Profesor: **Roque Molina Legaz**

Tema 1.4: SERIES COMPLEJAS

PROGRAMA DETALLADO:

Introducción:
Sucesiones y series numéricas en $\mathbb{C}$.
Sucesiones y series de funciones complejas.
Series de potencias complejas.
Series de Taylor.
Series de Laurent.
Ceros de las funciones analíticas.
La transformada $\mathcal{Z}$.
Propiedades básicas.
La transformada $\mathcal{Z}$ inversa.
Aplicación a la resolución de ecuaciones en diferencias.
Ejercicios resueltos.
Ejercicios propuestos.

Introducción.

El objetivo fundamental de este tema es el estudio de las series de funciones complejas, especialmente de las series de potencias y de las series de Laurent, estableciendo sus afinidades y diferencias con las correspondientes series de funciones reales.

Todos los conceptos y propiedades de las sucesiones de números reales, estudiados en Matemáticas I, son aplicables a $\mathbb{C}$, considerando en este cuerpo la distancia euclídea. Además, la relación natural existente entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ reducirá el estudio de las sucesiones y series de números complejos al de pares de sucesiones y series de números reales: por ejemplo, la sucesión $(z_n) = (x_n + iy_n)$ o la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ serán convergentes si y sólo si respectivamente lo son las sucesiones (x_n), (y_n) o las series $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, que son, respectivamente, sucesiones o series de números reales. Por todo esto, podremos desarrollar el primer punto de este tema de una forma rápida, estableciendo brevemente tanto las definiciones como las primeras propiedades de las sucesiones y series numéricas en el campo complejo.

De igual manera podremos actuar con las sucesiones y series de funciones complejas, puesto que su teoría se desarrollará de forma similar a la que se realizada para el caso de funciones reales. Los distintos tipos de convergencia (*convergencia puntual, uniforme* y *absoluta*) y los criterios que se aplican en su estudio se trasladan del campo real al complejo sin dificultad alguna.

Sucesiones y series numéricas en $\mathbb{C}$.

Definition *Se dice que la sucesión de números complejos (z_n) **tiene por límite** el complejo z, y se representa por $\lim z_n = z$, si $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.*

Es inmediato ver que el límite, si existe, es único. De forma análoga a $\mathbb{R}$, se puede establecer la definición de límite infinito (aunque en $\mathbb{C}$ no tiene sentido definir $\pm\infty$). También es inmediato probar el siguiente resultado:

Proposition *Supongamos que $(z_n) = (x_n + iy_n)$ y que $z = x + iy$. Entonces,*

$$\lim z_n = zs \Leftrightarrow \lim x_n = x \qquad y \qquad \lim y_n = y$$

Definition *Una serie de números complejos* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *se dice* ***convergente*** *si la sucesión de sus sumas parciales* (S_n) *es convergente, siendo* $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$*. En este caso, se pone* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim S_n$*, y se dice que el valor de este límite es la* ***suma*** *de la serie.*

Utilizando la proposición anterior, se tiene:

Proposition *Supongamos que* $(z_n) = (x_n + iy_n)$ *y que* $S = x + iy$*. Entonces,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n = x \qquad y \qquad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = y$$

Definition *Si S es la suma de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$*, se llama* ***resto*** *n – simo* ***de la serie*** *a la diferencia*

$$\rho_n = S - S_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} z_i$$

y se verifica trivialmente que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \text{ es convergente} \Leftrightarrow \lim \rho_n = 0$$

Definition *Una serie compleja* $\sum z_n$ *se dice* ***absolutamente convergente*** *si es convergente la serie* $\sum |z_n|$*.*

También se verifica la conocida propiedad (establecida para series de términos reales) de que si una serie es absolutamente convergente, la misma es convergente.

Sucesiones y series de funciones complejas.

Definition *Una sucesión de funciones complejas* (f_n)*, con* $f_n : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, se dice que* ***converge puntualmente*** *en un punto* $z_0 \in S$*, si la sucesión numérica* $(f_n(z_0))$ *es convergente.*

Se llama ***campo de convergencia*** *de la sucesión de funciones al conjunto de puntos de S donde la sucesión converge puntualmente, es decir, al conjunto*

$$A = \left\{ z \in S;\ (f_n(z)) \text{ es convergente} \right\}$$

Definition *Se llama* ***límite puntual*** *de* (f_n) *a la función* $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definida por* $f(z) = \lim f_n(z)$ *para cada* $z \in A$*, es decir, si se verifica* $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$*,* $\varepsilon > 0$*, y* $\forall z \in A$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|f(z_n) - f(z)| < \varepsilon$ *si* $n > n_0$*.*

Cuando se verifica lo anterior, suele expresarse que $\lim f_n = f$ *ó* $f_n \to f$ *(punt.).*

El valor natural n_0 de esta definición dependerá tanto de ε como del punto $z \in A$. Si fuese independiente del punto en cuestión (es decir, si n_0 solo depende de ε), se dirá que la convergencia es uniforme:

Definition *Sea A el campo de convergencia de (f_n). Se dice que (f_n)* ***converge uniformemente*** *a f en $D \subset A$, y se expresa $f_n \to f$ unif. en A, si* $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, *existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 = n_0(\varepsilon)$, tal que* $|f(z_n) - f(z)| < \varepsilon \ \forall n > n_0$ *y* $\forall z \in A$.

Definition *Se dice que una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* ***converge puntualmente*** *en $A \subset \mathbb{C}$ (resp.* ***uniformemente*** *en $D \subset A \subset \mathbb{C}$) a una función $S(z)$, si lo hace la sucesión de sus sumas parciales $(S_n) = (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$. Asímismo, se dice que la serie* ***converge absolutamente*** *en z_0, si $\sum |f_n|$ es convergente en z_0.*

Un criterio útil para el estudio de la convergencia absoluta y uniforme de una serie de funciones es el llamado **criterio de la mayorante** o **criterio M de Weierstrass**:

Proposition *Sea $(f_n(z))$ una sucesión de funciones definidas en $D \subset \mathbb{C}$ y (M_n) una sucesión de números reales no negativos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente. Si para cada $z \in D$ es $|f_n(z)| < M_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, entonces la serie funcional $\sum f_n(z)$ es absoluta y uniformemente convergente en D.*

Series de potencias complejas.

Al igual que ocurre en el campo real, las series funcionales constituyen un método de representación de funciones muy útil para la resolución de numerosos problemas en el campo complejo. De todas las series funcionales, las de mayor aplicación son las series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde a_n son números complejos.

A una serie de esta forma se le llama **serie de potencias centrada en** z_0. Estas series convergen puntualmente al menos en el punto z_0, siendo su suma en dicho punto a_0 (ya que si sustituimos en la serie la variable z por z_0 se obtiene el valor a_0). Nuestra intención a partir de ahora es estudiar para qué valores de z, además de para z_0, la serie es convergente, es decir, la serie tiene una suma finita.

En lo sucesivo, y por comodidad, consideraremos solo series de potencias centradas en el origen, es decir series del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Y por lo anterior, sabemos que esta serie al menos siempre es convergente en el punto $z = 0$.

Remark *Notemos que una serie de potencias no es sino un polinomio complejo de grado "infinito".*

Los resultados para las series de potencias complejas son análogos a los establecidos para las series de potencias reales, y entre los mismos, hemos de destacar:

Proposition *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias compleja que converge para un determinado valor $z = z_0$. Entonces:*

a) Para cada r con $0 < r < |z_0|$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absoluta y uniformemente a una función $S(z)$ en una bola cerrada de centro z_0 y radio r.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ (a la que se conoce como ***serie derivada****) también* *converge absoluta y uniformemente en la misma bola cerrada de centro z_0 y radio r, y lo hace a la función $S'(z)$, es decir, se verifica $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ $\forall z$ con $|z| < |z_0|$.*

c) Sin embargo, si la serie inicial diverge para $z = z_1$ también lo hace $\forall z$ con $|z| > |z_1|$.

