIA DE LA CURVATURA TERRESTRE

1.6.1.- Influencia en planimetría

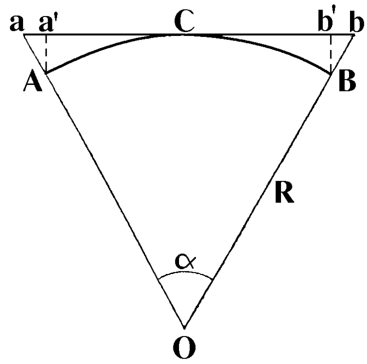

Fig. 1.1. Influencia de la curvatura terrestre en planimetría

Supongamos que desde el punto *C* de la figura 1.1 levantamos topográficamente el arco *ACB* de la superficie terrestre, considerada esférica. La representación plana de *ACB*, si despreciamos la curvatura terrestre, debería ser la recta *a'b'*, proyección ortogonal de *ACB* sobre el plano tangente a la esfera en *C*.

Sin embargo, la proyección no será perpendicular a ese plano, sino siguiendo la dirección vertical, que pasaría por el centro de la Tierra, por lo que la representación de *ACB* será en realidad la recta *ab*. La diferencia entre los tres valores es la que hay entre la tangente, la cuerda y el arco:

$$ab = 2\,R\,tg\frac{\alpha}{2} \qquad AB = a'b' = 2\,R\,sen\frac{\alpha}{2} \qquad ACB = 2\,\pi\,R\,\frac{\alpha^o}{360^o}$$

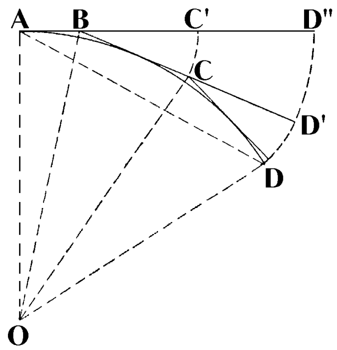

Fig. 1.2. Influencia de la curvatura terrestre en planimetría (2)

siendo *AB* la cuerda y *ACB* el arco. Para una distancia *ab* del orden de *10km*, la diferencia *ab-a'b'* es del orden de *2mm*, valor totalmente despreciable. Esta distancia corresponde aproximadamente al arco *α=5'* (*5* minutos sexagesimales).

En un recorrido *ABCD*, figura 1.2, lo que se hace es sustituir el arco *ABCD* por la poligonal circunscrita *AB-BC-CD*. Si los tramos *AB*, *BC*, etc. son menores de *10km*, la diferencia será, como en el caso anterior, despreciable. El arco *ABCD* queda sustituido por la recta *AD*", obtenida al desarrollar la línea *AB-BC-CD*.

En general, dentro del arco de *5'*, podemos considerar despreciable el error planimétrico cometido al suponer plana la superficie terrestre. Este arco corresponde a distancias del orden de *10km*, que son las distancias máximas entre los vértices geodésicos de las redes más densas.

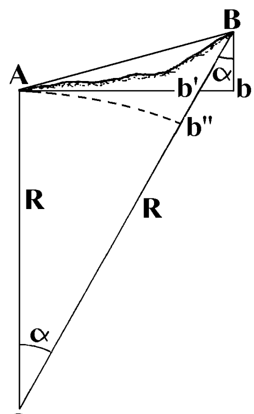

Fig. 1.3. Influencia de la curvatura terrestre en altimetría

1.6.2.- Influencia en altimetría

Si levantamos topográficamente el punto *B* desde *A* (figura 1.3) obtendremos un desnivel *Bb*. Sin embargo, si referimos las medidas altimétricas a una *superficie de nivel*, no a un plano horizontal, el verdadero desnivel entre *A* y *B* será *Bb"*.

La corrección de esfericidad será la diferencia entre estos dos valores, es decir:

$$\varepsilon = Bb'' - Bb$$

El ángulo *α* que forman los radios de la Tierra, supuesta esférica, en los puntos A y *B* será muy pequeño, por lo que podemos hacer:

$$Bb' \approx Bb \qquad Ab' \approx Ab = D$$

siendo *D* la distancia reducida entre *A* y *B*. Por tanto:

$$\varepsilon = Bb'' - Bb \approx Bb'' - Bb' = b'\,b''$$

En el triángulo *Ab'O*, rectángulo en *A*, tenemos:

$$Ob' \approx R + \varepsilon \qquad OA = R \qquad Ab' \approx D$$

siendo *R* el radio de la Tierra, supuesta esférica. Por tanto:

$$(R + \varepsilon)^2 = R^2 + D^2$$

$$R^2 + \varepsilon^2 + 2\,R\,\varepsilon = R^2 + D^2$$

Como la corrección *ε* será muy pequeña en comparación con *R* y con *D*, podemos despreciar ε^2, quedando:

$$2\,\varepsilon\,R = D^2 \qquad \varepsilon = \frac{D^2}{2R}$$

En la siguiente tabla mostramos distintos valores de la corrección de esfericidad *ε* para diferentes ángulos *α* y desniveles *Bb*.

α **(en minutos sexag.)**	**distancia *Ab'* (metros)**	***ε*** **(milímetros) según el desnivel *Bb* (metros)**			
		1	**10**	**100**	**1.000**
0,01	**18,5**	0,0	0,0	0,0	0,0
0,1	**185**	-2,7	-2,7	-2,7	-2,7
1	**1.853**	-269,5	-269,5	-269,5	-269,5
1,5	**2.779**	-606,4	-606,4	-606,4	-606,5
2	**3.706**	-1.078,0	-1.078,0	-1.078,0	-1.078,2
3	**5.559**	-2.425,5	-2.425,5	-2.425,6	-2.425,9
4	**7.412**	-4.312,0	-4.312,0	-4.312,1	-4.312,7
5	**9.265**	-6.737,6	-6.737,6	-6.737,7	-6.738,6
6	**11.118**	-9.702,1	-9.702,1	-9.702,2	-9.703,6
7	**12.971**	-13.205,6	-13.205,6	-13.205,8	-13.207,7

Para *α=5'* el error resulta mayor de *6m*, lo que difícilmente podrá ser aceptable. Para una distancia *Ab* de *185m* el error es del orden de *3mm*, que tampoco puede admitirse en un levantamiento altimétrico de precisión. Se confirma, por tanto, que la influencia de la curvatura terrestre es mucho más importante en altimetría.

2. NOCIONES DE GEODESIA

2.1.- INTRODUCCIÓN A LA GEODESIA

El objeto de la Geodesia es el estudio y la determinación de la forma y dimensiones de la Tierra. Proporciona los métodos necesarios para determinar las posiciones de una serie de puntos distribuidos por toda la superficie del globo. Estos puntos se denominan *vértices geodésicos* y van a servir como apoyo a los levantamientos topográficos.

Fig. 2.1. Vértice geodésico

Fig. 2.2. Detalle de la placa

Existen distintas maneras de determinar la forma y dimensiones de la Tierra, razón por la cual resulta necesario dividir la Geodesia en distintas ramas:

- **Astronomía Geodésica**.- Permite calcular mediante observaciones astronómicas las coordenadas geográficas: longitud, latitud y dirección de la meridiana. Esta rama es la primera que interviene y determina unas referencias conocidas como *Puntos Astronómicos Fundamentales* y *Datum*.
- **Geodesia clásica o geométrica**.- Emplea el elipsoide como superficie de referencia, midiendo ángulos y distancias y resolviendo triángulos elipsoídicos. Resuelve la forma y dimensiones sobre dicha superficie. Como origen de coordenadas parte de un Datum.
- **Geodesia física o dinámica**.- Estudia el campo gravitatorio, partiendo de mediciones gravimétricas. Permite conocer la forma pero no las dimensiones. Por eso es necesario que se apoye en puntos obtenidos mediante otras ramas de la Geodesia.
- **Geodesia espacial o tridimensional**.- Utiliza satélites espaciales para determinar las coordenadas. Trata el problema de la forma y dimensiones de la Tierra en un sistema de referencia cartesiano tridimensional, en el que el elipsoide sólo será una superficie auxiliar sobre la que recalcular las coordenadas geográficas.

La utilidad de conocer nuestro territorio y la posición en la que nos encontramos se esta extendiendo a muchos aspectos de nuestra vida cotidiana gracias, fundamentalmente, a la difusión de los Sistemas de Posicionamiento Global, comúnmente conocidos como GPS, que corresponden a la rama de la Geodesia espacial.

2.2.- LAS FORMAS DE LA TIERRA. SISTEMAS DE REFERENCIA

Para poder posicionar los vértices geodésicos es preciso elegir un sistema de referencia, es decir una superficie sobre la que proyectar los puntos y que nos definirá el origen de altitudes. Pasemos a describir las tres superficies que se utilizan: esfera, elipsoide y geoide.

2.2.1.- Esfera

La primera aproximación a la forma de la Tierra de la cual se tiene constancia es de Parménides (515-440 a.C.) y Empedocles (470 a.C.) que emitieron por primera vez la idea de la esfericidad de la Tierra y su aislamiento en el espacio. Filolao (450 a.C.), de la escuela pitagórica, opina que la Tierra gira alrededor de sí misma produciendo los días y las noches y se desplaza, como el Sol, la Luna, los planetas y a mayor distancia el cielo con las estrellas fijas, alrededor del fuego central, alma del mundo

La teoría de Aristóteles (384-322 a.C.) sostiene:

1) La Tierra es esférica porque tal es la forma aparente de los demás astros, tal es también la forma que toma un cuerpo, como una gota de agua, sometido a la sola presencia de sus partes y tal es la forma que nos revela la sombra terrestre en los eclipses de Luna.
2) Las dimensiones de la Tierra no deben ser desmesuradas puesto que con el cambio de lugar varían el aspecto y número de las estrellas visibles.
3) La Tierra no debe moverse en el espacio, ya que su movilidad hipotética no se refleja en la posición constante de los demás astros, la altura de un astro variaba de igual forma a la misma hora en cualquier parte de la Tierra.

Eratóstenes de Cyrene (276-195 a.C.), bibliotecario de la Biblioteca de Alejandría, fue el primero en determinar, 240 años a.C., el radio terrestre. Midió la longitud del meridiano entre Siena (actual Aswan) y Alejandría, obteniendo un valor de unos *39.000Km* para la longitud de la circunferencia terrestre (unos *6.207Km* de radio). Eratóstenes se dio cuenta de que en el solsticio de verano el Sol iluminaba en Siena los pozos hasta el fondo, por lo que en ese momento se encontraba en el cenit en su culminación. En ese mismo instante midió la altura del Sol en Alejandría, que suponía estaba en el mismo meridiano que Siena. La distancia cenital determinada no era otra cosa que el ángulo que en el centro de la Tierra esférica formaba el arco de meridiano Siena-Alejandría

Fig. 2.3. Astronomía del siglo XVIII

Esta primera aproximación se mantuvo a lo largo de los siglos, hasta que Newton (1642-1727) formula su ley de gravitación universal en 1666 y la publica en

1687. Según ésta, un cuerpo suspendido en el espacio sometido únicamente a la atracción gravitatoria formaría una esfera, y si se encuentra rotando sobre si mismo, debería de achatarse por los polos, formando una figura de revolución: elipsoide.

