Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final Febrero. Curso 2016/2017
(25/01/2017)
ENUNCIADO

CUESTIONES: [0.5 puntos cada una] Responder, de forma razonada, a las siguientes cuestiones:

C1.- Determinar el conjunto de puntos del plano complejo que verifica la ecuación

$$|z-2i|+|z+2i| = 5$$

C2.- Sea $f(z)$ una función analítica y tal que $\operatorname{Re}(f) = cte.$ Probar que $f(z)$ es constante.

C3.- Calcular el valor de

$$\int_{|z|=1} (z^{-2}+z^{-1}+z+z^2)dz$$

C4.- Dado el campo de fuerzas

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (y^3+1)\vec{i} + (3xy^2+1)\vec{j},$$

a) Hallar el trabajo realizado al mover un objeto desde el punto $(0,0)$ al punto $(2,0)$ a lo largo de la semicircunferencia $(x-1)^2+y^2 = 1$, con $y \geq 0$.

b) Hallar el trabajo realizado al moverse este objeto a lo largo de la circunferencia completa.

C5.- Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie dada por la parametrización

$$\Phi(u,v) = (u,v,2\sqrt{uv})$$

en el punto $(u,v) = (1,4)$.

PROBLEMA 1 (2 puntos): Hallar un adecuado desarrollo para la función

$$f(z) = \frac{2}{z^2-4z+3}$$

que sea válido en cada una de las siguientes regiones:

$a)$ $|z| < 1$ $\quad b)$ $1 < |z| < 3$ $\quad c)$ $|z| > 3$ $\quad d)$ $0 < |z-1| < 2$

PROBLEMA 2 (2 puntos): Calcular, utilizando técnicas de integración compleja,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)}$$

Indicación: Si $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, donde P y Q son polinomios de grado n y m respectivamente, con $Q_m(x) \neq 0$ y $m \geq n+2$, se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f,z_i)$$

siendo z_i $(i = 1,\ldots,n)$ los polos de f situados en el semiplano superior.

PROBLEMA 3 (2.5 puntos): Dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = 6xy\,\vec{i} + 7z\,\vec{j} + 8y\,\vec{k}$$

calcular

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

siendo S la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4.$ Hacerlo directamente y por el teorema de Stokes.

PROBLEMA 4 (1 punto): Dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x^2 - e^y \arctan(z))\,\vec{i} + (x+y)^2\vec{j} - 2(yz + x^{10})\,\vec{k}$$

calcular el flujo a través de $S,$ siendo S la superficie de la región, en el primer octante, acotada por $z = 1 - x^2,$ $z = 0,$ $z = 2 - y,$ $y = 0.$

Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final Febrero. Curso 2016/2017
(25/01/2017)
SOLUCIÓN

CUESTIONES:

C1.- Determinar el conjunto de puntos del plano complejo que verifica la ecuación

$$|z - 2i| + |z + 2i| = 5$$

Solución: Se tiene que

$$|z - 2i| + |z + 2i| = 5 \Leftrightarrow |x + (y-2)i| + |x + (y+2)i| = 5$$

es decir

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 5$$

por lo que

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 5 - \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

Si elevamos al cuadrado

$$x^2 + (y-2)^2 = 25 - 10\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + x^2 + (y+2)^2$$

Operando de nuevo (aislando la raiz y volviendo a elevar al cuadrado) se llega a

$$100x^2 + 36y^2 = 225$$

es decir, se trata del conjunto de puntos de la elipse con centro el origen y semiejes $a = \frac{15}{10}$ y $b = \frac{15}{6}$.

C2.- Sea $f(z)$ **una función analítica y tal que** $\mathrm{Re}(f) = cte.$ **Probar que** $f(z)$ **es constante.**

Solución: Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es tal que $\mathrm{Re}(f) = u(x,y) = k_1$ (cte), se tendrá que, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

De la primera igualdad, resulta que

$$v(x,y) = \int 0dx + g(y) = g(y)$$

y si sustituimos en la segunda,

$$0 = \frac{\partial v}{\partial y} = g'(y)$$

por lo que $g(y) = k_2$ (cte).