Definition *Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, se llama **radio de convergencia** de la misma al número real R definido por:*

** $R = 0$ si la serie sólo converge para $z = 0$.*

** $R = \infty$ si la serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$.*

** $R = \sup\left\{|z|;\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ es convergente}\right\}$ si la serie converge para unos valores de z y diverge para otros.*

Proposition *Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente $\forall z$ con $|z| < R$ y diverge $\forall z$ con $|z| > R$.*

Definition *A la bola abierta $B(0,R)$ se le llama **círculo** o **disco de convergencia** de la serie.*

Remark *A partir de los resultados anteriores, sabemos que una serie de potencias converge absoluta y uniformemente dentro de su círculo de convergencia, y diverge fuera de él. En los puntos z tales que $|z| = R$, la serie puede converger o diverger, según los casos.*

¿Cómo se puede calcular el radio de convergencia R?. El siguiente resultado nos da un par de formas de hacerlo:

Proposition *Dada una serie de potencias para la cual existe*

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q > 0$$

entonces se verifica que $R = \frac{1}{q}$ (entendiendo que si $q = 0$, entonces $R = \infty$, y que si $q = \infty$, entonces $R = 0$).

Asímismo, si existe

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = q > 0$$

entonces $R = \frac{1}{q}$.

Example *a) La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ tiene por radio de convergencia $R = 0$, por lo que la misma solo es convergente para $z = 0$ y divergente para cualquier otro valor de z.*

b) La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ tiene por radio de convergencia $R = \infty$, por lo que la misma es convergente para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

c) La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ tiene por radio de convergencia $R = 1$, por lo que la misma es convergente para $|z| < 1$ y diverge $\forall z$ con $|z| > 1$.

Ya hemos visto que si una serie de potencias es convergente, su serie derivada también lo es (y tiene el mismo radio de convergencia que la inicial, siendo su suma la derivada de la serie original). Este resultado se puede generalizar a la derivada de cualquier orden, y también a la serie integral:

Proposition *Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ puede ser integrada término a término a lo largo de cualquier curva γ regular a trozos incluida en el interior de su círculo de convergencia, y se verifica que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\int_\gamma z^n dz\right)$$

teniendo esta última serie el mismo radio de convergencia que la inicial.

Además, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ define en su círculo de convergencia una función indefinidamente derivable, siendo su función derivada $k -$ sima la dada por

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)a_n z^{n-k}$$

y teniendo también esta última serie el mismo radio de convergencia que la inicial.

En el campo complejo pueden aparecer otro tipo de series que no aparen en el campo real. Así nos podemos encontrar con series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \text{ y/o de la forma } \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Proposition *Dada una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$, si existe $\rho = \lim\left|\frac{a_{-n-1}}{a_{-n}}\right|$, esta serie converge para $|z-z_0| > \rho$.*

Proposition *Dada una serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, ésta siempre se puede descomponer en la forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

por lo que la misma será convergentes en el dominio en el que ambos sumandos lo sean. Así, si la primera es convergente para $|z-z_0| > \rho$ y la segunda lo es para $|z-z_0| < R$, caben las siguientes posibilidades:

- Que $\rho > R$, en cuyo caso la serie inicial será divergente en todo $\mathbb{C}$.

- Que $\rho < R$, en cuyo caso la serie inicial será convergente en el anillo $\rho < |z-z_0| < R$ (siendo $\rho \geq 0$ y $0 < R \leq \infty$).

Series de Taylor.

La primera y más importante de las consecuencias de las fórmulas integrales de Cauchy (establecidas en el tema anterior) será que cualquier función analítica siempre va a ser posible representarla por medio de una serie de potencias (en concreto, por lo que se llamará su **serie de Taylor**) en el dominio donde esta serie sea convergente. Y puesto que las series de potencias son indefinidamente derivables, resultará que toda función analítica en un abierto poseerá derivadas de todos los órdenes en dicho abierto, con lo que la derivada de una función analítica será a su vez una función analítica. Esta consecuencia viene establecida en el siguiente teorema:

Theorem *(**Teorema de Taylor**) Sea f analítica en $B(z_0, r_0)$. Entonces, $\forall z \in B(z_0, r_0)$ se verifica que la función $f(z)$ puede desarrollarse como una serie de potencias, que viene dada por la expresión*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

*Además, el radio de convergencia de esta serie (a la que se le llama **serie de Taylor** de f en z_0) es mayor o igual que r_0. Cuando $z_0 = 0$, la serie resultante se conoce como **serie de McLaurin**:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Remark *Por tanto, la serie de potencias converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < r_0$. Además, el desarrollo es único, y por las fórmulas integrales de Cauchy, los coeficientes de este desarrollo de Taylor vienen dados por*

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

siendo γ_r una circunferencia de centro z_0 y radio $r < r_0$, recorrida en sentido positivo.

A pesar de que esta última expresión nos da una forma de obtener los coeficientes de la serie de Taylor, ésta forma de obtenerlos no será utilizada en la práctica, sino que los mismos los calcularemos de forma directa, ya sea obteniendo directamente $f^{(n)}(z_0)$ o calculando los mismos a partir de desarrollos conocidos, como vemos en los siguientes ejemplos.

Example *(Desarrollos de McLaurin de las funciones elementales)*

a) La función $f(z) = e^z$ es entera, por lo que podemos obtener su desarrollo en serie de McLaurin. Al ser $f^{(n)}(z) = e^z$, se verifica que $f^{(n)}(0) = 1$, por lo que a partir de la expresión

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

podemos poner

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

y como el radio de convergencia de esta serie es $R = \infty$, podemos afirmar que esta igualdad se verifica si $|z| < \infty$, es decir, para todo número complejo z.

b) $f(z) = z^3 e^{-2z}$. En lugar de calcular $f^{(n)}(0)$, cosa que podríamos hacer, vamos *a utilizar el desarrollo anterior para e^z, y sustituiremos en el mismo z por $-2z$. Así*

$$f(z) = z^3 e^{-2z} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} z^{n+3}$$

que la podemos dejar de esta forma, o realizar la sustitución de n por $n-3$ y obtener

$$f(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3} 2^{n-3}}{(n-3)!} z^n$$

En uno u otro caso, siempre se tiene que la igualdad es cierta cuando $|z| < \infty$ (ya que la serie de e^z es convergente si $|z| < \infty$, y por tanto la de e^{-2z} lo será si $|-2z| < \infty$, es decir, si $|z| < \infty$).

c) De forma análoga al caso (a), se tiene que

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \left(si\ |z| < \infty\right)$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \left(si\ |z| < \infty\right)$$

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \left(si\ |z| < \infty\right)$$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \left(si\ |z| < \infty\right)$$

d) También se verifica que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \left(si\ |z| < 1\right)$$

Notemos que ahora la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ no es analítica en $z = 1$, lo que no afecta para nada al cálculo de su desarrollo en serie de McLaurin.

A partir de este mismo resultado, y cambiando z por $-z$, resulta

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad \left(si\ |z| < 1\right)$$

e) A partir de los desarrollos anteriores, podemos obtener, mediante derivación de los mismos

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \qquad \left(si\ |z| < 1\right)$$

donde hemos utilizado un resultado de la sección anterior sobre la derivación de una serie de potencias; y de igual forma

$$\frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n z^{n-1} \qquad \left(si\ |z| < 1\right)$$

f) También podemos integrar los desarrollos anteriores y obtener, por ejemplo, el desarrollo para $\log(1+z)$*, puesto que*

$$\log(1+z) = \int_\gamma \frac{dz}{1+z} = \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_\gamma z^n dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \qquad \left(si\ |z| < 1\right)$$

aunque este mismo desarrollo podríamos haberlo obtenido a partir de derivar sucesivamente la función $\log(1+z)$.

g) Utilizando nuevamente la expresión del desarrollo de McLaurin, también se obtiene

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n \qquad \left(si\ |z| < 1\right)$$

Remark *Notemos que en todos los resultados anteriores, si hacemos* $z = x + 0i = x$*, los mismos nos dan los desarrollos conocidos para las funciones reales* e^x, $\sin(x)$, $\log(1+x)$, $\ldots$ *y que fueron establecidos en la asignatura de Matemáticas I.*

Example *Para obtener el desarrollo en serie de McLaurin la función* $f(z) = \frac{z}{z^2+3}$*, realizamos lo siguiente:*

$$f(z) = \frac{z}{z^2+3} = \frac{z}{3}\frac{1}{1+\frac{z^2}{3}} = \frac{z}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^{2n+1}$$

y este desarrollo es válido si $\left|\frac{z^2}{3}\right| < 1$*, es decir, si* $|z| < \sqrt{3}$.