2.2.2.- Elipsoide

El *elipsoide de revolución* es la figura generada por una elipse de semiejes *a* y *b* al girar en torno a su eje menor *b*. El problema inicial consiste en definir los valores de los dos semiejes. Esto motivó que en un principio cada país adoptara el elipsoide que mejor se adaptaba a sus necesidades. Con el fin de unificar los datos geodésicos de toda la superficie terrestre se decidió, en 1924, generalizar el uso del elipsoide de *Hayford.*

También está generalizado el elipsoide WGS84, que es el utilizado por el sistema GPS.

Por otra parte, desde 2007 legalmente la cartografía española utiliza el sistema ETRS89 (*European Terrestrial Referente System* 1989) cuyo elipsoide es el GRS80.

2.2.3.- Geoide

Evidentemente la aproximación mediante el elipsoide es solo un acercamiento a la realidad, ya que nuestro planeta no es homogéneo en cuanto a sus materiales y densidades por lo que no adopta la forma teórica esperada por Newton. Es decir, si prolongamos el nivel medio del agua de los mares por debajo de los continentes, obtendríamos una superficie equipotencial irregular, que se denomina *geoide*, que se toma como origen de altitudes ortométricas, siendo normal a todas las líneas de fuerza del campo gravitatorio terrestre. La determinación del geoide se convierte así en uno de los objetivos fundamentales de la Geodesia y en concreto de la rama física o dinámica, a partir de datos gravimétricos.

2.3.- SISTEMAS DE COORDENADAS

Definamos primero los siguientes elementos:

- **Ejes y polos**

  La Tierra gira en torno a un eje, que se denomina *Eje Polar* o *Eje de la Tierra*. Los *polos* Norte y Sur son las intersecciones de este eje con la superficie de referencia.

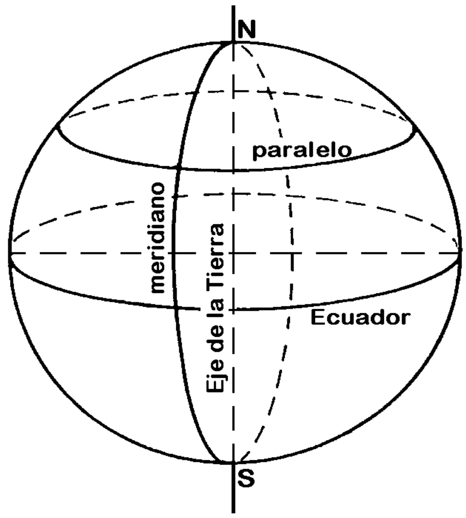

Fig. 2.4. Polos, meridianos y paralelos

- **Meridianos y paralelos**

  La sección producida en la superficie de referencia por un plano que contenga al eje de la Tierra se llama *meridiano*. Los meridianos, por tanto, pasan por los polos y tienen forma de elipse (figura 2.4).

  La sección producida por un plano perpendicular al eje de la Tierra se denomina *paralelo*. Los paralelos son circunferencias (figura 2.4). El paralelo mayor, correspondiente al plano que pasa por el centro de la Tierra y se denomina *Ecuador*.

Un punto *P* se sitúa por la intersección de un meridiano y un paralelo.

- **Concepto de meridiana.**

  Además de las coordenadas geográficas, en cada vértice necesitamos conocer la *orientación*, es decir, la dirección en que se sitúan los polos geográficos Norte y Sur. La orientación se materializa por la recta intersección del plano tangente en el vértice y el plano meridiano que pasa por el vértice. Esta intersección se llama *meridiana* y a ella se refiere la orientación de cualquier alineación que contenga al vértice *P* (figura 2.5).

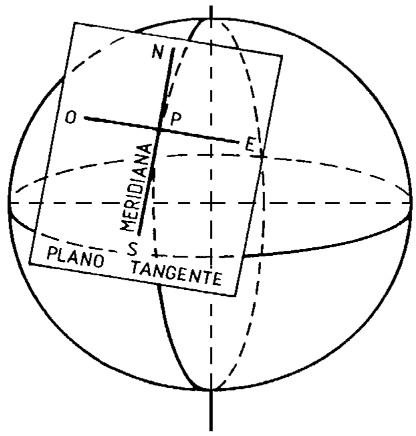

Fig. 2.5. Meridiana

  El ángulo formado por una alineación y la meridiana se llama *acimut*. Los acimutes geodésicos se cuentan a partir del Sur y en el sentido creciente de las agujas del reloj. Los acimutes topográficos, en cambio, se cuentan a partir del Norte y en el mismo sentido que los geodésicos (figura 2.6), por lo que difieren de estos en $\pm 180^o$ (ó 200^g).

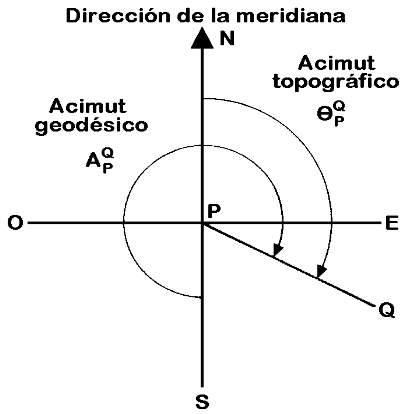

Fig. 2.6. Acimut

- **Convergencia de meridianos**

  Las meridianas en dos puntos distintos no son paralelas, existiendo una diferencia angular, llamada *convergencia de meridianos*, debida a que los meridianos no son paralelos, sino que se cortan en los polos. El valor de la convergencia de meridianos depende de las posiciones de ambos puntos. En trabajos topográficos afectando a superficies reducidas se desprecia, normalmente, la convergencia y se supone que las meridianas son paralelas en todos los puntos de la zona en la que se está trabajando.

2.3.1.- Coordenadas geográficas elipsoidales o geodésicas

Longitud geodésica es el ángulo (λ), expresado en grados sexagesimales, formado por el plano del meridiano origen y el del meridiano que pasa por el punto o *meridiano del lugar* (figura 2.7). Un punto dado mantiene la misma longitud al usar la esfera u otro elipsoide de referencia, siempre que se utilice el mismo meridiano origen.

Las longitudes se cuentan a ambos lados del meridiano origen, siendo positivas al Este y negativas al Oeste. En España, desde finales de los años 60, se ha adoptado como meridiano origen el de *Greenwich.*

Latitud geodésica es el ángulo (φ), expresado en grados sexagesimales, formado por la normal *n* al elipsoide desde el punto y el plano ecuatorial (figura 2.7). Nótese que dicha normal no pasa por el centro del elipsoide y sí por el eje polar. Esta latitud es diferente tanto si consideramos la Tierra esférica como si nos referimos a uno u otro elipsoide.

La latitud puede ser norte o sur, según dicho punto esté situado en el hemisferio norte o sur.

Las medidas se realizan sobre la superficie terrestre, pero todos los procedimientos de traslado de coordenadas se calculan sobre el elipsoide. Al conjunto de métodos para trasladar las mediadas realizadas al elipsoide se le conoce como problema de reducción.

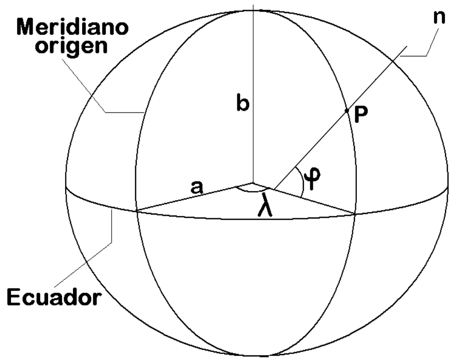

Fig. 2.7. Longitud y latitud

2.3.2.- Coordenadas geográficas astronómicas

Latitud astronómica es el ángulo (Φ) formado por la vertical astronómica desde el punto (línea de la plomada) y el plano ecuatorial. Nótese que dicha vertical no pasa por el centro del elipsoide ni por el eje polar. Esta latitud es diferente a la geodésica.

Longitud astronómica es el ángulo (Λ) formado por el plano del meridiano origen y el del meridiano astronómico local (plano que contiene la vertical astronómica y es paralelo al eje polar).

2.3.3.- Coordenadas rectangulares geocéntricas

Es un sistema cartesiano de tres ejes centrado en el centro de masas terrestre o bien en el centro del elipsoide adoptado. El eje *X* se sitúa en la dirección del meridiano de Greenwich, el eje *Z* es perpendicular al plano ecuatorial y el eje *Y* perpendicular a los otros dos (figura 2.11).

Con el desarrollo de la geodesia espacial apoyada en la observación a los satélites artificiales, el cálculo de posiciones relativas entre puntos es un tema independiente de la superficie sobre la que proyectar estas posiciones, es decir, una vez conocidas las coordenadas espaciales de los puntos estos se pueden proyectar sobre un elipsoide o geoide (siempre que esté bien definida en el espacio esta superficie).

2.3.4.- Sistemas de altitudes

De lo anterior se deduce que un punto de la superficie terrestre tiene una altura sobre la superficie del elipsoide, la cual se mide sobre la vertical geodésica,

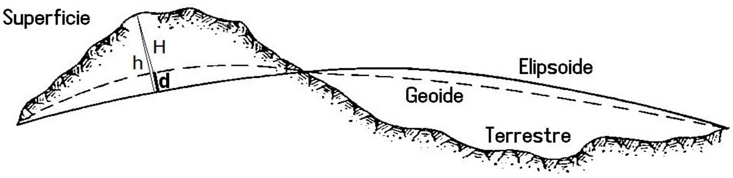

Fig. 2.8. Altura elipsoidal y altura ortométrica

llamada *altura elipsoidal* (*h*), y otra altura sobre el geoide o más conocida como altura sobre el nivel medio del mar (en España se toma el nivel medio en Alicante) llamada *altura ortométrica* (*H*). La diferencia entre ellas es lo que llamamos *ondulación del geoide* (*d*) que representa las desviaciones del geoide con respecto al elipsoide de referencia (figura 2.8). Por tanto la fórmula que liga las alturas es: *h=H+d*

