Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final SEPTIEMBRE 2016
(03/09/2016)
ENUNCIADO Y RESUELTO

PROBLEMA 1: [**1.5 puntos**] **Calcular el valor de la integral del campo**

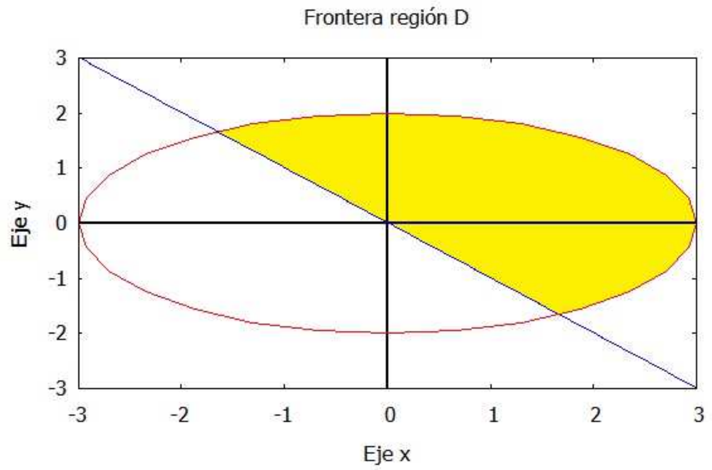
$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (y, -x + \sin y)$$

a lo largo de la frontera (**orientada negativamente**) **del conjunto**

$$D = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ y \geq -x\right\}$$

SOLUCIÓN:

La frontera es la curva que delimita a la región amarilla de la siguiente gráfica, la cual recorreremos, como suele ser habitual, en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj), y con posterioridad le cambiaremos el signo al resultado de la integral, ya que, en este caso nos piden que la frontera está orientada negativamente:



Con wxMaxima:

$load(draw);$
$draw2d(color = blue, line\_width = 1, implicit(x = -y, x, -3, 3, y, -3, 3),$
$color = red, line\_width = 1, parametric(3 * cos(t), 2 * sin(t), t, 0, 2 * \%pi),$
$xlabel = "Ejex", ylabel = "Ejey", xaxis = true, yaxis = true, title = "FronteraregiónD");$

Se trata de calcular

$$\oint_{\gamma} \{y dx + (-x + \sin y) dy\}$$

a lo largo de una curva cerrada $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, siendo γ_1 el trozo de elipse y γ_2 el segmento de recta $y = -x$.

Puesto que la curva es cerrada, podemos resolver esta integral de línea usando el teorema de Green en el plano, de manera que

$$\oint_{\gamma}\{ydx+(-x+\sin y)dy\} = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D(-1-1)dxdy =$$

$$= -2\iint_D dxdy = -2Area(D) = -2\frac{\acute{A}rea\ elipse}{2} = -2\frac{2\cdot 3\cdot \pi}{2} = -6\pi$$

De esta forma, el valor de la integral cuando la curva se recorre en sentido negativo será 6π.

OTRA FORMA: Como siempre, tambíen podríamos resolver este ejercicio de forma directa, usando que

$$\oint_{\gamma} = \int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}$$

donde cada una de estas dos integrales de línea las calcularemos a partir de considerar las respectivas parametrizaciones para cada uno de los dos caminos considerados:

$$\gamma_1(t) = (3\cos t, 2\sin t) \text{ con } -\frac{\pi}{4}\leq t\leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\gamma_2(t) = (t,-t) \text{ con } -\frac{6}{\sqrt{13}}\leq t\leq \frac{6}{\sqrt{13}}$$

(Notemos que donde finaliza γ_1 comienza γ_2; y donde finaliza γ_2 comienza γ_1).