Example *Sin embargo, si intentamos realizar un desarrollo en serie de McLaurin para* $f(z) = \frac{1}{2z-z^2}$*, tendremos que, realizando lo mismo de los ejemplos anteriores,*

$$f(z) = \frac{1}{2z-z^2} = \frac{1}{2z}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}} z^n$$

donde observamos que éste no es propiamente un desarrollo de McLaurin, puesto que aparece un término donde z está dividiendo. Ésto se debe a que la función inicial no es analítica en el punto $z_0 = 0$*, por lo que no tiene sentido obtener un desarrollo de McLaurin como en los ejemplos anteriores. Por eso, su región de convergencia será* $0 < |z| < 2$ *(ya que la de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$ *es* $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$*, es decir, si* $|z| < 2$*, y hemos de excluir el punto* $z = 0$*, ya que el mismo es un punto singular para la función dada).*

Cuando ésto ocurre, es decir, cuando una función no es analítica en un punto z_0, *no es posible obtener su desarrollo en serie de Taylor como potencias de $z - z_0$, ya que es imposible calcular en el mismo las sucesivas derivadas de la función; sin embargo, si que observamos en este ejemplo que es posible obtener un desarrollo, en este caso como potencias de $z - 0 = z$, aunque alguna de las mismas ahora lleva exponente negativo. Como veremos en la sección siguiente, ésto siempre va a ocurrir cuando una función no es derivable en un punto z_0 : vamos a poder obtener "otro desarrollo" en serie, aunque el mismo tendrá potencias positivas y negativas de $(z - z_0)$.*

Example *Idem para*

$$f(z) = \frac{1 + 2z^2}{z^3 + z^5}$$

Series de Laurent.

Si una función no es analítica en un punto z_0, no podemos aplicar el teorema de Taylor en dicho punto. No obstante, sí que va a ser posible hallar una representación en serie para $f(z)$, aunque este desarrollo contendrá tanto potencias positivas como negativas de $z - z_0$, como hemos establecido en los últimos dos ejemplos anteriores. A una serie de esta forma se le llamará **serie de Laurent** y el resultado fundamental que nos indica cuando es posible realizar este nuevo desarrollo es el siguiente:

Theorem ***(Teorema de Laurent)*** *Sean γ_0 una circunferencia de centro z_0 y radio r_0, γ_1 una circunferencia de centro z_0 y radio r_1 (con $r_0 < r_1$) y $f(z)$ una función analítica en los puntos de γ_0, de γ_1 y de la región comprendida entre ellas. Entonces, en cada punto z, con $r_0 < |z - z_0| < r_1$, de la corona comprendida entre ellas, f admite el siguiente desarrollo (que se conoce como **desarrollo de Laurent** de $f(z)$ en el punto $z = z_0$)*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

donde los respectivos coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \; b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz$$

y las circunferencias γ_0 y γ_1 están recorridas en sentido positivo.

Remark *De este teorema podemos destacar las siguientes consecuencias:*

** Si f es analítica en todo punto de γ_1 y en su interior salvo en z_0, el radio r_0 se puede tomar arbitrariamente pequeño, y el desarrollo de Laurent será válido para $0 < |z - z_0| < r_1$.*

** Si f es analítica en los puntos de γ_1 y en todo su interior, entonces $b_n = 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, y la serie de Laurent se reduce a una serie de Taylor centrada en z_0.*

** Puesto que los dos integrandos $f(z)(z - z_0)^{-n-1}$ y $f(z)(z - z_0)^{n-1}$ de a_n y b_n son analíticos en la corona $r_0 < |z - z_0| < r_1$ y en su frontera, se puede usar como camino de integración, en lugar de las circunferencias γ_0 y γ_1, cualquier circunferencia γ de centro z_0 y radio r, con $r_0 < r < r_1$. De esta forma, el desarrollo de Laurent podrá escribirse*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

con $n \in \mathbb{Z}$, y estando γ recorrida en sentido positivo.

** La parte $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$ se llama **parte principal** (o **singular**) de la serie de Laurent y la parte $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ **parte regular**.*

Remark *En la práctica, para hallar los coeficientes de los desarrollos anteriores (a_n, b_n o c_n) se procurará evitar las fórmulas anteriores y, siempre que sea posible, se recurrirá a desarrollos conocidos, al igual que hemos realizado para el caso de las series de Taylor.*

Example *Para obtener un desarrollo de Laurent para $f(z) = e^{1/z}$ como potencias de z, usaremos el desarrollo conocido $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (válido si $|z| < \infty$), de manera que sustituyendo en éste z por $\frac{1}{z}$, resultará*

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \ldots$$

siendo su región de convergencia la dada por $|\frac{1}{z}| < \infty$, es decir, $0 < |z| < \infty$.

Example *La función $f(z) = -\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ tiene por puntos singulares $z_1 = 1$ y $z_2 = 2$. Por tanto la misma es analítica en los siguientes dominios: D_1 ($|z| < 1$); $D_2 : 1 < |z| < 2$ y en $D_3 : |z| > 2$. En cada uno de estos dominios la función podrá desarrollarse como potencias de z.*

Para poder determinar dichos desarrollos, previamente hemos de hacer la descomposición de la función en fracciones simples, es decir,

$$f(z) = -\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

De esta forma, tendremos:

** En $D_1 : |z| < 1$, hacemos*

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

donde la primera de las series es convergente si $|z| < 1$ y la segunda si $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, es decir, ambas los son si $|z| < 2$. Por lo tanto, el desarrollo para la función f será válido si $|z| < 1$. Entonces podemos poner

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n \qquad \left(si\ |z| < 1\right)$$

Notemos que, en esta región, se obtiene para $f(z)$ un desarrollo de McLaurin, puesto que en D_1 la función no tiene ninguna singularidad.

* *En* D_2 $(1 < |z| < 2)$*: En esta región es válido el desarrollo anterior realizado para* $\frac{1}{z-2}$ *(puesto que el mismo es válido si* $|z| < 2$*), pero no es válido el desarrollo anterior hecho para* $\frac{1}{z-1}$ *(el mismo es convergente en* $|z| < 1$*). Por ello, haremos lo siguiente:*

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

donde ahora el primer sumando es convergente si $|\frac{1}{z}| < 1$ *(es decir, si* $|z| > 1$*), y el segundo si* $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ *(es decir, si* $|z| < 2$*). Por tanto, tendremos que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad \left(si\ 1 < |z| < 2\right)$$

Notemos que ahora el desarrollo tiene tanto parte regular (potencias positivas de z) como parte singular (potencias negativas). Ésto se debe a que cualquier circunferencia que consideremos en D_2 *incluye al punto singular* $z_1 = 1$.

* *En* D_3 $(|z| > 2)$*: En esta región es válido el desarrollo anterior realizado para* $\frac{1}{1-1/z}$ *(puesto que el mismo es válido si* $|z| > 1$*), pero no es válido el desarrollo anterior de* $\frac{1}{1-z/2}$ *(el mismo es convergente en* $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$*, es decir si* $|z| < 2$*). Por ello, mantendremos el primero de los sumandos anteriores, pero cambiamos el segundo:*

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

siendo la región de convergencia la dada por la intersección de las regiones de convergencia de cada uno de los sumandos. Como el primer sumando es convergente si $|\frac{1}{z}| < 1$ *(es decir, si* $|z| > 1$*), y el segundo lo es si* $|\frac{2}{z}| < 1$ *(es decir, si* $|z| > 2$*), tendremos que ambos serán válidos si* $|z| > 2$*, es decir*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^n}{z^{n+1}} \qquad \left(si\ |z| > 2\right)$$

Notemos que ahora el desarrollo solo tiene parte principal (potencias negativas). Ésto se debe a que cualquier circunferencia que consideremos en D_3 *incluye tanto al punto singular* $z_1 = 1$ *como a* $z_2 = 2$.

Ceros de las funciones analíticas.