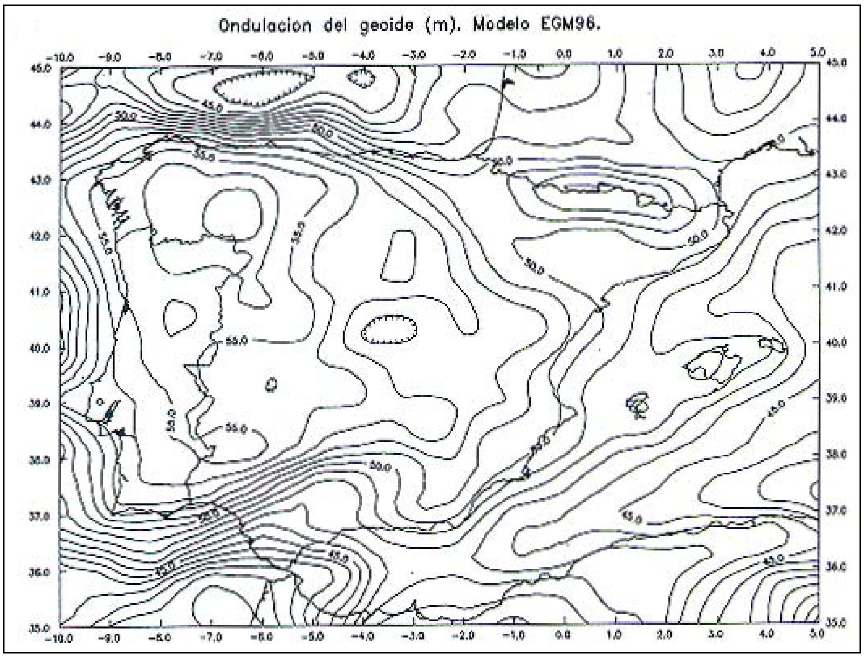

Fig. 2.9. Modelo de geoide. Fuente: IGN

2.3.5.- Transformación entre sistemas

Las expresiones que permiten transformar coordenadas geodésicas (λ, φ, h) y geocéntricas son las siguientes:

$$X = (N + h)\cos\varphi \cos\lambda$$

$$Y = (N + h)\cos\varphi \, sen\lambda$$

$$Z = \left[N(1 - e^2) + h\right] sen\varphi$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\varphi}}$$

Siendo: a = semieje mayor del elipsoide
N = normal
e = excentricidad del elipsoide: $e^2 = 1 - (b^2/a^2)$
h = altura elipsoidal

El paso de rectangulares a geodésicas se resolvería aplicando un proceso iterativo con las siguientes expresiones:

$$tg\lambda = \frac{Y}{X}$$

$$tg\ \varphi = \frac{Z + e^2\ N sen\varphi}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}$$

$$h = \frac{X}{cos\varphi\ \ cos\lambda} - N$$

Donde: $$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\ sen^2\varphi}}$$

De lo cual se desprende que para transformar coordenadas geodésicas entre diferentes elipsoides (cuyo origen sea el mismo) hay que transformarlas en coordenadas geocéntricas como paso intermedio. Esta idea es importante ya que cuando cambiamos de unos sistemas a otros el mismo punto tiene coordenadas geodésicas (*λ, φ, h*) diferentes.

2.4.- SISTEMAS DE REFERENCIA Y MARCOS DE REFERENCIA GEODÉSICOS

Los trabajos geodésicos requieren el posicionamiento de puntos en la superficie de la Tierra y la determinación precisa de sus coordenadas. Naturalmente, los valores de las coordenadas que definen un punto van a depender del sistema al cual están referidas, que debe estar claramente definido. Un *sistema de referencia geodésico*, o *Datum*, es la definición completa de los parámetros empleados para establecer las coordenadas de cualquier punto de la Tierra de forma inequívoca.

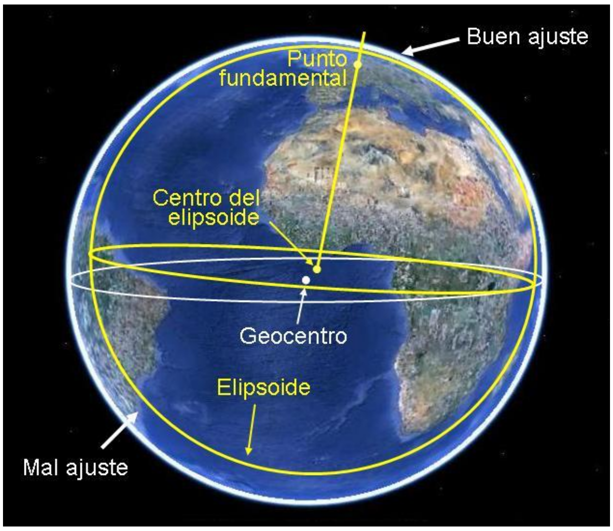

Fig. 2.10. Sistema de referencia local: ED50

La Geodesia clásica ha empleado sistemas de referencia *locales*, cuyo ámbito de aplicación está restringido a una determinada zona o territorio. Estos sistemas están definidos por:

- un elipsoide de referencia, del que se indican sus dimensiones
- un *punto fundamental* en el que se hace coincidir la vertical del lugar con la normal al elipsoide. Generalmente, también se establece la condición de tangencia entre elipsoide y geoide
- un meridiano de referencia, origen de las longitudes geográficas

Un elipsoide situado de esta manera se adapta bien al geoide en una zona más o menos amplia, centrada en el punto fundamental, pero se adaptará peor cuanto más nos alejemos de éste (figura 2.10). Los datums clásicos se definieron con el objetivo de buscar un buen ajuste sólo en un territorio determinado (un país, un continente), lo que resultaba suficiente para las necesidades geodésicas y cartográficas de ciertas épocas.

En la actualidad se precisa el empleo de sistemas de referencia *globales*, que puedan ser empleados en toda la Tierra y servir de base, adecuadamente, a los sistemas de navegación por satélite. Se trata de sistemas de coordenadas cartesianas tridimensionales, cuyo centro se sitúa en el centro de masas del planeta. El eje *Z* coincide aproximadamente con el eje de rotación de la Tierra, el eje *X* es perpendicular a él y se sitúa en el plano correspondiente al meridiano de referencia y el eje *Y* es perpendicular a ambos (figura 2.11). Para definir las coordenadas geográficas se asocia al sistema un elipsoide, cuyo centro se hace coincidir con el origen de coordenadas cartesianas, definido por sus semiejes.

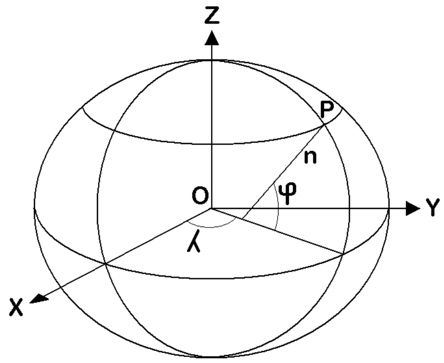

Fig. 2.11. Sistema de referencia global

España adoptó en 1970 el denominado ED50 como sistema oficial. Se trata de un sistema de referencia local, de ámbito europeo, que sustituyó a otro más antiguo y de ámbito aun más restringido, el Datum Madrid con elipsoide de Struve. Posteriormente, el RD 1071/2007, de 27 de julio, por el que se regula el sistema geodésico de referencia oficial en España, estableció lo siguiente:

- Se adopta el sistema ETRS89 como sistema de referencia geodésico oficial en España. Tiene asociado el elipsoide GRS80 y está materializado por el marco que define la Red Geodésica Nacional por Técnicas Espaciales, REGENTE, y sus densificaciones.
- Se tomará como referencia de altitudes los registros del nivel medio del mar en Alicante. El sistema está materializado por las líneas de la Red de Nivelación de Alta Precisión.

Como consecuencia, la cartografía española deberá adaptarse al nuevo sistema de referencia en los términos y plazos establecidos en el Real Decreto. Eso supone compilarla y publicarla en el nuevo sistema a partir de 2015, pudiendo, hasta entonces, emplearse cualquiera de los dos sistemas, siempre que la producida en ED50 contenga la referencia a ETRS89. Los métodos para transformar al nuevo sistema las coordenadas referidas a los sistemas antiguos serán establecidos y hechos públicos por el Consejo Superior Geográfico en su página web ubicada en el portal www.fomento.es.

A continuación, se definen brevemente estos y otros sistemas de referencia geodésicos que conviene conocer.

ED50 (*European Datum 1950*)

Emplea el elipsoide Hayford de 1909, también conocido como Internacional de 1924, y cuyas características son:

- Semieje mayor: *a = 6.378.388m*
- Aplanamiento: *(a-b)/a = 1/297*
- Punto fundamental: Potsdam (Alemania). Origen de longitudes: meridiano de Greenwich. Origen de latitudes: el Ecuador.

Las coordenadas geográficas se transforman en coordenadas planas mediante la proyección cartográfica UTM. Las altitudes se refieren al geoide (ortométricas).

WGS84 *(World Geodetic System 1984)*
Sistema de referencia utilizado por la tecnología GPS. Su elipsoide asociado es el WGS84, cuyas características son:

- Semieje mayor: *a = 6.378.137m*
- Aplanamiento: *(a-b)/a = 1/298,257223563*

Es un sistema cartesiano centrado en el centro de masas de la Tierra (o geocentro). Las altitudes están referidas al elipsoide WGS84.

ITRS (*International Terrestrial Reference System)*
Es un sistema de referencia geodésico dentro del contexto de la teoría de la relatividad. Es válido para la Tierra y espacio próximo. Su elipsoide asociado es el GRS80 (*Geodetic Reference System 1980*), cuyas características son:

- *Semieje mayor: a = 6.378.137*
- Aplanamiento: *(a-b)/a = 1/298,2572221008827*

Se puede observar que las características que definen el elipsoide WGS84 son muy similares a las del GRS80 lo que, a nivel usuario, los hace prácticamente equivalentes. Es un sistema cartesiano centrado en el centro de masas de la Tierra. Las altitudes están referidas al elipsoide GRS80.

ETRS89 (*European Terrestrial Reference System 1989)*
Es un sistema ligado a la parte estable de la placa continental europea y se ha adoptado para evitar variaciones en las coordenadas provocadas por la deriva continental. Su elipsoide asociado es el GRS80.

Para materializar un sistema de referencia geodésico determinado y poder aplicarlo en la práctica, se requiere lo que se denomina un *marco de referencia*. Se trata de un conjunto, suficientemente denso, de puntos marcados en el terreno cuyas coordenadas han sido calculadas en el correspondiente sistema de referencia. A partir de ellos, será posible georreferenciar cualquier trabajo geodésico o cartográfico realizado en el territorio ocupado por la red de puntos.

El marco de referencia del sistema ED50 está constituido por la red clásica de vértices geodésicos (más de 11.000) materializados en el terreno y cuyas coordenadas están referidas al elipsoide Hayford. Esta red de vértices se denomina *Red de Orden Inferior* (ROI).

El proyecto REGENTE (*Red Geodésica Nacional por Técnicas Espaciales*) estableció el marco de referencia en España para el sistema ETRS89. La red se completó en 2001 y está constituida por más de *1.000* estaciones, elegidas de manera que exista una, al menos, por cada hoja del Mapa Topográfico Nacional *1:50.000*. Estas estaciones se hacen coincidir con vértices de la red clásica, lo que permite disponer de una serie de puntos cuyas coordenadas están referidas a ambos sistemas (ED50 y ETRS89).

El Instituto Geográfico Nacional viene desarrollando, desde 1988, una red de estaciones permanentes GNSS denominada ERGNSS (Estaciones de Referencia GNSS). Esta red está integrada en el sistema internacional ITRF (International Terrestrial Reference Frame).

2.5.- REDES GEODÉSICAS

2.5.1.- Tipos de redes

Se pueden clasificar las redes geodésicas en función del tamaño o del método de observación y cálculo.

