Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final Febrero. Curso 2015/2016
(19/01/2016)
ENUNCIADO Y RESUELTO

PROBLEMA 1: [1,5 puntos] Dado el campo

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \sin(yz)\,\vec{i} + xz\cos(yz)\,\vec{j} + (xy\cos(yz) + e^z)\,\vec{k}$$

se pide:

a) Determinar si $\vec{\mathbf{F}}$ es conservativo.

b) Encontrar una función potencial para $\vec{\mathbf{F}}$.

c) Calcular la integral $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$, siendo C una curva que une los puntos $(0,0,0)$ y $\left(2,\frac{1}{2},\pi\right)$.

d) Calcular $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$, siendo C la curva resultado de intersectar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el plano $y + z = 2$.

SOLUCIÓN:

(a) Puesto que

$$\overrightarrow{rot}\vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin(yz) & xz\cos(yz) & xy\cos(yz) + e^z \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

efectivamente el campo es conservativo.

(b) Queremos hallar $\Phi(x,y,z)$ tal que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sin(yz); \; \frac{\partial \Phi}{\partial y} = xz\cos(yz); \; \frac{\partial \Phi}{\partial z} = xy\cos(yz) + e^z$$

De la primera de las igualdades, se tiene que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sin(yz) \Rightarrow \Phi(x,y,z) = \int \sin(yz)dx = x\sin(yz) + cte = x\sin(yz) + g(y,z)$$

Usando la segunda de las igualdades, se tiene que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = xz\cos(yz) \Leftrightarrow x\cos(yz)z + \frac{\partial g}{\partial y} = xz\cos(yz)$$

por lo que

$$\frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y,z) = cte = h(z)$$

y

$$\Phi(x,y,z) = x\sin(yz) + h(z)$$

Y usando entonces la 3ra igualdad,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = xy\cos(yz) + e^z \Leftrightarrow x\cos(yz)y + h'(z) = xy\cos(yz) + e^z$$

de donde

$$h'(z) = e^z \Rightarrow h(z) = e^z + cte$$

Por todo lo anterior, la función potencial será

$$\Phi(x,y,z) = x\sin(yz) + e^z + cte$$

(c) Como existe función potencial, el valor de la integral será

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \Phi\left(2, \frac{1}{2}, \pi\right) - \Phi(0,0,0) = (2 + e^{\pi}) - 1 = 1 + e^{\pi}$$

(d) La intersección de la esfera y el plano es la elipse $x^2 + 2y^2 - 4y = 0$, que es una curva cerrada, por lo que

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = 0$$

PROBLEMA 2: [3 puntos] Sea S la superficie limitada por la intersección de la parte superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y por la hoja superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$. Se considera el campo vectorial dado por

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = xy\,\vec{i} + (y - x)\,\vec{j} + yz^2\,\vec{k}$$

Se pide:

a) Calcular el flujo del campo $\vec{\mathbf{F}}$ a través de la superficie S.

b) Calcular la circulación de $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo de la curva intersección de ambas superficies.

SOLUCIÓN:

(a) Por tratarse de una superficie cerrada, es posible utilizar el teorema de la divergencia, por lo que

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dxdydz = \iiint_V (y + 1 + 2yz)\,dxdydz$$

Esta integral triple la haremos mediante un cambio a coordenadas cilíndricas, teniendo en cuenta que (x,y) varían en la proyección sobre el plano OXY del círculo intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y $x^2 + y^2 = z^2$ (y que es $x^2 + y^2 = 1$), mientras que z varía entre el cono y la esfera. Por tanto, y realizando este cambio a cilíndricas,

$$x = r\cos\theta;\ y = r\sin\theta;\ z = z$$

con

$$0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi \text{ y } r \le z \le \sqrt{2 - r^2}$$

tendremos que

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V (y + 1 + 2yz)\,dxdydz = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} (r\sin\theta + 1 + 2zr\sin\theta)\,dz =$$

$$\ldots = \frac{8}{3}\pi\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

(b) En este caso se trata de calcular $\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$, siendo γ la curva dada por la intersección de ambas superficies; es decir, la curva $x^2 + y^2 = 1$, situada en el plano $z = 1$. Por ser la curva cerrada, podemos resolver esta integral de forma directa o por el teorema de Stokes:

- Si lo hacemos de forma directa, puesto que la parametrización de la curva viene dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, con $t \in [0, 2\pi]$, tendremos

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \oint_\gamma xydx + (y-x)dy + yz^2dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin t(-\cos t)dt + (\sin t - \cos t)\cos tdt + \sin t \cdot 1^2 \cdot 0dt = \ldots =$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos t \sin t(-\cos t) + (\sin t - \cos t)\cos t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t \sin t(-\cos t)dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos tdt - \int_0^{2\pi} \cos^2 tdt = 0 + 0 - \pi$$