Finalizaremos este tema con un apartado dedicado al estudio de los ceros de las funciones analíticas:

Definition *Se dice que* z_0 *es un* ***cero de orden*** *n de una función analítica* $f(z)$ *si se verifican*

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \text{ y } f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Cuando $n = 1$ *se dice que* z_0 *es un cero* ***simple****.*

Example *Hallar los ceros de la función* $f(z) = 1 - e^z$ *y determinar sus órdenes.*

Como resultados fundamentales, destacaremos:

Proposition *Un punto z_0 es un cero de orden n de una función analítica en dicho punto f, si y sólo si en un cierto entorno de z_0 se verifica $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.*

Example *Hallar el orden del cero $z_0 = 0$ para las funciones*

$$a)\ g(z) = \begin{cases} \frac{\sin^2(z)}{z}, & si\ z = 0 \\ 0, & si\ z = 0 \end{cases}, \qquad b)\ h(z) = \begin{cases} \frac{z^8}{z-\sin(z)}, & si\ z = 0 \\ 0, & si\ z = 0 \end{cases}$$

Proposition ***(Principio de los ceros aislados)*** *Sea f una función analítica no constante en un entorno de z_0, que es un cero de f. Entonces, existe un entorno de z_0 en el que no hay ceros de f; es decir, los ceros de una función analítica no nula siempre son ceros aislados.*

La transformada $\mathcal{Z}$.

La transformada $\mathcal{Z}$ nos da un procedimiento matemático que consiste en obtener una función analítica a partir de una sucesión de números (que pueden ser complejos). Esta herramienta se obtiene a partir de los desarrollos de Laurent y se usa comúnmente en el análisis de muestras de datos. Además, y como vamos a ver, la importancia de la misma radica en que nos permite resolver **Ecuaciones en diferencias finitas** (una *ecuación en diferencias finitas* es una expresión matemática que relaciona distintas sucesiones, una de ellas desconocida y que se pretende determinar).

Por ejemplo, supongamos que los valores que toma una señal eléctrica que varía en el tiempo se registran a intervalos regulares. Estos valores (o muestras) forman una sucesión de números, la cual podemos introducir en un ordenador que la altera de diversas maneras. Este procedimiento se conoce como *procesamiento de señales*, y es ampliamente utilizado en sistemas de radar y de telecomunicaciones.

El resultado que nos da el ordenador es la solución de una ecuación en diferencias en la que intervienen, como bien su nombre indica, las diferencias de los valores de la muestra. La transformada $\mathcal{Z}$ nos facilitará la resolución de este tipo de ecuaciones.

Las ecuaciones en diferencias también nos las podemos encontrar en otras disciplinas como en economía, crecimiento de poblaciones, biología, etc, por lo que la transformada $\mathcal{Z}$ también se utiliza en estos ámbitos.

Por todo ésto, en esta última sección del presente tema estableceremos la definición y principales propiedades de esta transformada y veremos como podemos utilizarla para resolver determinadas ecuaciones en diferencias.

Definition *Dada una sucesión de números complejos $(a_n)_{n\geq 0}$, se define la **transformada $\mathcal{Z}$** de esta sucesión como la serie de Laurent dada por*

$$\mathcal{Z}[a_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

Remark *Notemos como la transformada $\mathcal{Z}$ es una serie de Laurent con parte regular a_0 y con parte principal $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$, siendo por tanto convergente en el disco*

$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$, donde r es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

Example *Si queremos determinar la transformada $\mathcal{Z}$ de las siguientes sucesiones:*

$$(a_n) = (1, 0, 0, 0, \dots); \qquad (b_n) = (1, 1, 1, 1, \dots); \qquad (c_n) = (2^n)$$

tendremos que

$$\mathcal{Z}[a_n](z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{z^n} = 1$$

por lo que $\mathcal{Z}[a_n](z) = 1, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

De igual manera

$$\mathcal{Z}[b_n](z) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

donde hemos empleado la suma de los términos de una serie geométrica; además, esta serie será convergente si $|\frac{1}{z}| < 1$, es decir, si $|z| > 1$. Así, $\mathcal{Z}[b_n](z) = \frac{z}{z-1}$ si $|z| > 1$.

Por último

$$\mathcal{Z}[c_n](z) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2}$$

que es convergente si $|z| > 2$.

Propiedades básicas.

Proposition *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números complejos y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:*

a) (Linealidad) Se verifica

$$\mathcal{Z}[\alpha a_n + \beta b_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[a_n](z) + \beta \mathcal{Z}[b_n](z)$$

para todo z en el dominio de definición de $\mathcal{Z}[a_n](z)$ y $\mathcal{Z}[b_n](z)$.

b) (Traslación - Avance) Se cumple que

$$\mathcal{Z}[a_{n+1}](z) = z\mathcal{Z}[a_n](z) - za_0$$

En general, si $k_0 \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\mathcal{Z}[a_{n+k_0}](z) = z^{k_0} \mathcal{Z}[a_n](z) - \sum_{n=0}^{k_0 - 1} a_n z^{k_0 - n}$$

c) (Traslación - Retroceso) Se cumple que

$$\mathcal{Z}[a_{n-1}](z) = z^{-1} \mathcal{Z}[a_n](z)$$

En general, si $k_0 \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\mathcal{Z}[a_{n-k_0}](z) = z^{-k_0} \mathcal{Z}[a_n](z)$$

d) Si $\omega \in \mathbb{C} - \{0\}$, se verifica

$$\mathcal{Z}[\omega^n a_n](z) = \mathcal{Z}[a_n]\left(\frac{z}{\omega}\right)$$

e) Se verifica que

$$\mathcal{Z}[na_n](z) = -z\frac{d\mathcal{Z}[a_n](z)}{dz}$$

En general, si $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\mathcal{Z}[n^m a_n](z) = \left[-z\frac{d}{dz}\right]^m (\mathcal{Z}[a_n](z))$$

donde $-z\frac{d}{dz}$ denota la operación derivada y después se multiplica por $-z$.

Example *Para determinar la transformada $\mathcal{Z}$ de la sucesión $(a_n) = (2^n)$, además de como hemos realizado en el último ejemplo, podíamos haber aplicado el apartado (d) de la anterior proposición, obteniendo*

$$\mathcal{Z}[2^n](z) = \mathcal{Z}[2^n \cdot 1](z) = \mathcal{Z}[1]\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\frac{z}{2}}{\frac{z}{2} - 1} = \frac{z}{z-2}$$

donde hemos utilizado que, como hemos establecido en el ejemplo anterior, $\mathcal{Z}[1](z) = \frac{z}{z-1}$.

Example *Si queremos determinar la transformada $\mathcal{Z}$ de la sucesión $(a_n) = (n) = (1,2,3,\dots)$, aplicamos la primera de las expresiones obtenidas en el apartado (e) de la proposición anterior, de manera que*

$$\mathcal{Z}[n](z) = \mathcal{Z}[n \cdot 1](z) = -z\frac{d\mathcal{Z}[1](z)}{dz} = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2}$$

mientras que si pretendemos calcular la de la sucesión $(a_n) = (n^2) = (1,2^2,3^2,4^2,\dots)$, y aplicando la expresión más general del apartado (e) anterior, tendremos

$$\mathcal{Z}[n^2](z) = \mathcal{Z}[n^2 \cdot 1](z) = \left[-z\frac{d}{dz}\right]^2 (\mathcal{Z}[1](z)) = \left[-z\frac{d}{dz}\right]^2 \left(\frac{z}{z-1}\right) =$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right] = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right] = \dots = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$$

La transformada $\mathcal{Z}$ inversa.

Ahora nos planteamos el problema de obtener una sucesión (a_n) a partir del conocimiento de su transformada $\mathcal{Z}[a_n](z)$. Para ello establecemos la siguiente equivalencia (denotamos ahora por $X(z)$ a la transformada):

$$\mathcal{Z}[a_n](z) = X(z) \Leftrightarrow a_n = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

Al operador $\mathcal{Z}^{-1}$ le llamaremos **operador transformación inversa** $\mathcal{Z}$ y a la sucesión (a_n), la **transformada $\mathcal{Z}$ inversa** de la función $X(z)$.

Puesto que la transformada $\mathcal{Z}$ de una sucesión es una serie de Laurent centrada en cero, para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de una función bastará con calcular el desarrollo en serie de Laurent, centrada en cero, de dicha función en el disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$.