En función del tamaño tenemos dos tipos:

- **Redes Geodésicas** en las que hay que tener en cuenta todos los parámetros que influyen en observaciones entre vértices a grandes distancias, como pueden ser influencias atmosféricas (retrasos por las capas ionosférica y troposférica, valores de temperatura, humedad, etc.), reducciones al elipsoide, desviaciones de la vertical, estudios gravimétricos, etc.
- **Redes Microgeodésicas** en las que algunas de las anteriores variables pasan a ser despreciables dentro de la escala de trabajo, aunque por el contrario se exigen unas tolerancias muy pequeñas dada su finalidad (instalaciones industriales, controles de deformaciones, etc.)

En función del método de observación:

- **Redes Geodésicas Clásicas**. Se basan en mediciones de distancias y ángulos para determinar las posiciones relativas entre los vértices geodésicos en un determinado sistema de referencia.
- **Redes Geodésicas Espaciales**. Consisten en determinar la posición de cada uno de los vértices a partir de unas observaciones a elementos espaciales (satélites naturales o artificiales o fenómenos astronómicos).

2.5.2.- La Red Geodésica Clásica Española

Para la determinación de las coordenadas geográficas y los acimutes de los vértices geodésicos se parte de un vértice, llamado *Punto Astronómico Fundamental*, en el que se determinan, por métodos exclusivamente astronómicos, sus coordenadas y el acimut de una alineación que pase por él. El Punto Astronómico Fundamental coincide con un observatorio astronómico dotado de equipos de observación muy precisos.

Se realizan triangulaciones geodésicas, apoyadas en un lado llamado *base*, que se sitúa hacia el centro de la zona ocupada por la triangulación y cuya longitud y acimut se miden con el máximo rigor posible.

A partir de la base se van formando triángulos elipsóidicos, cuyos vértices son precisamente los vértices geodésicos, apoyados unos en otros y cuyos ángulos se miden con gran precisión. Los triángulos se van resolviendo de forma escalonada, comenzando por los dos que tienen a la base como uno de sus lados. Las coordenadas geográficas se determinan realizando cálculos sobre el elipsoide, a partir de los datos tomados en la triangulación.

Es habitual medir otras bases en los extremos de la zona a cubrir, de forma que nos permitan realizar comprobaciones y cuantificar los errores producidos.

Las mediciones necesarias para determinar las coordenadas geográficas de los vértices geodésicos deben hacerse con la máxima precisión. Puesto que en una triangulación cada vértice se determina a partir de los anteriores, los errores cometidos se irán acumulando, siendo máximos en los triángulos más alejados de la base. En un territorio como el ocupado por nuestro país, el número necesario de triángulos es muy grande y la acumulación de errores resultaría excesiva. Para evitarlo, se han establecido tres redes de vértices geodésicos, cada una apoyada en las anteriores.

La red geodésica de 1^er^ orden está constituida por grandes triángulos cuyos vértices distan entre *30* y *70Km*. generalmente, pudiendo llegar a superar los *200km* en algún caso. La base se estableció en Madridejos (Toledo) y medía más de *14.000m*. También se midieron algunas bases en la periferia de la península, para que sirvieran de comprobación. Al tratarse de distancias grandes, el número de triángulos es limitado, pudiendo mantenerse los errores en valores aceptables.

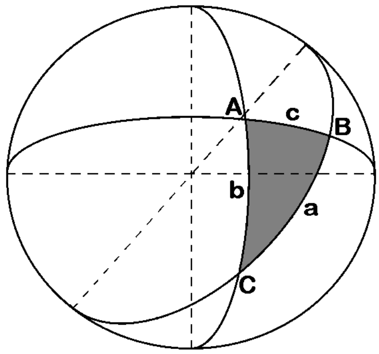

Fig. 2.12. Detalle de triángulo geodésico

Las distancias entre vértices de 1^er^ orden son excesivas para las aplicaciones geodésicas normales. Por ello se estableció la red de 2º orden, formada por vértices distantes entre sí de *10* a *25 Km*. Todo vértice de la 1ª red lo es también de la 2ª. El número de vértices de esta red es muy superior al de la red de 1^er^ orden, pero los errores nunca serán excesivos pues la 1ª red sirve de apoyo a la 2ª, de forma que el número de triángulos de 2º orden situados dentro de cada triángulo de 1^er^ orden es muy reducido.

Por las mismas razones, se estableció la red de 3^er^ orden, con lados entre *5* y *10Km*. Todos los vértices de 1^er^ y 2º orden son también vértices de 3^er^ orden. Las torres de las iglesias de los pueblos son vértices auxiliares de 3^er^ orden. Los triángulos de 3^er^ orden no se calculan ya como triángulos elipsóidicos, sino como triángulos planos y el terreno comprendido dentro de cada uno de ellos entra en el campo de aplicación normal de la Topografía.

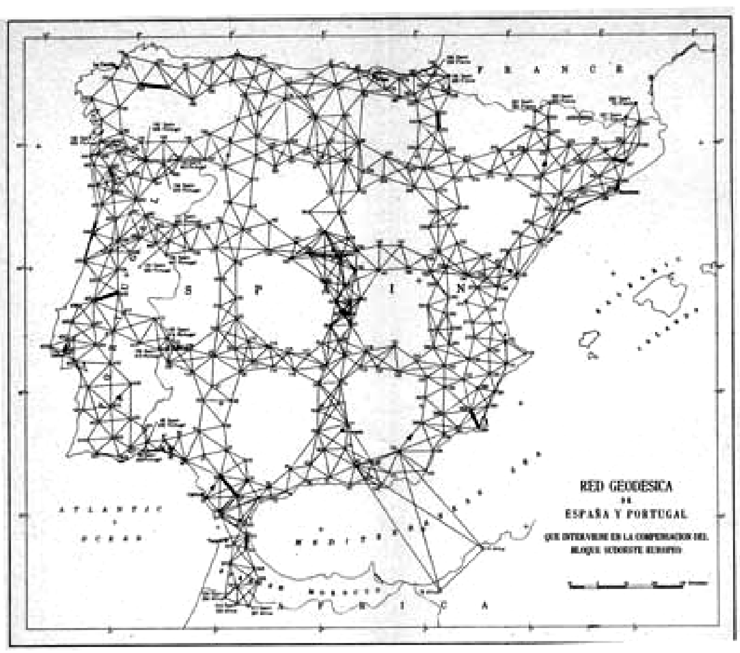

Fig. 2.13. Detalle de las primeras cadenas de triángulos geodésicos.

2.5.3.- Redes Geodésicas espaciales

Desde el lanzamiento de los primeros satélites artificiales para los primitivos sistemas de navegación y posicionamiento (TRANSIT, LORAN, etc.) hasta llegar a los Sistemas de Navegación por Satélite (GNSS), como el GPS, el GLONASS y el futuro Galileo, han ido desarrollándose los modernos sistemas de referencia geodésicos globales, que permiten alta precisión y homogeneidad para el posicionamiento y la navegación.

Fig. 2.14. Ejemplo de red geodésica intercontinental

Además de la triangulación, método clásico en la determinación de vértices en Geodesia, se utiliza en la actualidad una serie de sistemas para el cálculo de coordenadas, que se apoya, en general, en el empleo de satélites artificiales.

Frecuentemente estos métodos se basan en el cálculo de una intersección múltiple en el espacio, a partir de las distancias entre el punto a determinar y una serie de satélites, conocidas las posiciones espaciales de estos. Entre los métodos que se emplean podemos mencionar:

- *SLR*, que mide la distancia a satélites mediante láser.
- *VLBI*, que se basa en la observación de radiofuentes estelares (cuásar).
- *TRANSIT*, que utiliza el método Doppler.
- *GNSS*, que utiliza las distancias a satélites medidas en función del tiempo de viaje de una señal radio.

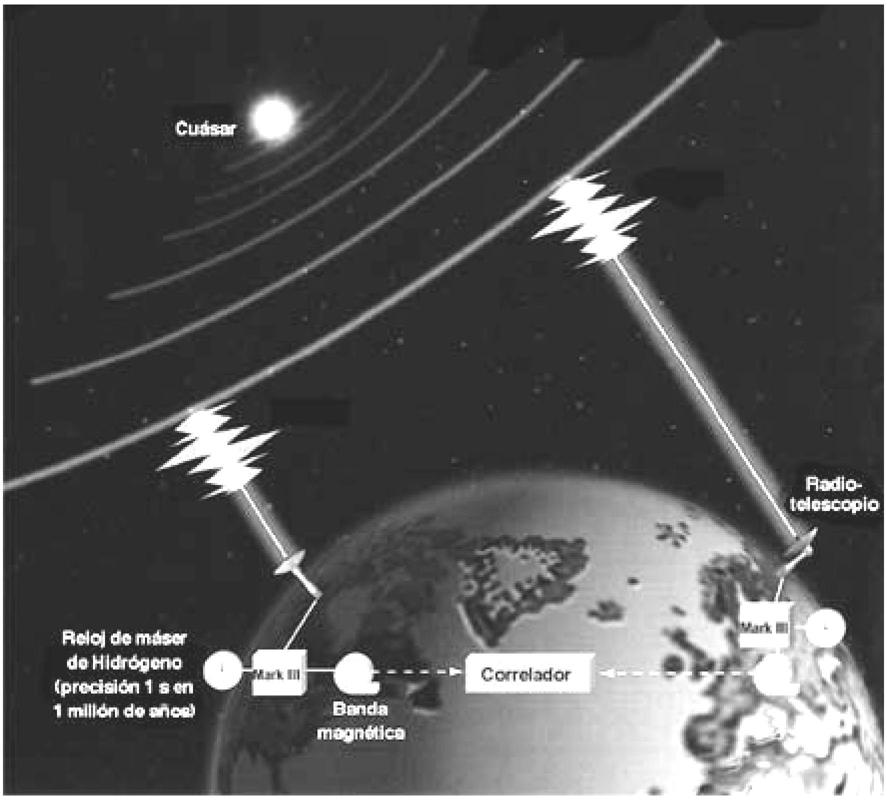

Fig. 2.15. Interferometría de muy larga base (IMLB-VLBI) Fuente: IGN

En el caso concreto de España el Instituto Geográfico Nacional (www.ign.es), organismo encargado de la Geodesia, creó el proyecto REGENTE (*REd GEodésica Nacional por Técnicas Espaciales*) que tiene como objetivo cubrir todo el territorio español con una red geodésica tridimensional de alta precisión, consistente en unas *1.200* estaciones. Estas estaciones se eligen de forma que en cada hoja del Mapa Topográfico Nacional *1/50.000* exista una, al menos, coincidente con un vértice de la red geodésica convencional o con un clavo de una línea de nivelación de alta precisión. La práctica totalidad de los trabajos topográficos se apoyan en estos vértices geodésicos empleando estaciones totales y mediciones GPS. La necesidad de incluirlos finalmente en un sistema de información geográfica (SIG) o en la cartografía existente, obliga a realizar las correcciones geodésicas, es decir, los cálculos en el sistema de referencia geodésico oficial.