- Si lo hacemos por Stokes, tendremos

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \iint_S \overrightarrow{rot\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}dS$$

siendo

$$\overrightarrow{rot\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y-x & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2, 0, -1-x)$$

y $\vec{\mathbf{n}}$ el vector normal a una superficie que contenga a la curva γ. Por tal motivo, podemos considerar como superficie S el plano $z = 1$, de donde $\vec{\mathbf{n}} = (0,0,1)$, y $dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\,dxdy = dxdy$. Así, al ser $\overrightarrow{rot\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = -1-x$, y $D : x^2 + y^2 \leq 1$, se tendrá

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \iint_S \overrightarrow{rot\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}dS = \iint_D (-1-x)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-1 - r\cos\theta)rdr = \ldots = -\pi$$

PROBLEMA 3: [1,5 puntos] Resolver los siguientes apartados:

a) Calcular $\arctan(2i)$**, dando su resultado en forma binómica.**

b) Encontrar una condición necesaria y suficiente que deben cumplir los números reales a, b, c **para que exista una función** f, **holomorfa en todo** $\mathbb{C}$, **tal que**

$$\mathrm{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2$$

Determinar, cuando dicha condición se cumple, todas las funciones enteras $f(z)$ **cuya parte real es la indicada.**

SOLUCIÓN:

(a) Si denotamos $\arctan(2i) = z$ tendremos que $\tan z = 2i$. A partir de la igualdad (definición de funciones trigonométricas en $\mathbb{C}$)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

resulta

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = 2i \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -2$$

Si denotamos $e^{iz} = t$, tendremos

$$\frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}} = -2 \Rightarrow 3t^2+1 = 0$$

de donde

$$t = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}} = \pm i\sqrt{\frac{1}{3}}$$

y puesto que $e^{iz} = t$,

$$e^{iz} = \pm i\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow iz = \log\left(\pm i\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \Rightarrow z = -i\log\left(\pm i\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

De esta forma, tendremos

$$\text{Si } z = -i\log\left(i\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -i\log\left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)_{\pi/2}\right) = -i\left(\log\sqrt{\frac{1}{3}} + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - i\log\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Si } z = -i\log\left(-i\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -i\log\left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)_{-\pi/2}\right) = -i\left(\log\sqrt{\frac{1}{3}} - i\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - i\log\sqrt{\frac{1}{3}}$$

donde hemos considerado el logaritmo principal.

(b) Para que la función $u(x,y) = \mathrm{Re}f(x+iy)$ efectivamente sea la parte real de una función holomorfa ha de verificar que ha de ser armónica. Por tanto, y al ser

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax+by;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = bx+2cy;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c$$

por lo que será armónica si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow c = -a$$

Consideramos entonces $u(x,y) = ax^2+bxy-ay^2$, y usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, determinaremos la parte imaginaria de dicha función f :

De

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 2ax+by \Rightarrow v(x,y) = \int(2ax+by)dy = 2axy + b\frac{y^2}{2} + g(x)$$

y para determinar $g(x)$ usaremos la segunda de las ec. de C-R:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow 2ay + g'(x) = -(bx-2ay) \Rightarrow g'(x) = -bx \Rightarrow g(x) = -b\frac{x^2}{2} + cte$$

Así, tendremos que la función siguiente es analítica en todo $\mathbb{C}$:

$$f(z) = f(x+iy) = (ax^2+bxy-ay^2) + i\left(2axy + b\frac{y^2}{2} - b\frac{x^2}{2} + cte\right)$$

PROBLEMA 4: [1,5 puntos] Determinar el desarrollo de Laurent alrededor del punto $z_0 = 1$ **para la función**

$$f(z) = e^z + \frac{2i}{z(z-1)}$$

estableciendo el dominio de validez de dicho desarrollo; clasificar el tipo de singularidad existente en dicho punto y calcular su residuo.

SOLUCIÓN: Se trata de expresar esta función como potencias de $z-1$. Para ello:

$$f(z) = e^z + \frac{2i}{z(z-1)} = e^{z-1+1} + \frac{2i}{z-1}\frac{1}{1+z-1} = e^{z-1}e + \frac{2i}{z-1}\frac{1}{1+(z-1)}$$

y usando los conocidos desarrollos

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

cuyo disco de convergencia es $|z| < \infty$, y

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots$$

cuyo disco de convergencia es $|z| < 1$, tendremos que

$$e^{z-1} = 1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \ldots$$

con región de convergencia $|z-1| < \infty$, es decir, todo el plano complejo $\mathbb{C}$, mientras que

$$\frac{1}{1+(z-1)} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + (z-1)^4 - \ldots$$

con región de convergencia $|z-1| < 1$, es decir, el círculo centrado en $z_0 = 1$ y de radio 1. Por tanto tendremos

$$f(z) = e^{z-1}e + \frac{2i}{z-1}\frac{1}{1+(z-1)} =$$

$$= e\left(1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \ldots\right) + \frac{2i}{z-1}\left(1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \ldots\right)$$

en la región intersección de ambas regiones de convergencia, es decir, en $|z-1| < 1$.