Example *Para determinar la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de la función $X(z) = \frac{1}{z-1}$ desarrollamos ésta en serie de Laurent en la forma*

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$$

si $|z| > 1$. Entonces, si comparamos esta expresión con $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$, tendremos que la sucesión que buscamos viene dada por

$$a_n = (0,1,1,1,\dots)$$

es decir

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right] = (0,1,1,1,\dots)$$

Example *Si queremos hacer lo mismo para $X(z) = \frac{z}{z-2}$, puesto que*

$$\frac{z}{z-2} = \frac{1}{1-2/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots$$

tendremos que, si $|z| > 2$, entonces

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = a_n = (0,2,2^2,2^3,\dots) = (2^n)$$

Example *Si necesitamos determinar transformadas $\mathcal{Z}$ inversas de funciones racionales, el procedimiento consiste en descomponer en fracciones simples dicha función, y calcular la transformada inversa de cada una de ellas. Por ejemplo para $X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$.*

Aplicación a la resolución de ecuaciones en diferencias.

Supongamos que pretendemos resolver la ecuación en diferencias dada por

$$\begin{cases} y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 1 \\ y_0 = 0, y_1 = 1 \end{cases}$$

es decir, supongamos que pretendemos hallar una sucesión numérica (y_n) cuyos términos verifiquen la anterior relación.

Si aplicamos la transformada $\mathcal{Z}$ y usamos sus propiedades, tendremos

$$\mathcal{Z}[y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n](z) = \mathcal{Z}[1](z)$$

Pero el primer miembro de esta igualdad puede ponerse como

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) + \mathcal{Z}[y_{n+1}](z) - 2\mathcal{Z}[y_n](z) &= z^2\mathcal{Z}[y_n](z) - z + z\mathcal{Z}[y_n](z) - 2\mathcal{Z}[y_n](z) = \\ &= (z^2 + z - 2)\mathcal{Z}[y_n](z) - z\end{aligned}$$

mientras que, para el segundo se verifica que

$$\mathcal{Z}[1](z) = \frac{z}{z-1}$$

Así,

$$(z^2+z-2)\mathcal{Z}[y_n](z) - z = \frac{z}{z-1}$$

es decir

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = \frac{z^2}{(z-1)(z^2+z-2)} = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+2)}$$

que si la expresamos en fracciones simples,

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = -\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{3}{z-1} + \frac{4}{z+2}$$

por lo que la solución y_n de la ecuación inicial vendrá dada por la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de esta suma de fracciones

$$\begin{aligned} y_n &= \mathcal{Z}^{-1}\left[-\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{3}{z-1} + \frac{4}{z+2}\right] = \\ &= -\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-1)^2}\right] - 3\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right] + 4\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z+2}\right] \end{aligned}$$

y para obtenerla, tendremos que considerar los desarrollos de Laurent de cada una de estas fracciones:

Tenemos que

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+2/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}$$

si $|z| > 2$, mientras que

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

si $|z| > 1$, y, por último,

$$\frac{1}{(z-1)^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z-1}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}$$

si $|z| > 1$.

Por todo lo anterior, si $|z| > 2$, entonces

$$\begin{aligned} y_n &= -\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-1)^2}\right] - 3\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right] + 4\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z+2}\right] = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}} = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} - \left(\frac{3}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{z^{n+2}}\right) + \left(\frac{4}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-2)^n}{z^{n+1}}\right) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-n-4+4(-2)^n}{z^{n+1}} \end{aligned}$$

por lo que si $n \geq 2$,

$$y_n = -n - 4 + 4(-2)^n$$

Observamos que si comparamos este último desarrollo con la expresión general de la transformada $\mathcal{Z}$, $y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{z^n}$, efectivamente se verifica que $y_0 = 0, y_1 = 1,$ como bien nos daban al principio.

Example *Resolver*

$$\begin{cases} y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 1 \\ y_0 = y_1 = 0 \end{cases}$$

Ejercicios resueltos.

Nota: En alguno de los ejercicios siguientes, que todos son de exámenes propuestos en la asignatura, se hace referencia al concepto *de singularidad,* a la *clasificación* de las mismas y al cálculo del *residuo*. Como veremos, estos conceptos está íntimamente relacionados con las series de Laurent, aunque los mismos no serán estudiados hasta el próximo tema. Por ello, cabe la posibilidad de que alguno de los apartados de los ejercicios siguientes no se comprendan del todo hasta estudiar el próximo tema.

1. (Febrero 2012) *Dada la función*

$$g(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 2z + 5)}$$

1.a *Encuentrar y clasificar sus singularidades.*

1.b *Escribir la serie de Laurent de g alrededor de $z_0 = 0$. ¿Cuál es el disco de convergencia?*

Solución:

(1.a) Las singularidades de g son los ceros del denominador (por lo tanto serán polos, ya que el numerador no se anula), que son $z_1 = 0$ (polo doble) y $z_{2,3} = -1 \pm 2i$ (polos simples).

(1.b) Descompondremos g en fracciones simples como sigue

$$g(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 2z + 5)} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{A}{z + 1 - 2i} + \frac{B}{z + 1 + 2i}\right)$$

y operando se llega a que $A = \frac{1}{4i}$ y $B = \frac{-1}{4i}$, por lo que

$$g(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{\frac{1}{4i}}{z + 1 - 2i} - \frac{\frac{1}{4i}}{z + 1 + 2i}\right)$$

Como queremos expresar $g(z)$ en potencias de z, sólo tendremos que expresar en dichos términos cada una de las dos fracciones elementales anteriores, para lo que usaremos desarrollos conocidos (en este caso, usaremos el desarrollo de $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, que es convergente si $|z| < 1$):

$$\frac{\frac{1}{4i}}{z + 1 - 2i} = \frac{\frac{1}{4\mathrm{i}}}{1 - 2i}\frac{1}{1 + \frac{z}{1-2i}} = \frac{\frac{1}{4i}}{1 - 2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{1 - 2i}\right)^n$$

que será convergente si $\left|\frac{z}{1-2i}\right| < 1,$ es decir si $|z| < |1 - 2i| = \sqrt{5}$, mientras que

$$\frac{\frac{1}{4i}}{z+1+2i} = \frac{\frac{1}{4i}}{1+2i}\frac{1}{1+\frac{z}{1+2i}} = \frac{\frac{1}{4i}}{1+2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{1+2i}\right)^n$$

que será convergente si $\left|\frac{z}{1+2i}\right| < 1,$ es decir si $|z| < |1+2i| = \sqrt{5}$.

Así

$$g(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{\frac{1}{4i}}{1-2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{1-2i}\right)^n - \frac{\frac{1}{4i}}{1+2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{1+2i}\right)^n\right)$$

que será convergente si $0 < |z| < \sqrt{5}$.

2. (Junio 2012) *Calcula la serie de Laurent de la función*

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-i)}$$

alrededor de los puntos $z_0 = 0,\ i,\ 1+i$. Indica que clase de singularidad se tiene en cada punto.

Solución: Antes que nada, ya podemos afirmar que los puntos $z_0 = 0,\ z_1 = i,$ son polos simples (ya que son ceros simples del denominador y el numerador no se anula en ellos), mientras que el punto $z_2 = 1+i$ será una singularidad evitable (puesto que la función es derivable en dicho punto). Esto también se observa si obtenemos los correspondientes desarrollos de Laurent (puesto que en el correspondiente desarrollo como potencias de z aparecerá un único término con $\frac{1}{z}$ y todos los demás términos serán de la forma z^n (con $n \geq 0$); en el desarrollo como potencias de $z-i$ aparecerá un único término con $\frac{1}{z-i}$ y todos los demás términos serán de la forma $(z-\mathbf{i})^n$ (con $n \geq 0$); y en el desarrollo como potencias de $z-(1+i)$) todos los términos serán de la forma $(z-(1+i)))^n$ (con $n \geq 0$)): Como se verifica

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-i} =\ldots= \frac{i}{z} + \frac{1-i}{z-i}$$

* En $z_0 = 0$: Como queremos expresar cada fracción en potencias de z, sólo tendremos que expresar en dichos términos cada una de las dos fracciones elementales anteriores. La primera ya lo está, por lo que para expresar la segunda usaremos desarrollos conocidos (en este caso, usaremos el desarrollo de $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, que es convergente si $|z| < 1$):

$$\frac{1-i}{z-i} = \frac{i-1}{i-z} = \frac{1}{i}\frac{i-1}{1-\frac{z}{i}} = \frac{i-1}{i}\frac{1}{1-\frac{z}{i}} = \frac{i-1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n$$

que será convergente si $\left|\frac{z}{i}\right| < 1,$ es decir si $|z| < |i| = 1.$ Así el desarrollo de Laurent en torno a este punto será

$$f(z) = \frac{i}{z} + \frac{i-1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n$$

(de nuevo se observa que $z_0 = 0$ es un polo simple, ya que solamente aparece un término con z dividiendo, y éste es de grado 1).

