Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final Septiembre 2015
(10/09/2015)
ENUNCIADO Y RESUELTO

PROBLEMA 1: Calcular la integral

$$\int_{C_\alpha} \{e^{y+z}dx + e^{x+z}dy + e^{x+y}dz\}$$

donde C_α es la curva, recorrida en sentido positivo,dada por

$$C_\alpha : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4^2 \\ x + y + z = t, \text{ con } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular la integral de línea a lo largo del camino cerrado dado por la intersección de una esfera y de un plano. Podemos ver si hay independencia del camino de integración (en cuyo caso la integral valdrá 0 al ser una curva cerrada) o aplicar directamente el teorema de Stokes (por no hacerlo tomando una parametrización y sustituyendo la misma en la integral). De esta forma,

$$\int_{C_\alpha} \{e^{y+z}dx + e^{x+z}dy + e^{x+y}dz\} = \iint_S rot(\vec{F})dS = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}dS$$

siendo $\vec{F}(x,y,z) = (e^{y+z}, e^{x+z}, e^{x+y})$ y S una superficie que contenga a la curva C_α (y que nosotros tomaremos $S : x + y + z = t$, ya que es la superficie más sencilla a la hora de calcular su vector normal).

Como resulta que

$$rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{y+z} & e^{x+z} & e^{x+y} \end{vmatrix} = \ldots = (e^{x+y} - e^{x+z}, -e^{x+y} + e^{y+z}, e^{x+z} - e^{y+z})$$

y

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

se tiene que

$$rot(\vec{F}) \cdot \vec{n} = \ldots = 0$$

por lo que

$$\int_{C_\alpha} \{e^{y+z}dx + e^{x+z}dy + e^{x+y}dz\} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}dS = 0$$

– –

PROBLEMA 2. Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,0)$ sobre la semiesfera superior $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular una integral de superficie sobre una superficie abierta $S_1 : x^2+y^2+z^2 = a^2$ (parte superior). Por tanto, y para poder aplicar el teorema de la divergencia, vamos a cerrar dicha superficie con otra superficie elemental S_2 (en nuestro caso tomaremos el plano OXY, cuyo vector normal es el $(0,0,-1)$; lo tomamos de esta forma para que dicho vector normal sea exterior a la superficie). De esta forma, se tiene la superficie cerrrada $S = S_1 \cup S_2$.

Aplicando entonces el teorema de Gauss (divergencia), tendremos

$$\iiint_V \nabla\vec{F}dxdydz = \iint_S \vec{F}dS = \iint_{S_1} \vec{F}dS_1 + \iint_{S_2} \vec{F}dS_2$$

Pero resulta que

$$\iint_{S_2} \vec{F}dS_2 = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{n_{S_2}}dS_2 = \iint_{S_2} (x,y,0) \cdot (0,0,-1)dS_2 = \iint_{S_2} 0dS_2 = 0$$

mientras que

$$\iiint_V \nabla\vec{F}dxdydz = \iiint_V 2dxdydz = 2\iiint_V dxdydz = 2\text{Volumen}(V) = 2\left(\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi a^3\right) = \frac{4}{3}\pi a^3$$

donde esta última integral triple no la hemos calculado, puesto que sabemos que da el volumen de la semiesfera.

Sustituyendo entonces en la anterior igualdad que nos da el teorema de la divergencia, tendremos

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \iint_{S_1} \vec{F}dS_1 + 0$$

de donde la integral pedida valdrá

$$\iint_{S_1} \vec{F}dS_1 = \frac{4}{3}\pi a^3$$

– –

PROBLEMA 3. Hallar la serie de Laurent alrededor de las singularidades indicadas para cada una de las siguientes funciones. Clasificar la singularidad en cada caso y dar la región de convergencia de cada serie:

a) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ en $z_0 = 1$.

b) $(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ en $z_0 = -2$.

c) $\frac{z-\sin z}{z^3}$ en $z_0 = 0$.

SOLUCIÓN:

(a) Podemos asegurar que el punto $z_0 = 1$ es un polo triple (anula 3 veces al denominador, mientras que no afecta al numerador). Para calcular su desarrollo como potencias de $(z-1)$ hacemos lo siguiente (para basarnos en desarrollos conocidos):

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3}e^{2z} = \frac{1}{(z-1)^3}e^{2(z-1)+2} = \frac{e^2}{(z-1)^3}e^{2(z-1)} =$$
$$= \frac{e^2}{(z-1)^3}\left[1 + 2(z-1) + \frac{(2(z-1))^2}{2!} + \frac{(2(z-1))^3}{3!} + \ldots\right]$$
(Nota: en este caso hemos usado el conocido desarrollo
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$
que sabemos que es convergente en todo $\mathbb{C}$; y hemos sustituido z por $2(z-1)$. Aquí también se observa que $z_0 = 1$ es un polo triple, puesto que la mayor potencia de $(z-1)$ que aparece dividiendo es un 3). Además este desarrollo es válido en todo $\mathbb{C} - \{1\}$ (por serlo el de e^z en todo $\mathbb{C}$ y el denominador solo anularse en $z_0 = 1$).