3. NOCIONES DE CARTOGRAFIA

3.1.- INTRODUCCIÓN. PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS

La Cartografía es la ciencia que proporciona los criterios y los métodos para representar la superficie terrestre en un mapa. El elipsoide, lo mismo que el geoide y la esfera, no es una forma geométrica desarrollable, por lo que se hace necesario aplicar una transformación para pasar de las coordenadas geográficas a un sistema de coordenadas cartesianas o polares representable sobre una superficie plana.

Hay distintas formas de aplicar la transformación, lo que da lugar a distintos sistemas cartográficos. En algunos de estos sistemas se aplica una verdadera proyección, pero en otros se aplican métodos analíticos no proyectivos; no obstante, se denomina por extensión *proyecciones cartográficas* a todos los sistemas, sean o no proyectivos.

3.2.- DEFORMACIONES. ESCALA LOCAL

En cualquiera de los sistemas de proyección la representación plana de la superficie de la Tierra sufrirá determinadas deformaciones, o *anamorfosis*, con relación al terreno original. Las anamorfosis son de distintos tipos. Cada uno de los sistemas de proyección tiende a eliminar o reducir alguna o algunas de ellas, pero ninguno las elimina todas. Por ello, dependiendo de la finalidad del trabajo, se elegirá un sistema de proyección u otro en cada caso.

Las deformaciones pueden ser:

- **Deformaciones lineales**.- La longitud *l* de una línea en el terreno se transforma en otra longitud *l'* en la proyección. Se llama *módulo de deformación lineal* o *anamorfosis lineal* a la relación:

$$K = \frac{l'}{l}$$

Una línea que no sufre deformación lineal, es decir para la cual *K=1*, se llama *automecoica*. Las proyecciones que conservan las distancias se denominan equidistantes.

- **Deformaciones superficiales**.- Del mismo modo, se llama *módulo de deformación superficial*, o *anamorfosis superficial* a la relación entre un área *s* en el terreno y su proyección *s'*:

$$S = \frac{s'}{s}$$

Las proyecciones que conservan las áreas, aunque las figuras en el terreno y en la proyección dejen de ser semejantes, se denominan *equivalentes* o *autálicas*.

- **Deformaciones angulares**.- Se llama *deformación angular* o *anamorfosis angular* a la diferencia $\alpha'-\alpha$ entre el ángulo formado por dos líneas en el terreno y su equivalente en la proyección.

Se denomina *proyección conforme* a aquella en la que se conservan los ángulos.

- **Escala local**.- Sólo se puede hablar con propiedad de la escala de un mapa (*1:M*) en las líneas automecoicas, ya que todas las demás sufren deformación. En cualquier otra zona del mapa la escala varía, transformándose en:

$$E = \frac{1}{M} \; K = \frac{K}{M}$$

siendo *K* el módulo de deformación lineal, supuesto igual en todas las direcciones en la zona en cuestión. Esta relación se llama *escala local*.

Se denomina proyección *afiláctica* a la que, no siendo conforme ni equivalente, tiende a minimizar las deformaciones.

3.3.- TIPOS DE PROYECCIÓN

Según el sistema de transformación empleado, tenemos:

- **Sistemas convencionales**.- En ellos no se emplea una verdadera proyección geométrica. Ejemplo: el sistema poliédrico o policéntrico, empleado en el Mapa Nacional a escala *1:50.000*.

- **Sistemas perspectivos**.- Se emplea una proyección sobre un plano, a partir de un único centro de proyección. Ejemplo: proyecciones acimutales.

- **Sistemas por desarrollo**.- Se considera una superficie desarrollable, un cono o un cilindro, tangente o secante al elipsoide. Sobre ella se proyectan los puntos, generalmente con foco en el centro de la Tierra; finalmente, la superficie se desarrolla sobre un plano. Ejemplos: proyección Lambert, y proyección UTM.

3.4.- PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS MÁS USADAS

3.4.1.- Proyección policéntrica

Este sistema de proyección es el que se empleó para la realización del *Mapa Topográfico Nacional*, a escala *1:50.000*.

Se supone la superficie de España dividida en trapecios curvilíneos, de *20'* de paralelo de longitud por *10'* de meridiano de latitud. La proyección se hace sobre planos tangentes al elipsoide en el centro de cada trapecio, resultando así una superficie *poliédrica* circunscrita al elipsoide. Cada uno de los trapecios corresponde a una hoja del Mapa Nacional.

Cada punto viene dado por sus coordenadas cartesianas, tomando como ejes el paralelo y el meridiano que pasan por el centro de la hoja.

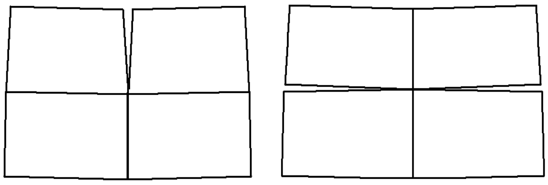

Fig. 3.1. Proyección policéntrica: desgarraduras

El sistema policéntrico no es desarrollable, ya que al extender en un plano la superficie poliédrica se producirán desgarraduras (figura 3.1). No obstante, tiene la ventaja de que, dentro de ciertos límites, es prácticamente automecoico.

3.4.2.- <u>Proyecciones acimutales o planas</u>

Se obtienen proyectando la superficie terrestre sobre un plano tangente al elipsoide en un punto *A*. Se denominan acimutales porque conservan el acimut desde el punto de tangencia (figura 3.2).

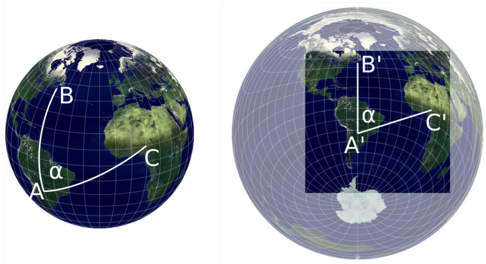

Fig. 3.2. Proyección conforme

- Según la situación de este punto se puede establecer la subdivisión siguiente:
  - *Ecuatorial o polar*: el punto *A* coincide con alguno de los polos
  - *Transversa o meridiana*: *A* está situado sobre el ecuador
  - *Horizontal, oblicua o cenital*: *A* se encuentra en cualquier otra posición.

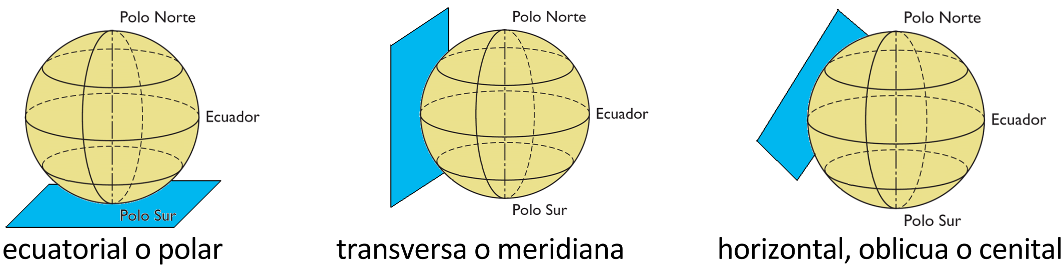

Fig. 3.3. Proyecciones acimutales

- Dentro de este tipo de proyecciones destacan los sistemas perspectivos, que son aquellos en los cuales la proyección se realiza desde un centro de perspectiva *V*, situado en la recta perpendicular al plano y que pasa por el centro de la Tierra. Se subdividen en:
  - *Ortográfica:* si *V* se encuentra en el infinito
  - *Gnomónica:* si *V* coincide con el centro de la Tierra
  - *Estereográfica:* si *V* es el punto diametralmente opuesto a *A*
  - *Escenográfica:* cuando *V* se halla a una distancia distinta de las anteriores.

En este tipo de proyecciones no se puede representar la superficie terrestre completa, quedando restringidas a proyectar la superficie marcada en la figura 3.4.

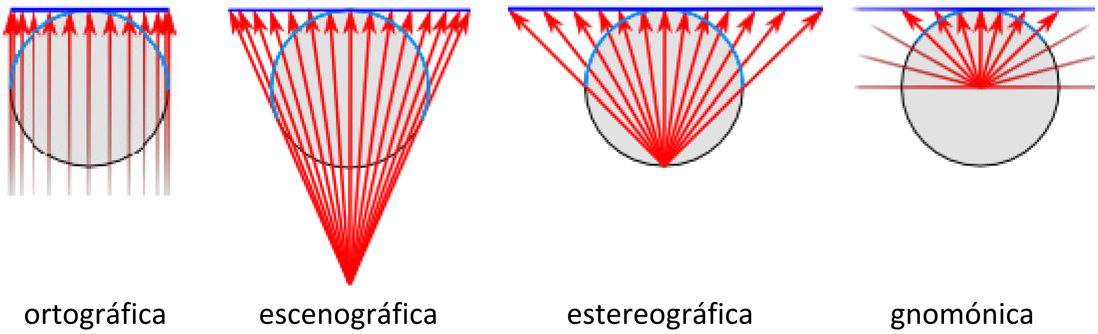

Fig. 3.4. Sistemas perspectivos

3.4.3.- Proyección Lambert

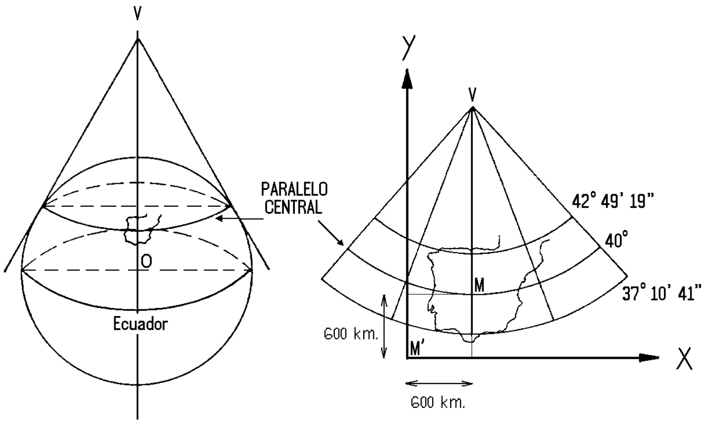

Fig. 3.5. Proyección Lambert

Es una proyección desde el centro terrestre *O* sobre una superficie cónica tangente al elipsoide a lo largo del paralelo central de la zona de interés. El origen de coordenadas viene dado por la intersección de dicho paralelo y el meridiano de origen, o meridiano central de la zona *M*. El eje de las *YY* es el meridiano de origen y el de las *XX* la tangente al paralelo por el origen de coordenadas.

En la práctica, para reducir las deformaciones, la proyección se realiza sobre un cono secante al elipsoide, no sobre uno tangente. En el caso de la proyección Lambert empleada en España, el cono corta al elipsoide según dos paralelos, de latitudes $42^{o}49'19''$ y $37^{o}10'41''$, siendo el paralelo central de la proyección el de latitud 40^{o}. Es una proyección conforme, es decir, conserva los ángulos.