Por todo lo anterior, tendremos que

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = k_1 + ik_2$$

por lo que efectivamente f es constante.

C3.- Calcular el valor de

$$\int_{|z|=1} (z^{-2} + z^{-1} + z + z^2)dz$$

Solución: Si se aplica el teorema de los residuos, como el único punto singular es $z_0 = 0$, tendríamos que

$$\int_{|z|=1} (z^{-2} + z^{-1} + z + z^2)dz = 2\pi i Res(f,0) = 2\pi i$$

ya que $Res(f,0) = 1$ (notemos que la función ya viene expresada como potencias de z y que el coeficiente del término $\frac{1}{z}$ es 1).

C4.- Dado el campo de fuerzas

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (y^3+1)\vec{i} + (3xy^2+1)\vec{j},$$

a) **Hallar el trabajo realizado al mover un objeto desde el punto** $(0,0)$ **al punto** $(2,0)$ **a lo largo de la semicircunferencia** $(x-1)^2 + y^2 = 1,$ **con** $y \geq 0.$

b) Hallar el trabajo realizado al moverse este objeto a lo largo de la circunferencia completa.

Solución: Como la integral de línea es independiente del camino de integración (al ser $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$), tendremos que en el apartado (b) el trabajo será nulo (se trata de un camino cerrado), mientras que para calcular el apartado (a), será más sencillo tomar la recta que une el punto $(0,0)$ con el punto $(2,0)$, es decir, el eje OX. Por ello, y al ser $\gamma(t) = (t,0)$, con $0 \leq t \leq 2$, se verificará

$$\int_\gamma \left\{(y^3+1)\,dx + (3xy^2+1)\,dy\right\} = \int_0^2 dt = 2$$

C5.- Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie dada por la parametrización

$$\Phi(u,v) = (u,v,2\sqrt{uv}\,)$$

en el punto $(u,v) = (1,4)$.

Solución: La ecuación pedida viene dada por

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\bullet\vec{\mathbf{n}} = 0$$

con $(x_0,y_0,z_0) = \left(1,4,2\sqrt{1\cdot 4}\,\right) = (1,4,4)$ y

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\partial\Phi}{\partial u}(1,4)\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}(1,4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-2,-\frac{1}{2},1\right)$$

de manera que será

$$(x-1,y-4,z-4)\bullet\left(-2,\frac{1}{2},1\right) = 0$$

es decir

$$-4x-y+2z = 0$$

Otra forma de obtener este plano es: Como el vector normal es el $\left(-2,-\frac{1}{2},1\right)$, el plano será de la forma

$$-2x-\frac{1}{2}y+z+D = 0$$

y se puede determinar D sin más que exigir que este plano pase por el punto $(1,4,4)$, por lo que

$$-2-\frac{1}{2}4+4+D = 0 \Rightarrow D = 0$$

resultando entonces que la ecuación del plano será

$$-2x-\frac{1}{2}y+z = 0$$

– – – – – – – – – – – – – – – – –

PROBLEMA 1: **Hallar un adecuado desarrollo para la función**

$$f(z) = \frac{2}{z^2-4z+3}$$

que sea válido en cada una de las siguientes regiones:

$a)\ |z| < 1 \qquad b)\ 1 < |z| < 3 \qquad c)\ |z| > 3 \qquad d)\ 0 < |z-1| < 2$

Solución: Si descomponemos en fracciones simples, tendremos

$$f(z) = \frac{2}{z^2-4z+3} = \frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-3}$$

En los tres primeros apartados se trata de desarrollar estas fracciones como potencias de z, mientras que en el caso (d) hay que desarrollarlas como potencias de $z-1$:

(a) Nos vamos a basar en el conocido desarrollo

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

válido si $|z| < 1$. Por tanto, y como se verifica que

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \ldots\right)$$

que es válido si $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$ (es decir, si $|z| < 3$, y por tanto válido si $|z| < 1$), tendremos que si $|z| < 1$, entonces

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-3} = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \ldots\right)$$

es decir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n \qquad (|z| < 1)$$