Analizando este resultado se observa que en el punto $z_0 = 1$ es un polo simple, ya que el término de mayor grado donde aparece $z-1$ dividiendo es $\frac{2i}{z-1}$, siendo además $Resf(1) = 2i$, ya que es el coeficiente del término $\frac{1}{z-1}$

NOTA: Que $z_0 = 1$ es un polo simple también se deduce sin más que mirar el enunciado, ya que $z_0 = 1$ es un cero simple del denominador, y el numerador no se anula en dicho punto. Además, el valor de su residuo también se puede calcular aplicando $Resf(1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\left(e^z + \frac{2i}{z(z-1)}\right) = 2i$).

PROBLEMA 5: [2.5 puntos] Resolver los siguientes apartados:

a) Calcular la siguiente integral según los posibles valores de $r > 0$:

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2}\right) dz$$

siendo γ la circunferencia $\gamma(t) = 1 + i + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Calcular, usando el teorema de los residuos,

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{5 + 4\cos x} dx$$

SOLUCIÓN:

(a) El integrando tiene por puntos singulares aislados. $z_1 = 0$ (singularidad esencial en el 1er sumando, mientras que es singularidad evitable en el 2do sumando) y $z_{2,3} = \pm i$ (que son polos dobles, al ser ceros dobles del denominador). Por tanto, y al ser γ la circunferencia $\gamma(t) = 1 + i + re^{it}$, distinguiremos los siguientes casos, según valores de r :

- Si $r < 1$: No hay punto singular en el interior de la región, por lo que

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right) dz = 0$$

- Si $1 < r < \sqrt{2}$: En el interior de la región solo está el psa $z_2 = i$, por lo que

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right) dz = 2\pi i Resf(i)$$

- Si $\sqrt{2} < r < \sqrt{5}$: En el interior de la región están los psa $z_1 = 0$ y $z_2 = i$, por lo que

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right) dz = 2\pi i (Resf(i) + Resf(0))$$

- Si $r > \sqrt{5}$: En el interior de la región están los tres psa, por lo que

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right) dz = 2\pi i (Resf(i) + Resf(-i) + Resf(0))$$

El valor de las correspondientes integrales se calculan sin más que tener en cuenta que

$$Resf(0) = \frac{1}{5!}$$

ya que el desarrollo de Laurent como potencias de z del primer sumando es

$$z^4 e^{1/z} = z^4 \left(1 + 1/z + \frac{(1/z)^2}{2!} + \frac{(1/z)^3}{3!} + \frac{(1/z)^4}{4!} + \ldots \right)$$

y el coeficiente del término $\frac{1}{z}$ es $\frac{1}{5!}$, mientras que

$$Resf(i) = \lim_{z\to i} \left[(z-i)^2 \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right]' = \lim_{z\to i} \left[\frac{\sin z}{z(z+i)^2} \right]' = \ldots = \frac{i\cos i - 2\sin i}{4}$$

Análogamente

$$Resf(-i) = \lim_{z\to -i} \left[(z+i)^2 \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right]' = \lim_{z\to -i} \left[\frac{\sin z}{z(z-i)^2} \right]' = \ldots = \frac{i\cos i - 2\sin i}{4}$$

(b) Haciendo el cambio $z = e^{ix}$, se tiene que $\sin x = \frac{z^2-1}{2iz}$; $\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$; $dx = \frac{dz}{iz}$. Además, $x \in [0, 2\pi]$ equivale a $|z| = 1$. De esta forma

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{5 + 4\cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5+4\cos x} dx = \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}{5 + 4\frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} = \ldots$$

$$\ldots = -\frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{z^4 - 2z + 1}{z^2(10z + 4z^2 + 4)} dz$$

y teniendo en cuenta que esta función tiene por singularidades $\{0, -2, -1/2\}$, siendo la primera un polo doble y las otras dos polos simples. Por tanto, y por el teorema de los residuos, tendremos

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{5+4\cos x} dx = -\frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{z^4 - 2z + 1}{z^2(10z + 4z^2 + 4)} dz = -\frac{1}{4i} 2\pi i (\mathrm{Res}f(0) + \mathrm{Res}f(-1/2)) = \frac{\pi}{8}$$

siendo

$$Resf(0) = \lim_{z\to 0} \left[z^2 \frac{z^4 - 2z + 1}{z^2(10z + 4z^2 + 4)} \right]' = \ldots = -\frac{9}{8}$$

$$Res f(-1/2) = \frac{P(-1/2)}{Q'(-1/2)} = \ldots = \frac{11}{8}$$