Para evitar la aparición de coordenadas negativas, se asigna al origen *M* los valores $X_0 = 600.000m$; $Y_0 = 600.000m$ obteniendo como origen de coordenadas el punto *M'* de la figura 3.5.

3.4.4.- Proyección UTM

UTM son las siglas de *Universal Transversa Mercator*. Se trata de proyectar la superficie terrestre sobre un cilindro tangente al elipsoide. Se denomina transversa porque la tangencia se hace sobre un meridiano, que es la única línea automecoica en esta proyección. Es una proyección muy usada en la actualidad por ser universal, es decir, utilizable a nivel mundial tan solo eligiendo adecuadamente el meridiano de tangencia. Se trata de una proyección conforme.

La proyección de los distintos puntos del elipsoide sobre el cilindro se hace según una determinada ley analítica, por lo que no se trata de una proyección desde el punto de vista geométrico. El sistema de coordenadas cartesianas está formado por la proyección del Ecuador, que es una línea horizontal y se toma como eje de las *XX*, y la proyección del meridiano de tangencia, que es una línea vertical y se toma como eje de las *YY*. Existen tablas y fórmulas, en las que no vamos a entrar, que permiten realizar la transformación de coordenadas geográficas a UTM y viceversa.

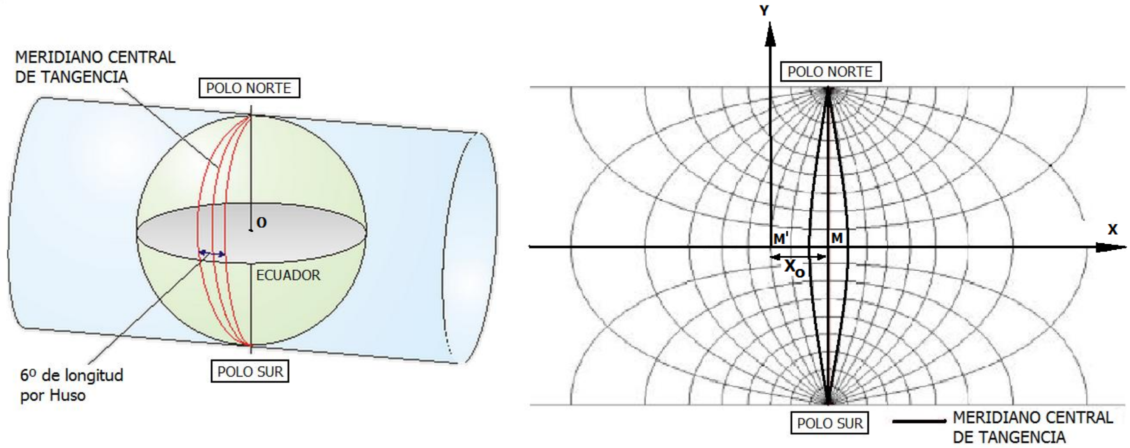

Fig. 3.6. Proyección UTM

Para evitar la aparición de coordenadas negativas, se asigna al origen *M* de coordenadas de cada huso el valor X_0 = *500.000m,* obteniéndose un nuevo origen *M'* (figura 3.6). Por la misma razón, las coordenadas *Y* correspondientes al hemisferio sur se obtienen de la expresión $10\ 10^6 - y$, siendo *y* la coordenada referida al Ecuador.

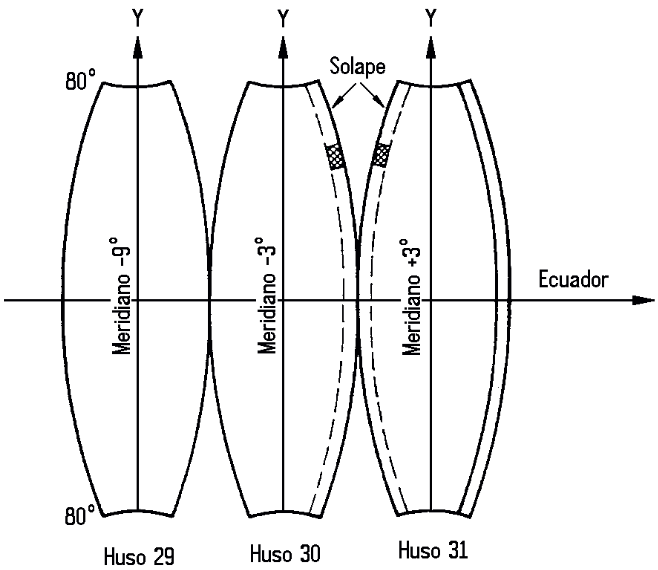

Fig. 3.7. Los tres husos que contienen la Península Ibérica

Las deformaciones lineales aumentan con el cuadrado de la distancia al meridiano de tangencia. Para mantenerlas en niveles aceptables se divide la Tierra en *60 husos*, de 6^o de amplitud cada uno, contando a partir del antimeridiano de Greenwich, y en cada huso se aplica la proyección cilíndrica con relación al meridiano que pasa por su centro.

Existen, por tanto, dos ejes de simetría: el ecuador y el meridiano de tangencia rectificado. Todos los husos son idénticos desde el punto de vista geométrico, lo que permite usar las mismas expresiones y tablas para realizar cálculos en cualquiera de ellos. La proyección UTM se limita a la zona comprendida entre los paralelos $+80^o$ y -80^o, completándose, en las zonas polares, por sendas proyecciones estereográficas polares.

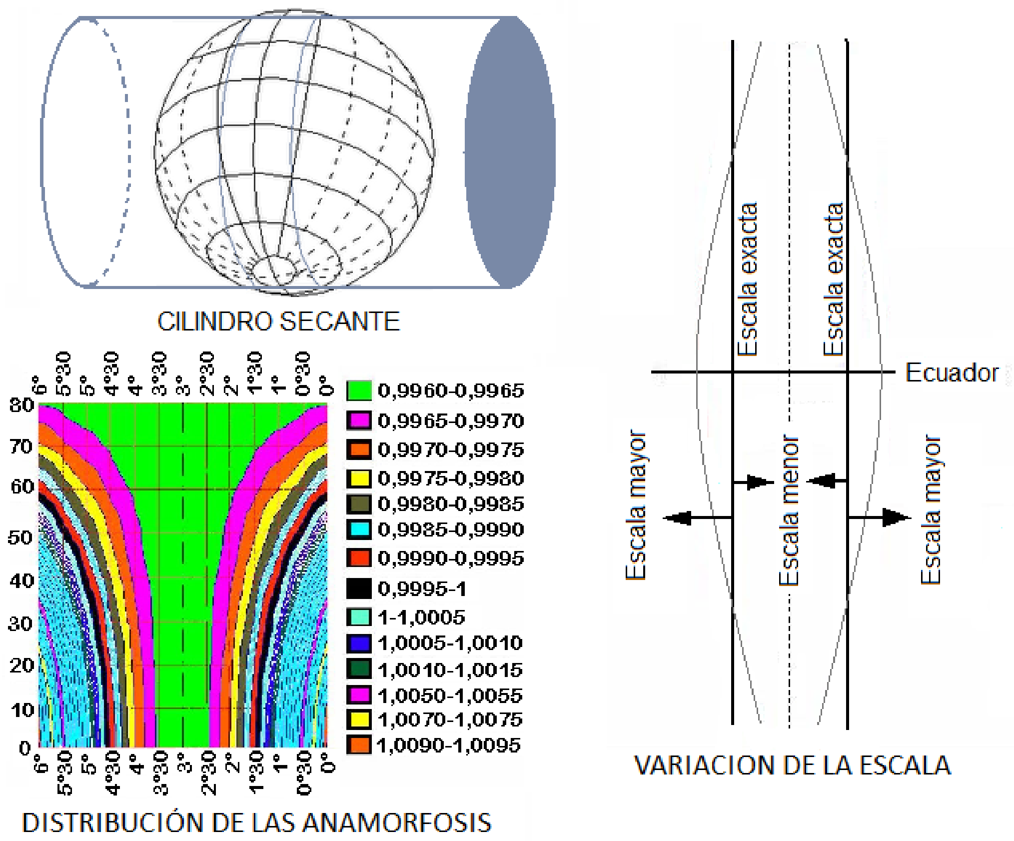

Fig. 3.8. Sustitución del cilindro tangente por uno secante

También se aplica, para reducir las deformaciones lineales, un factor de escala K_0 = *0,9996*, lo que equivale a sustituir el cilindro tangente por uno secante. Aparecen así dos nuevas líneas automecoicas en cada huso, simétricas respecto al meridiano central.

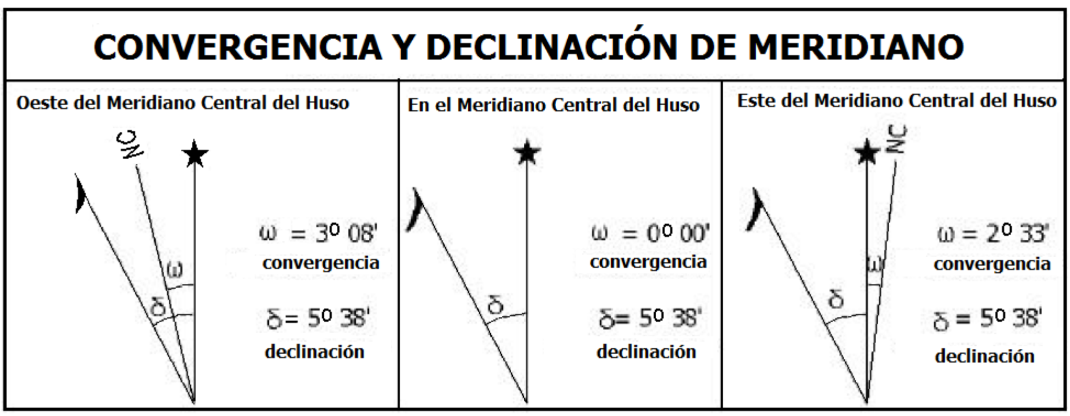

Fig. 3.9. Convergencia de meridiano y declinación magnética

Se denomina *convergencia de cuadrícula* (ω) en un punto dado de la proyección UTM al ángulo que se forma entre la dirección que señala al norte geográfico (dirección de la meridiana) y la dirección del eje de las *YY*, denominado *Norte de cuadrícula* (NC). Obsérvese que sólo para los puntos del meridiano central este valor es nulo (figura 3.9). En las hojas del mapa *1:50.000* del Instituto Geográfico Nacional se designa la convergencia de cuadricula para el punto central del mapa, ya que se considera prácticamente igual para toda la hoja. De la misma forma se denomina *declinación* (δ) al ángulo que se forma entre el Norte Geográfico y el Norte Magnético. El origen de ambos ángulos es el Norte Geográfico, por lo que hay que indicar el sentido: Este (oriental) u oeste (occidental)

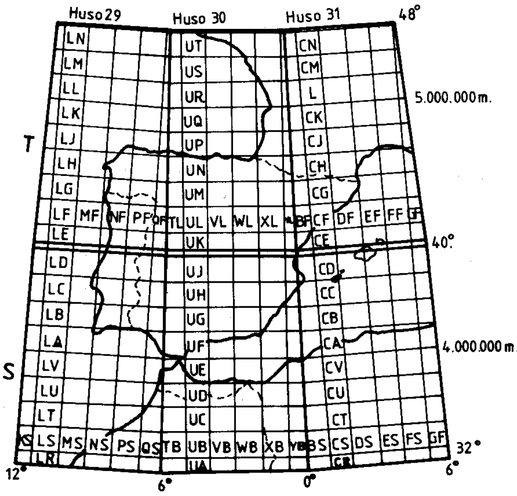

Fig. 3.10. Denominación de las zonas en UTM

Por otra parte, la existencia de *60* husos complica de manera considerable el empleo de este sistema proyectivo, al hacerse necesario el empleo de fórmulas complejas para realizar cálculos entre puntos situados en distintos husos. La Península Ibérica, por ejemplo, se encuentra comprendida entre tres husos consecutivos, 29, 30 y 31 (figura 3.7). Para paliar, en parte, estos inconvenientes, existen unas zonas de solape entre husos, de unos *85K*m de anchura, en las que los vértices geodésicos están calculados en los dos sistemas de coordenadas.