Así

$$\int_{\gamma_1}\{ydx+(-x+\sin y)dy\} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(2\sin t(-3\sin t))dt+(-3\cos t+\sin(2\sin t))2\cos tdt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}((-6\sin^2 t-6\cos^2 t)+\sin(2\sin t)2\cos t)dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}-6dt+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin(2\sin t)2\cos tdt =$$

$$= [-6t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+[-\sin(2\sin t)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} =\ldots= -6\pi$$

De igual forma

$$\int_{\gamma_2}\{ydx+(-x+\sin y)dy\} = \int_{-\frac{6}{\sqrt{13}}}^{\frac{6}{\sqrt{13}}}(-t)dt+(-t-\sin t)(-dt) = \int_{-\frac{6}{\sqrt{13}}}^{\frac{6}{\sqrt{13}}}\sin tdt =\ldots= 0$$

Por lo tanto

$$\oint_{\gamma}\{ydx+(-x+\sin y)dy\} = \int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2} = -6\pi+0 = -6\pi$$

— —

PROBLEMA 2: [**0.5 puntos**] **Sea $\vec{F}$ el campo vectorial dado por**

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(1,\ h(x)+z-2x,\ y\big)$$

con $h(x)$ función de clase $C^{(1)}(\mathbb{R})$ y tal que $\vec{F}(1,1,1) = (1,2,1)$. Hallar $h(x)$ para que la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de una curva γ desde un punto A a un punto B no dependa de γ.

SOLUCIÓN:

Sabemos que hay independencia del camino de integración siempre que el campo $\vec{F}$ sea conservativo, es decir, siempre que $\overrightarrow{rot\mathbf{F}} = \vec{0}$. Por ello, si exigimos esta condición, tendremos

$$\vec{0} = \overrightarrow{rot\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & h(x)+z-2x & y \end{vmatrix} = (0, 0, h'(x)-2)$$

por lo que habrá de ser

$$h'(x) = 2 \Rightarrow h(x) = 2x + cte$$

De esta forma

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(1,\ 2x + cte + z - 2x,\ y\big) = \big(1,\ cte + z,\ y\big)$$

y sólo hemos de determinar la constante cte exigiendo que se cumpla la condición inicial dada en el enunciado. De $\vec{F}(1,1,1) = (1,2,1)$, resulta que

$$(1,2,1) = \vec{F}(1,1,1) = \big(1,\ cte+1,\ 1\big)$$

por lo que $cte = 1$.

En definitiva,

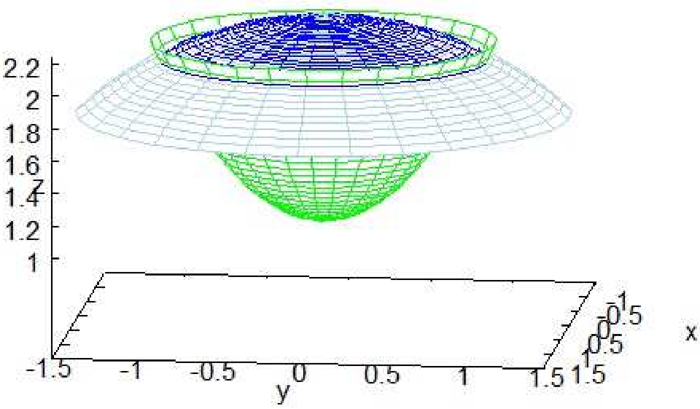
$$h(x) = 2x + 1$$

PROBLEMA 3: [**2 puntos**] **Siendo** $\vec{F}(x,y,z) = \big(xz,\ yz,\ z^2\big)$, **calcular el flujo de** $\vec{F}$ **a través de la superficie abierta de ecuación**

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

con $z \geq 1 + x^2 + y^2$, **indicando gráficamente la orientación que se ha ha elegido para la superficie**.

Nota: **En el siguiente gráfico podemos ver en azul la parte de la esfera sobre la que calculamos el flujo (con normal hacia "arriba"), en celeste se ve parte de la continuación de la esfera, y en verde el paraboloide que sólo interviene para "recortar" la superficie**.



SOLUCIÓN:

La forma más sencilla de resolver este ejercicio es calculando del flujo de manera directa (con la normal hacia arriba), ya que al ser la ecuación de S la dada en forma implícita por $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, se tendrá

$$\overrightarrow{\mathbf{n}_S} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}$$

$$dS = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dxdy$$

de manera que

$$\Phi_S = \iint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}_S} dS = \ldots = \iint_D 5dxdy = 5Área(D) = 5\pi$$

puesto que la región D, que es la proyección en el plano OXY de la superficie considerada (que es el trozo de esfera que intersecta el paraboloide) viene dada por

$$D = \left\{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

(sólo hemos de calcular la intersección de la esfera y del paraboloide, obteniendo que la misma es la circunferencia unidad, aunque situada en el plano $z = 2$).

