Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final JUNIO 2016
(25/06/2016)
ENUNCIADO Y RESUELTO

PROBLEMA 1: [**2 puntos**] **Calcular la circulación del campo**

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (xy, y-x, yz^2)$$

a lo largo de la curva intersección de $x^2+y^2+z^2 = 8$ **con** $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

SOLUCIÓN:

La curva intersección de ambas superficies viene dada por $x^2+y^2 = 4,$ siendo $z = 2$. De esta forma, se trata de calcular la integral de línea

$$\int_\gamma \{xy \cdot dx + +(y-z)dy + yz^2dz\}$$

siendo γ la curva dada por $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2),$ con $t \in [0,2\pi]$. Así, se trata de resolver la integral

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_\gamma \{xy \cdot dx + (y-x)dy + yz^2dz\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t \cdot 2\sin t \cdot (-2\sin t) + (2\sin t - 2\cos t)2\cos t + 2\sin t \cdot 4 \cdot 0)dt =$$

$$= 0 - 4\pi + 0 = -4\pi$$

Tambíen podríamos resolver este ejercicio usando el teorema de Stokes: Sabemos que

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_S \overrightarrow{rot\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_S dS$$

siendo S cualquier superficie que contenga a la curva γ. Así, podemos considerar S como el plano $z = 2,$ de manera que al ser $\vec{\mathbf{n}}_S = (0,0,1)$ y

$$\overrightarrow{rot\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y-x & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2, 0, -1-x)$$

$$dS = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dxdy = dxdy$$

se verificará que

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_S \overrightarrow{rot\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_S dS = -\iint_D (1+x)dxdy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (1+r\cos\theta)rdr = \ldots = -4\pi$$

PROBLEMA 2: [**2 puntos**] **Calcular**

$$\iint_S z\sqrt{1+4x^2+4y^2} \cdot dS$$

siendo S la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ limitada por los planos $z = 1$ y $z = 4$.

SOLUCIÓN:
Se trata de calcular una integral de superficie de un campo escalar

$$f(x,y,z) = z\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

que, como vamos a proyectar sobre el plano OXY (notemos que la proyección es el recinto plano $D = \left\{(x,y);\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$), sabemos que se calcula como una integral doble aplicando

$$\iint_S f(x,y,z) \cdot dS = \iint_D f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

es decir

$$\iint_S z\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \cdot dS = \iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)(1 + 4x^2 + 4y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2(1 + 4r^2) rdr = \ldots = \frac{183}{2}\pi$$

– –

PROBLEMA 3: [**0.5 puntos** + **0.25 puntos**] **Resolver en $\mathbb{C}$ las ecuaciones**

$$\cos(iz) + 3i\sin(iz) + 1 = 0$$

$$e^z = -1 - i$$

SOLUCIÓN:
(a) Si utilizamos las definiciones de $\cos z$ y $\sin z$, se tiene

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2};\ \sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i}$$

por lo que la ecuación a resolver será

$$\frac{e^{-z} + e^z}{2} + 3i\frac{e^{-z} - e^z}{2i} + 1 = 0$$

es decir

$$e^{-z} + e^z + 3(e^{-z} - e^z) + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2z} - e^z - 2 = 0$$

por lo que haciendo $t = e^z$, tendremos la ecuación $t^2 - t - 2 = 0$, que tiene por solución $t = \{2, -1\}$.

Por tanto, la solución de la ecuación vendrá dada por

$$z_1 = \log(2) = \log(2_0) = \log 2 + i \cdot 0\pi = \log 2$$

$$z_2 = \log(-1) = \log(1_\pi) = \log 1 + i\pi = i\pi$$

(donde en ambos casos se ha tomado el logaritmo principal).

(b) De forma inmediata se obtiene que

$$z = \log(-1 - i) = \log\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{5\pi}{4}} = \log\left(\sqrt{2}\right) + i\frac{5\pi}{4}$$

donde hemos considerado solamente el logaritmo principal.

— —

PROBLEMA 4: [**0.5 puntos + 0.75 puntos + 0.75 puntos**] **Determinar el desarrollo de Laurent de cada una de las siguientes funciones y clasificar el tipo de singularidad existente**

$$a)\, f(z) = e^z + e^{1/z^2} \text{ en } |z| > 0$$

$$b)\, g(z) = \frac{1}{z(z+R)} \text{ en } 0 < |z| < R$$

$$c)\, h(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} \text{ en } 0 < |z-1| < 2$$

SOLUCIÓN:

(a) Teniendo en cuenta el desarrollo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \text{ válido si } |z| < \infty$$

resulta que

$$e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z^2)^n}{n!}, \text{ válido si } |1/z^2| < \infty, \text{ es decir si } |z| > 0$$

Por tanto

$$f(z) = e^z + e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}} \text{ si } |z| > 0$$

(b) Como se verifica (descomponiendo en fracciones simples)

$$g(z) = \frac{1}{z(z+R)} = \frac{1/R}{z} - \frac{1/R}{z+R}$$

podemos expresar este desarrollo en términos de z sin más que poner

$$g(z) = \frac{1}{R}\frac{1}{z} - \frac{1}{R^2}\frac{1}{1+z/R} = \frac{1}{R}\frac{1}{z} - \frac{1}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{R}\right)^n$$

siendo este desarrollo válido siempre que $\left|\frac{z}{R}\right| < 1$ es decir, si $|z| < R$.