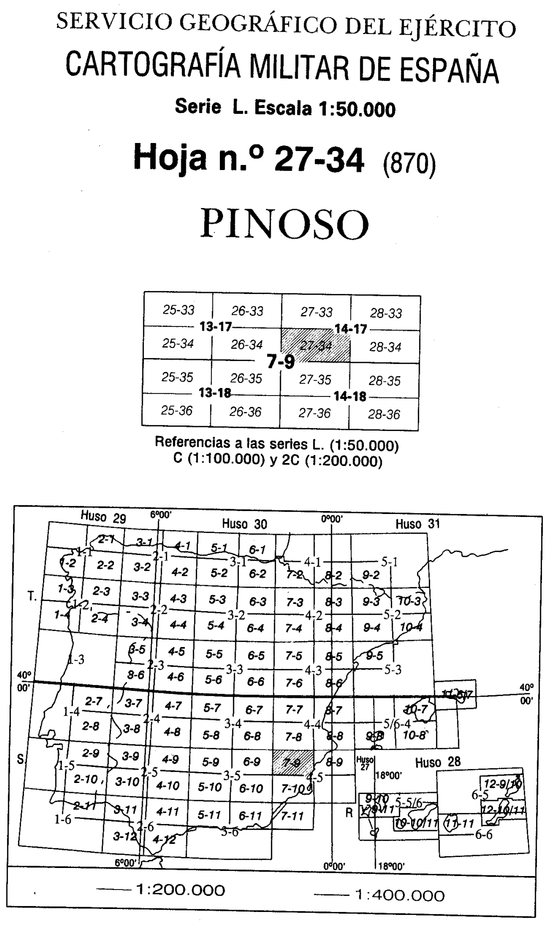

Fig. 3.11. División en hojas del Mapa Topográfico Nacional

En cada huso, limitado por los paralelos *+80º* y *-80º*, se consideran los paralelos múltiplo de *8º*, que lo dividen en 20 bandas o *zonas* de *6º* de longitud por *8º* de latitud. Las zonas se denominan por letras mayúsculas, empezando por el sur y sin utilizar las letras *A*, *B*, *CH*, *I*, *LL*, *Ñ*, *O*, *Y* y *Z*. Cada zona de la tierra se denomina por el número de huso seguido de la letra. Así, a la zona noroeste de nuestro país corresponde la denominación *29T* (figura 3.10). La cuadrícula UTM se completa dividiendo cada huso en cuadrados de *100Km* de lado, que se denominan con dos letras mayúsculas. La primera letra indica la columna, a partir del meridiano *180º* y de oeste a este. La segunda indica la fila, de sur a norte. En ambos casos se excluyen las letras *CH*, *I*, *LL*, *Ñ* y *O*. La denominación completa del punto en UTM indicará, además de las coordenadas, la designación de zona y la designación de cuadrado. En la figura 3.11 se muestra la división en hojas para el Mapa Topográfico Nacional, escala *1:50.000*, con el ejemplo de la hoja 27-34.

4. TEORIA DE ERRORES. CONCEPTOS BASICOS

4.1.- INTRODUCCIÓN

Al efectuar cualquier trabajo topográfico se cometerán *errores*, es decir, cada medida efectuada diferirá de la magnitud real en una cierta cantidad. Los errores que vamos a estudiar se deben a dos causas: limitaciones de la vista humana y limitaciones de los aparatos topográficos empleados.

El estudio de las leyes que rigen la aparición de los errores y su transmisión a través de una serie de operaciones escalonadas es muy importante en Topografía, ya que nos va a permitir determinar:

- el error total que podemos esperar de un determinado trabajo
- la tolerancia con que podemos trabajar
- los equipos y métodos que es preciso emplear para que los errores se mantengan en niveles admisibles.

4.1.1.- Errores y equivocaciones

Aunque ambas palabras se emplean a menudo con el mismo sentido, se refieren a conceptos muy diferentes. La palabra *equivocación* (*error grosero* o *falta*) se refiere a una discrepancia, entre la magnitud real y la medida, motivada por descuido o impericia del observador. Ejemplo: cambiar las cifras correspondientes a los metros y a los decímetros al anotar una lectura de mira. Las equivocaciones suelen ser de magnitud mayor que los errores y pueden y deben evitarse siempre, realizando las operaciones de medida con el cuidado necesario. Las equivocaciones no son objeto de este estudio.

Los errores se deben, como se ha visto, a limitaciones de la vista humana y/o de los aparatos topográficos empleados. Nunca pueden anularse por completo, aunque se debe tender a reducirlos al máximo.

4.1.2.- Errores sistemáticos y accidentales

Los *errores sistemáticos* se producen siempre en el mismo sentido y según una ley determinada. Ejemplo: una cinta métrica marcada como de *20m* de longitud, pero que en realidad mide *20,1m*. Los errores sistemáticos están motivados por una causa permanente, generalmente una imperfección del aparato y, al menos en teoría, pueden anularse con el adecuado contraste y ajuste del mismo, eliminando la causa que los produce. Por otra parte, existen métodos operativos que garantizan la eliminación de buena parte de los posibles errores de este tipo. Por eso, tampoco los errores sistemáticos van a ser objeto de este estudio.

Los *errores accidentales* adoptan valores al azar y no se pueden eliminar como los sistemáticos. Cuando el número de medidas efectuadas es suficientemente grande, se observa que estas tienden a distribuirse por igual a ambos lados del valor real, por lo que la suma de errores accidentales tiende a cero. Se observa también que los errores accidentales de pequeña magnitud son más frecuentes que los grandes.

En operaciones escalonadas realizadas con un mismo aparato topográfico los errores sistemáticos se acumulan, mientras que los accidentales tienden a compensarse parcialmente.

4.1.3.- Errores verdaderos y aparentes

El *error verdadero* es la diferencia entre la magnitud real que vamos a medir y el valor que hemos obtenido al efectuar la medición. Esta magnitud real nunca será conocida y por tanto, tampoco lo será el error verdadero. Como magnitud definitiva tomaremos una determinada (por ejemplo, la obtenida por promedio de varias medidas) y a ésta tendremos que referir los errores, que serán, por tanto, *errores aparentes*.

4.1.4.- Errores absolutos y relativos

Error absoluto es la diferencia entre el valor real (o el que admitimos como real) de una magnitud y el valor obtenido de la medida.

Error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor real (o el que admitimos como real) de la magnitud. Generalmente se expresa en tanto por ciento.

Los *errores verdaderos* nunca serán conocidos, siempre trabajaremos con los errores absolutos y relativos *aparentes*.

4.2.- EXACTITUD Y PRECISIÓN

La *exactitud* se refiere al grado de proximidad entre el valor real de la magnitud que se mide y los resultados obtenidos en las mediciones. En términos estadísticos está relacionada con el posible *sesgo* de la estimación del valor medido, de forma que a menor sesgo se tendría mayor exactitud.

La *precisión* se refiere al grado de proximidad de los resultados de las mediciones entre sí. Puede estimarse mediante la *desviación estándar* de las mediciones.

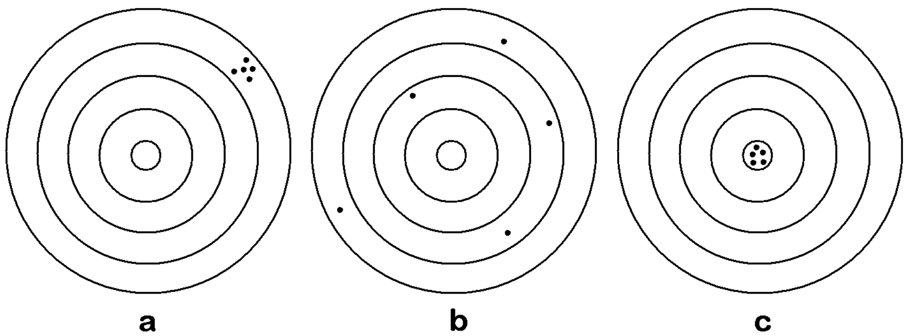

Fig. 4.1. Exactitud y precisión

La diferencia entre estos dos conceptos suele explicarse con el ejemplo de las dianas (figura 4.1). En el primer caso (*a)* los cinco impactos están muy próximos entre sí, pero todos ellos se alejan del centro de la diana. En este caso, el resultado sería preciso pero no exacto. La causa de esta falta de exactitud sería, probablemente, un desajuste en la mira del arma empleada. En el segundo caso (*b*) se observan impactos muy alejados del centro de la diana, por lo que el resultado sería poco preciso. En el tercer caso (*c*) los impactos están muy próximos entre sí y, además, se aproximan al centro de la diana por lo que el resultado se puede considerar preciso y exacto.

En Topografía, la falta de exactitud se da cuando se trabaja con un instrumento descorregido, lo que puede introducir en las mediciones un error sistemático que hace que éstas se separen del valor real de la medición. La precisión se refiere a los errores accidentales, inevitables en toda medición y cuya cuantía dependerá de las características del equipo empleado y de las limitaciones de nuestros sentidos.

4.3.- DISTRIBUCIÓN DE LOS ERRORES

4.3.1.- Valor más probable

El valor real de la magnitud será siempre desconocido, por lo que nuestras medidas deberán compararse con otro valor. Hemos dicho que los errores accidentales tienden a distribuirse de forma simétrica en torno al valor verdadero. Se toma entonces como *valor más probable* de la magnitud la media aritmética de las medidas efectuadas, siempre que éstas se hayan hecho en igualdad de condiciones:

$$V = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n}$$

En efecto, si aumentamos indefinidamente el número de medidas y suponiendo que éstas están exentas de errores sistemáticos, la suma de los errores tenderá a cero. El valor más probable será aquel para el cual la suma de los errores aparentes tienda a anularse, es decir:

$$\Sigma \xi_i = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = 0$$

Si tomamos V como valor de la magnitud desconocida, será: $\xi_i = V - m_i$, de donde:

$$\Sigma \xi_i = (V - m_1) + (V - m_2) + \ldots + (V - m_n) = n V - (m_1 + m_2 + \ldots + m_n) = 0$$

$$V = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n}$$

Por tanto, el valor que anularía la suma de errores cuando el número de mediciones tiende a infinito es precisamente la media aritmética de las medidas. Es evidente que las medidas m_i deben estar exentas de errores sistemáticos, si queremos evitar que V se vea afectado por errores de este tipo.