* En $z_1 = i$: Como queremos expresar cada fracción en potencias de $z-i$, sólo tendremos que expresar en dichos términos cada una de las dos fracciones elementales anteriores. La segunda ya lo está, por lo que para expresar la primera volveremos a usar desarrollos conocidos (en este caso, usaremos el desarrollo de $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, que es convergente si $|z| < 1$):

$$\frac{i}{z} = \frac{i}{(z-i)+i} = \frac{1}{i}\frac{i}{1+\frac{z-i}{i}} = \frac{1}{1+\frac{z-i}{i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{i}\right)^n$$

que será convergente si $\left|\frac{z-i}{i}\right| < 1$, es decir si $|z-i| < |i| = 1$ (es decir, alrededor de la circunferencia de centro i y radio 1). Así el desarrollo de Laurent en torno a este punto será

$$f(z) = \frac{i}{z} + \frac{1-i}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{i}\right)^n + \frac{1-i}{z-i}$$

(de nuevo se observa que $z_1 = i$ es un polo simple, ya que solamente aparece un término con $z-i$ dividiendo, y éste es de grado 1).

* En $z_2 = 1+i$: Pretendemos expresar las fracciones como potencias de $z-(1+i)$). Para ello, y por un razonamiento similar a los anteriores, pondremos

$$\frac{i}{z} = \frac{i}{z-1-i+(1+i)} = \frac{\frac{i}{1+i}}{\frac{z-1-i}{1+i}+1} = \frac{i}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n$$

que será convergente si $\left|\frac{z-1-i}{1+i}\right| < 1$, es decir si $|z-1-i| < |1+i| = \sqrt{2}$ (es decir, alrededor de la circunferencia de centro $1+i$ y radio $\sqrt{2}$), mientras que

$$\frac{1-i}{z-i} = \frac{1-i}{(z-1-i)+1} = (1-i)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1-i)^n$$

que será convergente si $|z-1-i| < 1$, es decir, alrededor de la circunferencia de centro $1+i$ y radio 1). Por tanto

$$f(z) = \frac{i}{z} + \frac{1-i}{z-i} = \frac{i}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n + (1-i)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1-i)^n$$

y que será convergente alrededor de la circunferencia de centro $1+i$ y radio 1. (De nuevo se observa que $z_2 = 1+i$ no es singularidad, ya que en su desarrollo como potencias de $z-1-i$ todos los términos aparecen multiplicando).

NOTA: También, y puesto que f es derivable en dicho punto, podríamos aplicar el desarrollo de Taylor de $f(z)$ en el punto $z_2 = 1+i$, por lo que tendríamos que calcular las derivadas sucesivas de f y aplicaríamos

$$f(z) = f(1+i) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1+i)}{n!}(z-(1+i))^n$$

3. (Junio 2013) *Dada la función*

$$f(x+yi) = y\sin(x) + \frac{y^2}{2}i$$

y el número complejo $z_0 = 2\pi + i$, indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente la respuesta:

3.a *La función f es derivable en z_0.*

3.b *Existe una sucesión de números complejos (a_n) de forma que*

$$f(z) = \frac{i}{2} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \qquad |z-z_0| < 1$$

Solución: Para ver si f es derivable en z_0 tenemos que ver si se verifican en dicho punto las ecuaciones de Cauchy Riemann, es decir, comprobar si en z_0 se verifican que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, siendo $u(x,y) = y\sin(x)$; $v(x,y) = \frac{y^2}{2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,1) = 1; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}(2\pi,1) = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(2\pi,1) = 0; \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial v}{\partial x}(2\pi,1) = 0$$

Por tanto, la función si es derivable en dicho punto.

(3.b) Lo que nos quiere decir el enunciado de (3.b) es que veamos si f admite un desarrollo en serie de Taylor en el punto z_0 y si su valor en dicho punto es el dado por $\frac{i}{2}$. Ya hemos visto (apartado 3.a) que efectivamente f es analítica en el punto z_0; calculemos entonces $f(z_0)$:

$$f(z_0) = f(2\pi + i) = f(2\pi,1) = 1 \cdot \sin(2\pi) + \frac{1^2}{2}i = \frac{i}{2}$$

Por tanto, el enunciado es Verdadero.

4. (Junio 2013) *Sea la función*

$$g(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

Calcular su desarrollo alrededor del punto $z = 0$ ¿Cual es el radio de convergencia de dicha serie? ¿Tiene alguna singularidad aislada? ¿De qué tipo?

Solución: Se verifica

$$g(z) = \frac{z}{z^2+1} = z\frac{1}{1+z^2} = z(1-z^2+z^4-z^6+z^8-\ldots) =$$

$$= z - z^3 + z^5 - z^7 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{2n-1}$$

(puesto que la fracción $\frac{1}{1+z^2}$ corresponde a la suma de los infinitos términos de la serie geométrica que aparece desarrollada en el paréntesis).

Además, sabemos que esta serie geométrica es convergente siempre que su razón sea menor que la unidad, por lo que ésta será convergente si $|-z^2| < 1$, lo que equivale a que $|z| < 1$.

La serie tiene por singularidades aisladas las raíces del denominador, es decir $z = \pm i$. Estas singularidades son polos simples, ya que son ceros simples del denominador (y el numerador no se anula en ellas).

5. (Septiembre 2013) *Sea la función*

$$g(z) = \frac{z}{(z^2+i)(z+1)}$$

Calcular su desarrollo en serie de potencias alrededor del punto $z = 0$ ¿Cual es el radio de convergencia de dicha serie? ¿Tiene alguna singularidad? En caso afirmativo, ¿de qué tipo? ¿Qué vale el residuo?

Solución: Podemos descomponer en fracciones simples en la forma

$$g(z) = \frac{z}{(z^2+i)(z+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{z^2+i}$$

y operando se llega a $A = \frac{-1}{1+i}$, $B = \frac{1}{1+i}$, $C = \frac{i}{1+i}$, por lo que

$$g(z) = \frac{-1}{1+i}\frac{1}{z+1} + \left(\frac{1}{1+i}z + \frac{i}{1+i}\right)\frac{1}{z^2+i}$$
y solo tenemos que desarrollar las fracciones $\frac{1}{z+1}$ y $\frac{1}{z^2+i}$ como potencias de z.

Puesto que se verifica
$$\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$$
serie que es convergente siempre que $|z| < 1$, y además
$$\frac{1}{z^2+i} = \frac{1}{i}\frac{1}{\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{i}\left(1 - \left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)^4 - \left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)^6 + \ldots\right)$$
siendo esta última serie convergente cuando $\left|\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)^2\right| < 1$, es decir si $|z| < 1$. Solo hemos de sustituir estos dos desarrollos en la expresión de g como suma de fracciones simples para obtener el resultado pedido. Notemos que el radio de convergencia es 1.

Además, y como sabemos desde el principio, la función tiene por puntos singulares aislados las raíces del denominador, es decir $z = \pm\sqrt{-i}$ y $z = -1$. Estas singularidades son polos simples, ya que son ceros simples del denominador (y el numerador no se anula en ellas).

Por último, para calcular el residuo de la función en 0 (o en cualquiera otra de las singularidades), solo hemos de aplicar que
$$Resf(0) = \frac{P(0)}{Q'(0)} = 0$$

6. (Febrero 2014) *Determinar la serie de Laurent de cada una de las funciones en los anillos que se indican. Indicar en cada una de ellas su parte regular y su parte singular:*
   6.a $f(z) = e^z + e^{1/z^2}$ *en* $|z| > 0$.
   6.b $g(z) = \frac{1}{z(z+R)}$ *en* $0 < |z| < R$.

Solución:
(6.a) Sabemos que
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

Por tanto, también será
$$e^{1/z^2} = e^{z^{-2}} = 1 + z^{-2} + \frac{(z^{-2})^2}{2!} + \frac{(z^{-2})^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^{-2})^n}{n!} \text{ para todo } z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$$

De esta forma
$$f(z) = e^z + e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^{-2})^n}{n!} =$$
$$= \left(2 + +z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \ldots\right)$$
siendo el primer paréntesis la parte regular y el segundo la parte singular (principal).