OTRA FORMA: No obstante, y como podemos considerar que el trozo de esfera que consideramos es una cara de una superficie cerrada (la formada por el trozo de esfera y el paraboloide), también podríamos calcular este flujo aplicando el teorema de la divergencia:

Para ello, consideraremos la superficie cerrada S' formada por la propia superficie esférica S unida a la superficie parabólica S_0 (la que aparece en verde en el gráfico), de manera que al ser

$$S' = S \cup S_0$$

tendremos que

$$\Phi_{S'} = \Phi_S + \Phi_{S_0} \Rightarrow \Phi_S = \Phi_{S'} - \Phi_{S_0}$$

donde $\Phi_{S'}$ puede calcularse por el teorema de la divergencia y Φ_{S_0} puede obtenerse de forma directa.

Sin embargo, y para calcular este último flujo Φ_{S_0} de forma directa, será más sencillo considerar como superficie S_0, en lugar del paraboloide dado por el enunciado, el plano $z = 2$ (ya que la intersección de la esfera y el paraboloide es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, pero situada en el plano $z = 2$), de manera que la superficie cerrada S' que consideraremos estará formada por el trozo de esfera (S) y por la tapa inferior que nos da el plano $z = 2$ (que será a lo que denotaremos por S_0).

Entonces

$$\Phi_{S'} = \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{F}\right) dxdydz = \iiint_V (z + z + 2z) dxdydz = 4 \iiint_V zdxdydz =$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_2^{\sqrt{5-r^2}} zdz = \ldots = \pi$$

donde esta integral triple la hemos calculado mediante un cambio a coordenadas cilíndricas (la variable z varía desde el plano a la esfera)

Además, para la superficie S_0 se tiene que

$$\overrightarrow{\mathbf{n}_{S_0}} = (0,0,-1) \text{ (exterior)}; \qquad dS_0 = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\, dxdy = dxdy$$

por lo que

$$\Phi_{S_0} = \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}_{S_0}} dS_0 = \ldots = \iint_D -4dxdy = -4\acute{A}rea(D) = -4\pi$$

En definitiva,

$$\Phi_S = \Phi_{S'} - \Phi_{S_0} = \pi - (-4\pi) = 5\pi$$

– –

PROBLEMA 4: [**0.5 puntos cada apartado**] **Calcular el desarrollo de Laurent alrededor de** $z_0 = 0$ de la función

$$f(z) = \frac{2z^2+2z+5}{(z-1)^2(z+2)}$$

en cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z| < 1\}$.
b) $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$.
c) $\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 2\}$.
d) $\Omega_4 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 2\}$.

SOLUCIÓN:

Antes de comenzar a establecer los correspondientes desarrollos, hemos de tener en cuenta que se ha de descomponer $f(z)$ en fracciones simples. De esta forma, si se supone

$$f(z) = \frac{2z^2+2z+5}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z+2)}$$

y calculamos los coeficientes, se llega a

$$f(z) = \frac{2z^2+2z+5}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{(z-1)} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z+2)}$$

A continuación vamos a establecer los desarrollos (como potencias de z) para cada una de estas 3 fracciones, indicando el dominio de validez de cada uno de ellos:

Para las dos primeras fracciones, que no están definidas en $z = 1$, hemos de distinguir (ya que así será preciso para hallar los desarrollos en los apartados que nos piden), que $0 < |z| < 1$ o que $|z| > 1$, mientras que para la última fracción (que no está definida en $z = -2$) consideraremos los casos $0 < |z| < 2$ y $|z| > 2$. Por tanto

$$\frac{1}{z-1} = \begin{cases} (\text{Si } |z| < 1) = \frac{-1}{1-z} = -(1+z+z^2+\ldots) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ \\ (\text{Si } |\frac{1}{z}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1} \end{cases}$$

Para

$$\frac{1}{z+2} = \begin{cases} (\text{Si } \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \iff |z| < 2) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z/2} = \frac{1}{2}\left(1 - z/2 + (z/2)^2 - \ldots\right) = \\ \qquad = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n \\ \\ (\text{Si } |\frac{2}{z}| < 1 \iff |z| > 2) = \frac{1}{z}\frac{1}{1+2/z} = \frac{1}{z}\left(1 - 2/z + (2/z)^2 - \ldots\right) = \\ \qquad = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{2}{z})^n \end{cases}$$

en definitiva

$$\frac{1}{z+2} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}z^n \ (\text{Si } |z| < 2) \\ \\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n\frac{1}{z^{n+1}} \ (\text{Si } |z| > 2) \end{cases}$$