(c) En este caso se trata de expresar toda la función $h(z)$ como potencias de $(z-1)$. Veamos como podemos lograrlo:

Trivialmente tenemos

$$h(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{(z+1)^2}$$

por lo que sólo tenemos que expresar la 2da fracción como potencias de $(z-1)$. Para ello, y considerando que

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{1+z}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+z}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2+(z-1)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+\frac{(z-1)}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n\right)$$

siendo este desarrollo válido si $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$ es decir, si $|z-1| < 2$. Derivando término a término esta última serie, se tiene

$$h(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(z-1)^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-3}$$

– –

PROBLEMA 5: [**0.75 puntos** + **0.75 puntos** + **0.5 puntos**] **Calcular las siguientes integrales complejas en los recintos indicados**, **según valor de** $r > 0$:

a) $\int_\gamma z^5 \cos\frac{1}{z}dz,$ siendo $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\int_\gamma \frac{z+1}{z^2(z-(1+i))}dz,$ siendo $\gamma(t) = re^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\int_\gamma 2(\bar{z}-2)dz,$ siendo $\gamma(t) = 2 + re^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$

.

SOLUCIÓN:

(a) El integrando tiene por punto singular aislado $z = 0$, que es una singularidad esencial. Puesto que $\gamma(t) = 1 + re^{it}$ es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio r, tendremos que

$$\int_\gamma z^5 \cos\frac{1}{z}dz = \begin{cases} 0, \text{ si } r < 1 \\ 2\pi i \operatorname{Res} f(0) = 2\pi i\left(-\frac{1}{6!}\right), \text{ si } r > 1 \end{cases}$$

ya que el desarrollo de $f(z)$ es

$$z^5 \cos\frac{1}{z} = z^5\left(1 - \frac{(1/z)^2}{2!} + \frac{(1/z)^4}{4!} - \frac{(1/z)^6}{6!} + \ldots\right)$$

siendo $-\frac{1}{6!}$ el coeficiente del término $\frac{1}{z}$.

(b) El integrando tiene por puntos singulares aislados $z_1 = 0$, que es un polo doble y $z_2 = 1 + i$, que es polo simple. Puesto que $\gamma(t) = re^{it}$ es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r, tendremos que

$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^2(z-(1+i))}dz = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res} f(0) = 2\pi i\left(-\frac{2+i}{(1+i)^2}\right) = -(2+i)\pi, \text{ si } r < \sqrt{2} \\ 2\pi i\left(\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(1+i)\right) = 2\pi i\left(-\frac{2+i}{(1+i)^2} + \frac{1-2i}{2}\right) = 0, \text{ si } r > \sqrt{2} \end{cases}$$

siendo

$$\mathrm{Res}f(0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[(z-0)^2 \frac{z+1}{z^2(z-(1+i))} \right] = \ldots = -\frac{2+i}{(1+i)^2}$$

$$\mathrm{Res}f(1+i) = \frac{P(1+i)}{Q'(1+i)} = \frac{1+i+1}{(1+i)^2} = \frac{1-2i}{2}$$

(c) Al ser una función no analítica, la única forma de calcular esta integral es a través de la definición, tomando la parametrización dada. Así

$$\int_\gamma 2(\bar{z}-2)dz = \int_0^{2\pi} 2\left(\overline{2+re^{it}}-2\right)rie^{it}dt = \int_0^{2\pi} 2re^{-it}rie^{it}dt = 2ir^2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi r^2 i$$

siendo válido para cualquier valor de $r > 0$.

– –

PROBLEMA 6: [**1.25 puntos**] **Calcular, usando el teorema de los residuos**

$$\int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2+\cos x}dx$$

SOLUCIÓN: Haciendo el cambio $z = e^{ix}$, se tiene que

$$\sin x = \frac{z^2-1}{2iz};\ \cos x = \frac{z^2+1}{2z};\ dx = \frac{dz}{iz}$$

Además, $x \in [0,2\pi]$ equivale a $|z| = 1$. De esta forma

$$\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2+\cos x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2+\cos x}dx = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{1-\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2+\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz} =$$

$$\ldots = -\frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z^2+4z+1)}dz = -\frac{1}{2i}2\pi i\left(\mathrm{Res}f(0)+\mathrm{Res}f\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)$$

(hemos utilizado que como la función integrando es par, la integral en $[0,\pi]$ es la mitad de la integral en $[0,2\pi]$, además que $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; y que de las dos raíces de $z^2+4z+1 = 0$ sólo $-2+\sqrt{3}$ está en el interior de $|z| = 1$).

Por tanto, y al ser $z_1 = 0$ un polo doble y $z_2 = -2+\sqrt{3}$ un polo simple, se tiene

$$\mathrm{Res}f(0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[(z-0)^2 \frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z^2+4z+1)} \right] = \ldots = -4$$

$$\mathrm{Res}f\left(-2+\sqrt{3}\right) = \frac{P\left(-2+\sqrt{3}\right)}{Q'\left(-2+\sqrt{3}\right)} = \ldots = 3.4641$$

y así

$$\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2+\cos x}dx = 0.536\pi$$

– –