(6.b) En este caso vamos a descomponer en fracciones simples, puesto que se trata de expresar el cociente de polinomios en términos de z (en el anillo que nos dan). Se verifica

$$\frac{1}{z(z+R)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+R} = \ldots = \frac{1/R}{z} + \frac{-1/R}{z+R} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+R}\right)$$

El primer sumando del paréntesis, ya está expresado en términos de z (y tiene sentido siempre que $z \neq 0$) mientras que el segundo podemos ponerlo como

$$\frac{1}{z+R} = \frac{1}{R}\frac{1}{1+z/R} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \left(\frac{z}{R}\right)^3 + \ldots\right)$$

(nos basamos en que $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$, siendo válido este desarrollo siempre que $|z| < 1$), y este desarrollo será válido siempre que $\left|\frac{z}{R}\right| < 1$, es decir, siempre que $|z| < R$.

Por lo tanto

$$g(z) = \frac{1}{z(z+R)} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+R}\right) =$$
$$= \frac{1}{R}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{R}\left(1 - \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \left(\frac{z}{R}\right)^3 + \ldots\right)\right] =$$
$$= \left(\frac{1}{R}\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{R^2}\left(1 - \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \left(\frac{z}{R}\right)^3 + \ldots\right)$$

siendo en este caso el primer paréntesis la parte principal (singular) y el segundo la parte regular. Además este desarrollo es válido en la región $0 < |z| < R$.

7. (Junio 2014) *Determinar la serie de Laurent de la función*

$$f(z) = \frac{8}{-z^3 + 5z^2 - 7z + 3}$$

en el anillo $0 < |z-2| < 1$.

Solución: Se trata de expresar este cociente como potencias (positivas y/o negativas) de $(z-2)$.

Si descomponemos en fracciones simples

$$f(z) = \frac{8}{-z^3 + 5z^2 - 7z + 3} = \frac{-8}{z^3 - 5z^2 + 7z - 3} =$$
$$= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-3} = \ldots = \frac{2}{z-1} + \frac{4}{(z-1)^2} + \frac{-2}{z-3}$$

y entonces hemos de expresar cada una de estas fracciones como potencias de $(z-2)$:

Se tiene que

$$\frac{2}{z-1} = \frac{2}{(z-2)+1} = \frac{2}{1+(z-2)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

y este desarrollo es válido siempre que $|z-2| < 1$, cosa que ocurre en la región que estamos considerando (donde recordamos que nos hemos basado en el conocido desarrollo: $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, siempre que $|z| < 1$).

De igual forma

$$\frac{4}{(z-1)^2} = 4\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{z-1}\right) = \text{por el desarrollo anterior} =$$
$$= -4\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\right) = -4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{d}{dx}(z-2)^n =$$
$$= -4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(z-2)^{n-1}$$

que también es válido en la región considerada (al ser la derivada de un desarrollo válido en esa región).

Por último

$$\frac{-2}{z-3} = \frac{-2}{(z-2)-1} = \frac{2}{1-(z-2)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$$

y este desarrollo es válido siempre que $|z-2| < 1,$ cosa que ocurre en la región que estamos considerando (donde recordamos que hemos utilizando el desarrollo dado por $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, siempre que $|z| < 1$).

Si entonces sumamos todos los desarrollos, tendremos

$$f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n - 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(z-2)^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$$

Notemos que no aparece ninguna potencia de $(z-2)$ negativa, lo que es debido a que la función $f(z)$ no tiene a $z_0 = 2$ como punto singular; es decir, su desarrollo de Laurent como potencias de $(z-2)$ coincidirá con su desarrollo de Taylor en el punto $z_0 = 2.$ Por lo tanto, otra forma de haber calculado dicho desarrollo sería utilizar la fórmula de Taylor para la función $f(z)$ en el punto $z_0 = 2$ (aunque, en este caso, tendríamos el inconveniente de tener que calcular la derivada $n-sima$ del cociente dado por $f(z)$ o de cada una de sus fracciones simples en que se ha descompuesto).

8. (Febrero 2015) *Determinar todas las series de Laurent centradas en $z_0 = 0$ para la función*

$$f(z) = \frac{3}{z^2-z-2}$$

estableciendo el dominio de validez de cada uno de los desarrollos obtenidos. Indicar en cada uno de ellos la parte regular y la parte principal.

Solución: La función tiene por puntos singulares $\{2,-1\},$ por lo que consideraremos las 3 regiones siguientes:

$$D_1 : |z| < 1; \qquad D_2 : 1 < |z| < 2; \qquad D_3 : |z| > 2$$

y para cada una de ellas tendremos en cuenta que

$$f(z) = \frac{3}{z^2-z-2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2} =\ldots= \frac{-1}{z+1} + \frac{1}{z-2}$$

(a) En D_1 : Utilizando desarrollos conocidos, tenemos que

$$\frac{-1}{z+1} = -\frac{1}{z+1} = -(1-z+z^2-z^3+\ldots)$$

desarrollo que es válido si $|z| < 1$ (y por tanto válido en D_1), mientras que para la segunda fracción podemos poner

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\ldots\right)$$

desarrollo que es válido si $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ (y por tanto también válido en D_1).

Por tanto, en D_1 se tendrá

$$f(z) = -(1-z+z^2-z^3+\ldots) - \frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\ldots\right)$$

constituyendo todo este desarrollo la parte regular y no existiendo parte principal.

(b) En D_2 : Sigue siendo válido el desarrollo

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\ldots\right)$$

(ya que éste lo es siempre que $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$), pero no lo es el de la 1ª fracción (puesto que éste es válido si $|z| < 1$). Por ello, haremos

$$\frac{-1}{z+1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{1}{z}\right)^3+..\right)$$

desarrollo que es válido si $|\frac{1}{z}| < 1,$ es decir si $|z| > 1$ (y por tanto válido en D_2).

Por tanto, en esta región se tendrá

$$f(z) = -\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{1}{z}\right)^3+..\right) - \frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\ldots\right)$$

constituyendo el primer paréntesis la parte principal y el segundo la parte regular.

(c) En D_3 : Sigue siendo válido el desarrollo

$$\frac{-1}{z+1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{1}{z}\right)^3+..\right)$$

(ya que éste lo es siempre que $|\frac{1}{z}| < 1,$ es decir si $|z| > 1$), pero no lo es el de $\frac{1}{z-2}$ (puesto que éste es válido si $|z| < 2$). Por ello, haremos

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2-\left(\frac{2}{z}\right)^3+..\right)$$

desarrollo que es válido si $|\frac{2}{z}| < 1,$ es decir si $|z| > 2$ (y por tanto válido en D_3). Por tanto, en esta región se tendrá

$$f(z) = -\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{1}{z}\right)^3+..\right) + \frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2-\left(\frac{2}{z}\right)^3+..\right)$$

constituyendo todo el desarrollo la parte principal (o singular) y no existiendo parte regular.

9. (Septiembre 2015) *Hallar la serie de Laurent alrededor de las singularidades indicadas para cada una de las siguientes funciones. Clasificar la singularidad en cada caso y dar la región de convergencia de cada serie:*

$$(9.a)\ \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}\ en\ z_0 = 1 \qquad (9.b)\ (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\ en\ z_0 = -2 \qquad (9.c)\ \frac{z-\sin z}{z^3}\ en\ z_0 = 0$$

Solución:

(9.a) Podemos asegurar que el punto $z_0 = 1$ es un polo triple (anula 3 veces al denominador, mientras que no anula al numerador). Para calcular su desarrollo como potencias de $(z-1)$ hacemos lo siguiente (para basarnos en desarrollos conocidos):

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3}e^{2z} = \frac{1}{(z-1)^3}e^{2(z-1)+2} = \frac{e^2}{(z-1)^3}e^{2(z-1)} =$$
$$= \frac{e^2}{(z-1)^3}\left[1 + 2(z-1) + \frac{(2(z-1))^2}{2!} + \frac{(2(z-1))^3}{3!} + \ldots\right]$$
Nota: en este caso hemos usado el conocido desarrollo
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$
que sabemos que es convergente en todo $\mathbb{C}$; y hemos sustituido z por $2(z-1)$. Aquí también se observa que $z_0 = 1$ es un polo triple, puesto que la mayor potencia de $(z-1)$ que aparece dividiendo es un 3. Además este desarrollo es válido en todo $\mathbb{C} - \{1\}$ (por serlo el de e^z en todo $\mathbb{C}$ y el denominador solo anularse en $z_0 = 1$).