(b) Para $1 < |z| < 3$ es válido el desarrollo anterior de $\frac{1}{z-3}$ (al ser su círculo de convergencia $|z| < 3$), mientras que hemos de cambiar el de $\frac{-1}{z-1}$ (ya que éste solo es válido si $|z| < 1$). Entonces, tendremos que

$$\frac{-1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots\right)$$

con círculo de convergencia $|\frac{1}{z}| < 1$, es decir, $1 < |z|$. De esta forma

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots\right) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \ldots\right)$$

o lo que es lo mismo

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \qquad (1 < |z| < 3)$$

(c) Para $|z| > 3$, será válido el desarrollo realizado en (b) para $\frac{-1}{z-1}$ pero hemos de cambiar el de $\frac{1}{z-3}$ (al ser éste válido si $|z| < 3$):

Se tiene que

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{3}{z} + \left(\frac{3}{z}\right)^2 + \ldots\right)$$

con disco de convergencia $|\frac{3}{z}| < 1$, es decir, $3 < |z|$. De esta forma

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots\right) + \frac{1}{z}\left(1 + \frac{3}{z} + \left(\frac{3}{z}\right)^2 + \ldots\right)$$

por lo que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n - 1}{z^{n+1}} \qquad (|z| > 3)$$

(d) La primera de las fracciones ($\frac{-1}{z-1}$) ya está expresada como potencias de $z-1$. Veamos entonces como expresar la segunda. Para ello haremos

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-1-2} = \frac{-1}{2-(z-1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \ldots\right)$$

válido si $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, es decir, si $|z-1| < 2$. Así

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \ldots\right)$$

es decir

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n \qquad (|z-1| < 2)$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – –

PROBLEMA 2: **Calcular**, **utilizando técnicas de integración compleja**,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)}$$

Indicación: **Si** $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, **donde** P **y** Q **son polinomios de grado** n **y** m **respectivamente**, **con** $Q_m(x) \neq 0$ **y** $m \geq n+2$, **se verifica que**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i)$$

siendo z_i $(i = 1,\ldots,n)$ **los polos de** f **situados en el semiplano superior**.

Solución: Puesto que la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+9)}$$

tiene por puntos singulares aislados $z_{1,2} = \pm i$ (polos dobles) y $z_{3,4} = \pm 3i$ (polos simples), según la indicación, y puesto que el integrando es una función par, tendremos

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \frac{1}{2}2\pi i(Res(f,i) + Res(f,3i))$$

(los dos únicos polos que están en el semiplano superior son i y $3i$).

Al ser

$$Res(f,3i) = \frac{P(3i)}{Q'(3i)} = \ldots = \frac{-i}{384}$$

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)^2 f(z)\right]' = \ldots = \frac{-3i}{128}$$

se tendrá que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \pi i\left(\frac{-i}{384} + \frac{-3i}{128}\right) = \frac{5\pi}{192}$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – –

PROBLEMA 3: **Dado el campo vectorial**

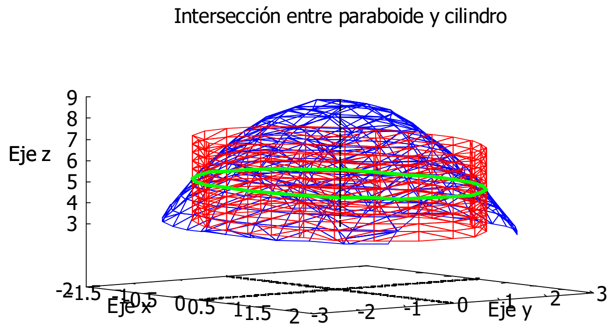
$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = 6xy\,\vec{i} + 7z\,\vec{j} + 8y\,\vec{k}$$

calcular

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

siendo S **la porción del paraboloide** $z = 9 - x^2 - y^2$ **dentro del cilindro** $x^2 + y^2 = 4$. **Hacerlo directamente y por el teorema de Stokes**.