Por otra parte, para que la suma de los errores tienda a anularse, según la teoría de máximos y mínimos, se debe verificar:

$$(V - m_1)^2 + (V - m_2)^2 + \ldots + (V - m_n)^2 = mínimo$$

Podemos entonces definir también el *valor más probable* como aquel para el cual la suma de los cuadrados de los errores es mínima.

4.3.2.- Error probable; error medio aritmético y cuadrático

En Topografía interesa determinar valores característicos del error, que nos puedan dar una idea de la precisión de los aparatos y métodos empleados. Normalmente se emplean los siguientes errores medios:

- **Error probable**.- Si ponemos en forma ordenada todos los errores, prescindiendo de su signo (es decir, en valor absoluto) el que está situado en el centro de la serie se llama *error probable*.

- **Error medio aritmético**.- Es la media aritmética de los errores verdaderos, prescindiendo de sus signos:

$$\xi_A = \frac{|\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n|}{n} = \frac{\Sigma\,|\xi_i|}{n}$$

  Si utilizamos los errores aparentes en lugar de los verdaderos (desconocidos) la expresión sería:

$$\xi'_A = \frac{\Sigma\,|\xi'_i|}{n - 0{,}5}$$

  según demuestra el cálculo de probabilidades.

- **Error medio cuadrático**.- Se define por la siguiente expresión:

$$\xi_C = \sqrt{\frac{\Sigma\,\xi_i^2}{n}}$$

  En función de los errores aparentes, sería:

$$\xi_C = \sqrt{\frac{\Sigma\,\xi_i^2}{n - 1}}$$

Trabajando con errores cuadráticos la precisión viene mejor determinada, ya que los errores más grandes adquieren mayor relevancia. Por tanto, es el error medio cuadrático el que se suele emplear para caracterizar los errores cometidos en un determinado trabajo topográfico. Los tres tipos de error están relacionados por las siguientes expresiones aproximadas:

$$\xi_A \approx \xi_P \frac{5}{4} \qquad \xi_C \approx \xi_P \frac{3}{2}$$

4.3.3.- Distribución de los errores; curva de Gauss

Los errores aparentes accidentales hallados al medir una magnitud muchas veces, se distribuyen según una curva semejante a la conocida *curva de Gauss* (o campana de Gauss). La curva de distribución de errores se construye llevando en abscisas la magnitud del error y en ordenadas el número de veces que se ha cometido ese error.

El centro de la curva corresponderá al valor cero y se demuestra que los puntos de inflexión corresponden al *error medio cuadrático* (figura 4.2). Se observa que los errores más pequeños (más próximos a cero) son más frecuentes que los grandes.

Sin embargo, hay ciertas diferencias entre la curva de Gauss y la curva según la cual se distribuyen los errores correspondientes a una serie de medidas efectuadas en la práctica. La campana de Gauss es una curva continua, *asintótica* al eje de las *X* en ambos extremos. En el caso de los errores nos encontramos con una *variable discreta*, ya que si el límite de apreciación del aparato de medida es, por ejemplo, *0,01*, podremos tener valores como *103,11* ó *103,12*, pero no los intermedios. Por otra parte, esta curva no será *asintótica*, sino que cortará al eje *X*, lo que nos marca un *error máximo* (por exceso y por defecto) del que no debemos pasar.

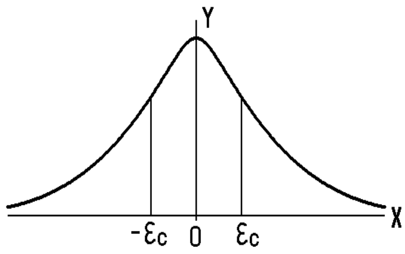

Fig. 4.2. Distribución normal

4.3.4.- Concepto de tolerancia

La *tolerancia*, o *error máximo admisible*, es de gran importancia en Teoría de Errores. Normalmente se toma como tolerancia un valor igual a *2,5* veces el error medio cuadrático. Esto correspondería, en la curva de Gauss, a una probabilidad de que se supere ese valor del orden del *1%*.

Calculado el error medio cuadrático de una serie de medidas y tomando como tolerancia *2,5* veces ese error, debemos desechar aquellas medidas cuyo error exceda a esa tolerancia, considerándolas como equivocaciones. Este concepto de tolerancia es complementario del que se emplea en Topografía y que veremos más adelante.

4.4.- TRANSMISIÓN DE ERRORES

Se estudia a continuación la forma en que se transmiten y acumulan los errores accidentales en operaciones de medida escalonadas.

4.4.1.- En una suma

Sea una operación de medida consistente en la suma o resta de los resultados de una serie de *n* mediciones. Supongamos que repetimos *m* veces la serie de mediciones. El error e_1, e_2 ... e_n total de la suma en cada serie será la suma de los errores individuales, a_1, b_1, c_1 ... a_m, b_m, c_m ... de cada medición en esa serie, es decir:

$$e_1 = a_1 + b_1 + c_1 + ... + n_1$$
$$e_2 = a_2 + b_2 + c_2 + ... + n_2$$
$$.............$$
$$e_m = a_m + b_m + c_m + ... + n_m$$

Elevando al cuadrado:

$$e_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + ... + 2\,a_1 b_1 + 2\,a_1 c_1 + ...$$
$$e_2^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + ... + 2\,a_2 b_2 + 2\,a_2 c_2 + ...$$
$$..............$$
$$e_m^2 = a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + ... + 2\,a_m b_m + 2\,a_m c_m + ...$$

Sumando miembro a miembro:

$$\Sigma\, e_i^2 = \Sigma\, a_i^2 + \Sigma\, b_i^2 + \Sigma\, c_i^2 + ... + \Sigma Productos \;\; binarios$$

Cuando el número de medidas es suficientemente grande, los errores accidentales se distribuyen de forma simétrica en torno al valor cero y por tanto, la suma de *productos binarios* tiende a anularse. Dividiendo por *m* y hallando la raíz cuadrada, queda:

$$\sqrt{\frac{\Sigma\, e_i^2}{m}} = E_c = \sqrt{\frac{\Sigma a_i^2}{m} + \frac{\Sigma b_i^2}{m} + \frac{\Sigma c_i^2}{m} ... + \frac{\Sigma n_i^2}{m}} = \sqrt{a_c^2 + b_c^2 + c_c^2 + ... + n_c^2}$$

siendo E_c el error cuadrático de la operación total y a_c, b_c ... los errores cuadráticos de cada una de las mediciones. Si todas las mediciones son de la misma precisión, podemos hacer $a_c = b_c = c_c = ... = e_c$, quedando:

$$E_c = e_c \sqrt{n}$$

Por otra parte, cuando en una medición intervengan varias causas de error, por un razonamiento similar, tendríamos:

$$E_c = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + ...}$$

siendo E_c el error medio cuadrático total y e_1, e_2 ... los errores medios cuadráticos generados por cada causa.

Como los errores cuadrático, medio y probable están relacionados por las expresiones que se vieron en 4.3.2, cualquiera de estos errores se puede sustituir por su expresión aproximada en función de los otros.

4.4.2.- En una media aritmética

La media aritmética M_a de varias medidas m_i será:

$$M_a = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{n}$$

Si las medidas m_i vienen afectadas de errores e_i, la media vendrá afectada de un error E:

$$M_a \pm E = \frac{m_1 \pm e_1}{n} + \frac{m_2 \pm e_2}{n} + ... + \frac{m_n \pm e_n}{n} = M_a + \frac{\pm e_1 \pm e_2 \pm ... \pm e_n}{n}$$

Como se ha visto en el caso de la suma, el error cuadrático valdrá:

$$E_c = \frac{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + ... + e_n^2}}{n}$$

Para medidas de igual precisión, será:

$$E_c = \frac{e\sqrt{n}}{n} = \frac{e}{\sqrt{n}}$$

Según esta expresión, aumentando indefinidamente el número de medidas, podemos acercarnos al valor real cuanto queramos, incluso con aparatos de medida poco precisos.

4.4.3.- <u>En una media ponderada</u>

Si las medidas no son de igual precisión es preciso introducir unos factores para penalizar las medidas menos precisas; obtendremos así una *media ponderada*:

$$M_p = \frac{f_1\ m_1 + f_2\ m_2 + ... + f_n\ m_n}{\Sigma f_i}$$

siendo f_i los factores.

Podemos suponer que cada una de estas medidas está compuesta a su vez de f_i medidas que sí son de igual precisión. Si e_c es el error medio cuadrático de estas observaciones ficticias de igual precisión, tendremos:

$$e_c 1 = \frac{e_c}{\sqrt{f_1}}$$

$$.......$$

$$e_{cn} = \frac{e_c}{\sqrt{f_n}}$$

siendo e_{c1} ... e_{cn} los errores medios cuadráticos de cada una de las medidas. De aquí:

$$M = \frac{\frac{m_1}{e_1^2} + \frac{m_2}{e_2^2} + ... + \frac{m_n}{e_n^2}}{\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} + ... + \frac{1}{e_n^2}}$$

4.5.- <u>CONCEPTO DE ERROR DE CIERRE. COMPENSACIÓN</u>

Ya hemos dicho que el valor real de la magnitud que estamos midiendo nunca será conocido y, por tanto, tampoco lo serán los errores verdaderos cometidos. Sin embargo, sí es posible, y así se hace en algunos métodos topográficos, forzar el cumplimiento de determinadas condiciones geométricas, lo que nos permitirá determinar el error final cometido, o *error de cierre*.

Si medimos los tres ángulos α, β y γ de un triángulo materializado en el terreno, podremos determinar el error de cierre comparando la suma $\alpha+\beta+\gamma$ con 180^o (o 200^g) que, como sabemos es la cantidad que deben sumar los tres ángulos de cualquier triángulo:

$$e = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^o$$

Si la suma $\alpha+\beta+\gamma$ es mayor que 180^o se trata de un error de cierre por *exceso* y si es menor, de un error de cierre *por defecto*.

En general no basta con determinar el error de cierre, sino que es preciso eliminarlo, repartiéndolo de forma adecuada entre las medidas efectuadas, lo que se denomina *compensar el error*. En el caso del ejemplo anterior, si se trata de medidas de igual precisión, los valores *compensados* de los ángulos α, β y γ serán:

$$\alpha_c = \alpha - \frac{e}{3} \qquad \beta_c = \beta - \frac{e}{3} \qquad \gamma_c = \gamma - \frac{e}{3}$$

Una vez compensado el error de cierre ya se cumple la condición:

$$\alpha_c + \beta_c + \gamma_c = 180^o$$