El desarrollo para $\frac{3}{(z-1)^2}$ lo calculamos teniendo en cuenta que

$$\frac{3}{(z-1)^2} = 3\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

por lo que

$$3\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) == \begin{cases} (\text{Si } |z| < 1) = 3\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right) = 3\left(\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}\right) = \\ \qquad = 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \\ \\ (\text{Si } |\frac{1}{z}| < 1) = -3\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right) = -3\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1}\right) = \\ \qquad = -3\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}\right) = 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{-n-2} \end{cases}$$

en definitiva, que

$$\frac{3}{(z-1)^2} = \begin{cases} 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \ (\text{Si } |z| < 1) \\ \\ 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\frac{1}{z})^{n+2} \ (\text{Si } |\frac{1}{z}| < 1) \end{cases}$$

Y ahora solo tendremos que "casar" los desarrollos, según sea la región considerada:

(a) Como en Ω_1 se tiene que $|z| < 1$, será

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z+2)} =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}z^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}z^n$$

(b) Como en Ω_2 se tiene que $1 < |z| < 2$, será

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z+2)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{z}\right)^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} z^n$$

(d) Como en Ω_4 se tiene que $|z| > 2$, será

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z+2)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{z}\right)^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n \frac{1}{z^{n+1}}$$

Nota: En el apartado (c) es imposible de dar el desarrollo, puesto que en Ω_3 la función no es analítica (ya que contiene al punto singular $z = 1$).

– –

PROBLEMA 5: [**0.5 + 1.25 puntos**] **Consideremos la función**

$$g(z) = \frac{1 - \cos(\frac{1}{z})}{(2\pi z - 1)^3}$$

Se pide:

a) Clasificar la singularidad $z_0 = \frac{1}{2\pi}$.

b) Utilizar la fórmula integral de Cauchy para determinar el valor de la integral

$$\int_{|z-z_0|=R} g(z)dz$$

justificando de forma razonada porqué se puede aplicar esta fórmula, **distinguiendo los distintos valores de** $R < z_0$.

SOLUCIÓN:

(a) Trivialmente se verifica que $z_0 = \frac{1}{2\pi}$ anula 3 veces al denominador, pero también anula al numerador; y, en concreto, lo anula 2 veces:

Esta afirmación puede probarse si observamos que se verifica

$$\text{Si } f(z) = 1 - \cos\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(z) = \left(\frac{-1}{z^2}\right)\sin\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(z) = \ldots \Rightarrow f''(0) \neq 0$$

(Nota: Hemos usado el resultado visto en Teoría que afirma: z_0 es un **cero de orden** n de una función analítica $f(z)$ si se verifican

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \text{ y } f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Cuando $n = 1$ se dice que z_0 es un cero **simple**)

Esto quiere decir, que $z_0 = \frac{1}{2\pi}$ es un polo simple para $g(z)$.

OTRA FORMA: Aplicando la regla de L'Hôpital, podemos comprobar que, efectivamente se cumple que

$$\lim_{z \to \frac{1}{2\pi}} g(z) = \infty; \qquad \text{mientras que} \qquad \lim_{z \to \frac{1}{2\pi}} \left(z - \frac{1}{2\pi}\right) g(z) = \ldots = -\pi \neq 0$$

lo que nos asegura que $\frac{1}{2\pi}$ es polo simple.