Solución: La gráfica de la figura viene dada por



(Representación realizada con wxMaxima:

```
load(draw);
draw3d(color=blue,line_width=1, implicit(x^2+y^2+z=9,x,-2,2,y,-3,3,z,3,9),
color=red,line_width=1, implicit(x^2+y^2=4,x,-2,2,y,-3,3,z,3,7),
color=green,line_width=3.5, parametric(2*cos(t),2*sin(t),5,t,0,2*%pi),
xlabel="Eje x",ylabel="Eje y",zlabel="Eje z", xaxis=true,yaxis=true,zaxis=true,
title="Intersección entre paraboide y cilindro");
```

Si aplicamos el teorema de Stokes, tendremos que

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{dr} = \oint_\gamma \left\{6xy\, dx + 7z\, dy + 8y\, dz\right\}$$

siendo γ la curva intersección de ambas superficies, y que es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ situada en el plano $z = 5$. Por tanto, tomaremos como parametrización $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 5)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. De esta forma

$$\oint_\gamma \left\{6xy\, dx + 7z\, dy + 8y\, dz\right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (6 \cdot 2\cos t \cdot 2\sin t \cdot (-2\sin t)dt + 7 \cdot 5 \cdot 2\cos t dt + 8 \cdot 2\sin t \cdot 0dt) = \ldots = 0$$

Si lo hacemos directamente, tendremos

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xy & 7z & 8y \end{vmatrix} = (1, 0, -6x)$$

y como

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; \qquad dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy$$

se verifica

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D -4xdxdy = -4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \cos\theta dr = \ldots = 0$$

(notemos que $D : x^2 + y^2 \leq 4$).

– – – – – – – – – – – – – – – – – –

PROBLEMA 4: **Dado el campo vectorial**

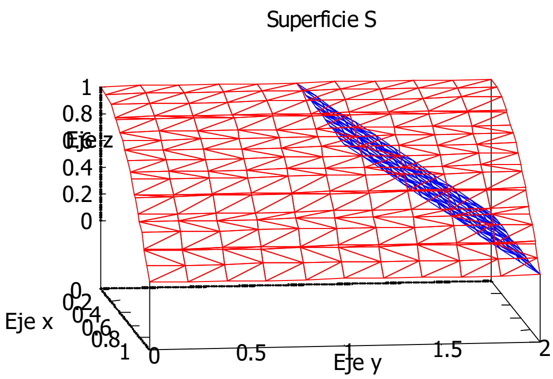
$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x^2 - e^y \arctan(z))\vec{i} + (x+y)^2\vec{j} - 2(yz + x^{10})\vec{k}$$

calcular el flujo a través de S, **siendo** S **la superficie de la región, en el primer octante, acotada por** $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $z = 2 - y$, $y = 0$.

Solución: Se trata de calcular

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

siendo S la superficie cerrada representada por



(Representación realizada con wxMaxima:
load(draw);
draw3d(color=blue,line_width=1,implicit(z=2-y,x,0,1,y,0,2,z,0,1),
color=red,line_width=1,implicit(z=1-x^2,x,0,1,y,0,2,z,0,1),
xlabel="Eje x",ylabel="Eje y",zlabel="Eje z",xaxis=true,yaxis=true,zaxis=true,
title="Superficie S");

Al tratarse de una superficie cerrada, ya que está limitada por los tres planos coordenados y por arriba por el cilindro $z = 1 - x^2$ (en rojo en la figura) o por el plano $z = 2 - y$ (azul), lo haremos mediante el teorema de la divergencia. De esta forma

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dxdydz = \iiint_V 4x\,dxdydz$$

Esta integral triple la haremos directamente en coordenadas cartesianas, teniendo en cuenta que la base de nuestro sólido (ver gráfica) está formada por un rectángulo dado por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, pero dentro de este rectángulo, la variable z no varía igual, ya que si $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, entonces $0 \le z \le 1 - x^2$; mientras que si $0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2$, entonces $0 \le z \le 2 - y$.

Por todo esto

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iiint\limits_V 4xdxdydz = \iiint\limits_{V_1} 4xdxdydz + \iiint\limits_{V_2} 4xdxdydz =$$

$$= 4\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{1-x^2} xdz + 4\int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_0^{2-y} xdz = 1 + 1 = 2$$