(9.b) Se trata de expresar la función $(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ como potencias de $(z+2)$. Para ello hacemos lo siguiente
$$(z-3)\sin\frac{1}{z+2} = (z+2-5)\sin\frac{1}{z+2} = (z+2)\sin\frac{1}{z+2} - 5\sin\frac{1}{z+2}$$
y ahora usamos el conocido desarrollo
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$
cuyo radio de convergencia es $|z| < \infty$. Cambiando entonces z por $\frac{1}{z+2}$, se tendrá
$$(z+2)\sin\frac{1}{z+2} - 5\sin\frac{1}{z+2} =$$
$$= (z+2)\left[\frac{1}{z+2} - \frac{\left(\frac{1}{z+2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{z+2}\right)^5}{5!} - \ldots\right] - 5\left[\frac{1}{z+2} - \frac{\left(\frac{1}{z+2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{z+2}\right)^5}{5!} - \ldots\right] =$$
$$= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{3!(z+2)^2} + \frac{5}{3!(z+2)^3} + \frac{1}{5!(z+2)^4} + \ldots$$
Notemos entonces que $z_0 = -2$ es una singularidad esencial (hay ∞ términos en los que $(z+2)$ aparece dividiendo), mientras que la región de convergencia de esta serie está dada por aquellos valores de z para los que $\left|\frac{1}{z+2}\right| < \infty$, es decir $|z+2| > 0$.

(9.c) En este último caso hay que expresarlo todo como potencias de z, lo que es inmediato sin más que hacer
$$\frac{z - \sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\sin z = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right] =$$
$$= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \ldots$$
por lo que $z_0 = 0$ es una singularidad evitable y la región de convergencia de será $0 < |z| < \infty$.

10. (Febrero 2016) *Determinar el desarrollo de Laurent alrededor del punto $z_0 = 1$ para la función*
$$f(z) = e^z + \frac{2i}{z(z-1)}$$
estableciendo el dominio de validez de dicho desarrollo; clasificar el tipo de singularidad existente en dicho punto y calcular su residuo.

Solución: Se trata de expresar esta función como potencias de $z-1$. Para ello:

$$f(z) = e^z + \frac{2i}{z(z-1)} = e^{z-1+1} + \frac{2i}{z-1}\frac{1}{1+z-1} = e^{z-1}e + \frac{2i}{z-1}\frac{1}{1+(z-1)}$$

y usando los conocidos desarrollos

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

cuyo disco de convergencia es $|z| < \infty$, y

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots$$

cuyo disco de convergencia es $|z| < 1$, tendremos que

$$e^{z-1} = 1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \ldots$$

con región de convergencia $|z-1| < \infty$, es decir, todo el plano complejo $\mathbb{C}$, mientras que

$$\frac{1}{1+(z-1)} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + (z-1)^4 - \ldots$$

con región de convergencia $|z-1| < 1$, es decir, el círculo centrado en $z_0 = 1$ y de radio 1.

Por tanto tendremos

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{z-1}e + \frac{2i}{z-1}\frac{1}{1+(z-1)} = \\ &= e\left(1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \ldots\right) + \\ &+ \frac{2i}{z-1}\left(1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \ldots\right) \end{aligned}$$

en la región intersección de ambas regiones de convergencia, es decir, en $|z-1| < 1$.

Analizando este resultado se observa que en el punto $z_0 = 1$ es un polo simple, ya que el término de mayor grado donde aparece $z-1$ dividiendo es $\frac{2i}{z-1}$, siendo además $Resf(1) = 2i$, ya que es el coeficiente del término $\frac{1}{z-1}$

NOTA: Que $z_0 = 1$ es un polo simple también se deduce sin más que mirar el enunciado, ya que $z_0 = 1$ es un cero simple del denominador, y el numerador no se anula en dicho punto. Además, el valor de su residuo también se puede calcular aplicando

$$Resf(1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\left(e^z + \frac{2i}{z(z-1)}\right) = 2i$$

Ejercicios propuestos.

1. Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series:

$a)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ $\qquad b)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$ $\qquad c)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$d)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n}$ $\qquad e)$ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$ $\qquad f)$ $\sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$

$g)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n$ $\qquad h)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi i}{n} z^n$ $\qquad i)$ $\sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n z^n$

Solución: (1a) e; (1b) 2; (1c) ∞; (1d) 3; (1e) 1; (1f) 1; (1g) ∞; (1h) 1; (1i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Desarrollar las siguientes funciones en serie de Taylor y hallar el radio de convergencia de la serie obtenida:
   a. $f(z) = \sin(2z+1)$ según potencias de $z+1$.
   b. $f(z) = \cos z$ según potencias de $z + \frac{\pi}{4}$.
   c. $f(z) = \frac{1}{3z+1}$ según potencias de $z+2$.
   d. $f(z) = \frac{z}{z^2+i}$ según potencias de z.
   e. $f(z) = \sin^2 \frac{z}{2}$ según potencias de z.

Solución: (2a) $f(z) = -\sin 1 + 2(z+1)\cos 1 + \frac{2^2}{2!}(z+1)^2 \sin 1 - \frac{2^3}{3!}(z+1)^3 \cos 1 - \ldots$ y $R = \infty$.
(2b) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(z+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3 + \ldots\right]$ y $R = \infty$.
(2c) $f(z) = -\frac{1}{5}\left[1 + \frac{3}{5}(z+2) + \frac{3^2}{5^2}(z+2)^2 + \frac{3^3}{5^3}(z+2)^3 + \ldots\right]$ y $R = \frac{5}{3}$.
(2d) $f(z) = -iz + z^3 + iz^5 - z^7 - \ldots$ y $R = 1$.
(2e) $f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots\right)$ y $R = \infty$.

3. Hallar los ceros de las siguientes funciones y determinar sus órdenes:

$$a)\ z^4 + 4z^2 \qquad b)\ \frac{\sin z}{z} \qquad c)\ z^2 \sin z \qquad d)\ 1 + Chz$$

Solución: (3a) $z_1 = 0$ de 2^o orden; $z_2 = 2i$ y $z_3 = -2i$ ambos simples.
(3b) $z_n = \pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) todos simples.
(3c) $z = 0$ de 3^{er} orden; $z_n = \pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) todos simples.
(3d) $z_n = (2n+1)\pi i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) todos de 2^o orden.

4. Determinar la región de convergencia de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(iz)^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$$
$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n} \qquad d)\ \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Solución: (4a) $|z| > e$; (4b) $2 < |z| < 4$; (4c) $1 < |z| < 2$; (4d) $0 < |z| < 1$.

5. Desarrollar en serie de Laurent en un entorno de $z = 0$:

$$a)\ \frac{\sin z}{z^2} \qquad b)\ \frac{e^z}{z^3} \qquad c)\ z^4 \cos \frac{1}{z} \qquad d)\ \frac{1-e^{-z}}{z^3}$$

Solución: (5a) $\frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \ldots$
(5b) $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \ldots$
(5c) $z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!z^2} + \ldots$
(5d) $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} - \frac{z}{4!} + \ldots$

6. Desarrollar en serie de Laurent en un entorno de $z = 0$ la función

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

Solución: En $|z| < 1$: $f(z) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{17}{16}z^3 - \ldots$
En $1 < |z| < 2$: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$
En $|z| > 2$: $f(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \ldots$

7. Desarrollar las siguientes funciones en serie de Laurent en la región considerada:

a) $\frac{1}{z^2+z}$ en $0 < |z| < 1$ *b)* $\frac{1}{z^2+z}$ en $1 < |z| < \infty$

c) $\frac{2z+3}{z^2+3z+2}$ en $1 < |z| < 2$ *d)* $\frac{1}{(z^2-4)^2}$ en $4 < |z+2| < \infty$

Solución: (7a) $\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$; (7b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+2}}$; (7c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$; (7d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$

8. Representar $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ por:
8.1 Su serie de McLaurin, describiendo la región de validez de tal representación.
8.2 Su serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < \infty$.

Solución: (8a) $1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, en $|z| < 1$; (8b) $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$.