(b) La segunda de las fórmulas integrales de Cauchy nos asegura que: Si f es analítica sobre una curva simple cerrada y regular a trozos γ y en todos los puntos de su interior, y si z_0 es cualquier punto interior a γ, se verifica

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

o lo que es lo mismo

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

De esta forma, y puesto que la integral del enunciado puede ponerse en la forma (buscamos una forma similar a la de la fórmula anterior)

$$\int_{|z - \frac{1}{2\pi}| = R} \frac{1 - \cos(\frac{1}{z})}{(2\pi z - 1)^3} dz = \int_{|z - \frac{1}{2\pi}| = R} \frac{1 - \cos(\frac{1}{z})}{(2\pi)^3 \left(z - \frac{1}{2\pi}\right)^3} dz = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|z - \frac{1}{2\pi}| = R} \frac{1 - \cos(\frac{1}{z})}{\left(z - \frac{1}{2\pi}\right)^3} dz$$

se tendrá que si $R < \frac{1}{2\pi}$, la función del numerador $f(z) = 1 - \cos(\frac{1}{z})$ es analítica en cualquier curva simple cerrada y regular a trozos y en todos los puntos de su interior (ya que si $R < \frac{1}{2\pi}$ entonces cualquier γ cumpliendo lo anterior, no contiene al 0, que es el punto donde $f(z)$ deja de ser analítica), por lo que aplicando la fórmula de Cauchy

$$\int_{|z - \frac{1}{2\pi}| = R} \frac{1 - \cos(\frac{1}{z})}{(2\pi z - 1)^3} dz = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|z - \frac{1}{2\pi}| = R} \frac{1 - \cos(\frac{1}{z})}{\left(z - \frac{1}{2\pi}\right)^3} dz = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \ldots = 2\pi^2 i$$

Por otro lado, si $R = \frac{1}{2\pi}$, la integral no puede calcularse al no cumplirse las condiciones (la curva por donde queremos calcular la integral pasa por el punto $z = 0$ en el que la función no es analítica).

– –

PROBLEMA 6: **[1.25 puntos] Calcular, mediante el teorema de los residuos, y según valor de $r > 0$ la siguiente integral, justificando de forma razonada porqué se puede aplicar dicho teorema**:

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2(z - 4)} dz, \text{ siendo } \gamma(t) = 1 + re^{it}, \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

.

SOLUCIÓN:

El integrando tiene por puntos singulares aislados $z_1 = 0$, que es un polo simple (anula una vez al numerador y dos veces al denominador) y $z_2 = 4,$ que también es polo simple. Puesto que $\gamma(t) = 1 + re^{it}$ es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio $r,$ tendremos que

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2(z-4)} dz = \begin{cases} 0, \text{ si } r < 1 \\ 2\pi i \operatorname{Res} f(0), \text{ si } 1 < r < 3 \\ 2\pi i \big(\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(4)\big), \text{ si } r > 3 \end{cases}$$

siendo

$$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z\to 0}(z-0)\frac{e^z-1}{z^2(z-4)} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z(z-4)} =\ldots= -\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res} f(4) = \frac{P(4)}{Q'(4)} = \frac{e^4-1}{16}$$

(Nota: A pesar de ser polo simple, $\operatorname{Res} f(0)$ no se ha obtenido a través de $\operatorname{Res} f(0) = \frac{P(0)}{Q'(0)},$ ya que para poder aplicar esta fórmula ha de ser $Q'(0) \neq 0,$ lo que no ocurre en este caso; por tal motivo este residuo se ha obtenido usando $\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$).

— —

PROBLEMA 7: **[1 punto] Calcular, usando el teorema de los residuos**

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{3} - 2\cos t} dt$$

SOLUCIÓN: Haciendo el cambio $z = e^{it}$, sabemos que

$$\sin t = \frac{z^2-1}{2iz};\ \cos t = \frac{z^2+1}{2z};\ dt = \frac{dz}{iz}$$

Además, $x \in [0, 2\pi]$ equivale a $|z| = 1.$

De esta forma

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3} - 2\cos t} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{3} - 2\frac{z^2+1}{2z}} = \int_{|z|=1} \frac{z}{\sqrt{3}\,z - z^2 - 1}\frac{dz}{iz} =$$
$$= -\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{z^2 - \sqrt{3}\,z + 1} dz$$

El polinomio del denominador tiene por singularidades $z_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2}$, y el teorema de los residuos nos dice que el valor de la integral es $2\pi i\big(\sum \text{Residuos interiores a } |z| = 1\big)$. Por ello, comprobamos cuales de ambos puntos singulares son interiores a $|z| = 1$, para lo que calculamos el módulo de cada uno de ellos: Al ser

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

resulta que ambas singularidades están sobre $|z| = 1$, por lo que la integral real dada no puede calcularse utilizando el teorema de los residuos.