(b) Se trata de expresar la función $(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ como potencias de $(z+2)$. Para ello hacemos lo siguiente
$$(z-3)\sin\frac{1}{z+2} = (z+2-5)\sin\frac{1}{z+2} = (z+2)\sin\frac{1}{z+2} - 5\sin\frac{1}{z+2}$$
y ahora usamos el conocido desarrollo
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$
cuyo radio de convergencia es $|z| < \infty$. Cambiando entonces z por $\frac{1}{z+2}$, se tendrá
$$(z+2)\sin\frac{1}{z+2} - 5\sin\frac{1}{z+2} =$$
$$= (z+2)\left[\frac{1}{z+2} - \frac{\left(\frac{1}{z+2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{z+2}\right)^5}{5!} - \ldots\right] - 5\left[\frac{1}{z+2} - \frac{\left(\frac{1}{z+2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{z+2}\right)^5}{5!} - \ldots\right] =$$
$$= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{3!(z+2)^2} + \frac{5}{3!(z+2)^3} + \frac{1}{5!(z+2)^4} + \ldots$$
Notemos entonces que $z_0 = -2$ es una singularidad esencial (hay ∞ términos en los que $(z+2)$ aparece dividiendo), mientras que la región de convergencia de esta serie está dada por aquellos valores de z para los que $\left|\frac{1}{z+2}\right| < \infty$, es decir $|z+2| > 0$.

(c) En este último caso hay que expresarlo todo como potencias de z, lo que es inmediato sin más que hacer
$$\frac{z - \sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\sin z = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right] =$$
$$= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \ldots$$
por lo que $z_0 = 0$ es una singularidad evitable y la región de convergencia de será $0 < |z| < \infty$.

PROBLEMA 4. Calcular, en función de $r > 0$, la integral
$$\int_{|z-i|=r} \frac{\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)}{z^2+1}\,dz$$

SOLUCIÓN:

La curva $|z-i| = r$ es la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio r. Las singularidades de la función $f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)}{z^2+1}$ son los puntos $z_1 = 0$ (singularidad esencial, ya que en el desarrollo de $\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$ aparecen infinitos términos de z dividiendo) y $z_{2,3} = \pm i$ (polos simples, ya que son raíces simples del denominador). Así, según sea $r > 0$, distinguiremos los siguientes casos a la hora de aplicar el teorema de los residuos:

- Si $0 < r < 1$, la única singularidad interior a la circunferencia $|z-i| = r$ es $z_2 = i$, por lo que

$$\int_{|z-i|=r} \frac{\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)}{z^2+1} dz = 2\pi i Res(f,i)$$

- Si $1 < r < 2$, las singularidades interiores son $z_1 = 0$ y $z_2 = i$, por lo que

$$\int_{|z-i|=r} \frac{\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)}{z^2+1} dz = 2\pi i[Res(f,i) + Res(f,0)]$$

- Y si $r > 2$, tendremos que las tres singulares son interiores, por lo que

$$\int_{|z-i|=r} \frac{\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)}{z^2+1} dz = 2\pi i[Res(f,i) + Res(f,0) + Res(f,-i)]$$

Por tanto el valor de estas integrales se calcula sin más que tener en cuenta que

$$Res(f,i) = \frac{p(i)}{q'(i)} = \frac{i}{2e}$$

$$Res(f,-i) = \frac{p(-i)}{q'(-i)} = \frac{i}{2e}$$

mientras que

$$Res(f,0) = 0$$

Notemos que para calcular este último residuo, al ser $z_1 = 0$ singularidad esencial, hemos utilizado el desarrollo

$$\frac{\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)}{z^2+1} = \frac{1}{z^2+1}\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) =$$

$$= \left[1-(z^2)+(z^2)^2-(z^2)^3+\ldots\right]\left[1+\left(\frac{1}{z^2}\right)+\frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^3}{3!}+\ldots\right]$$

que se ha obtenido a partir de los conocidos desarrollos

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3+\ldots$$

y

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

y multiplicando en el producto de corchetes anterior, resulta que el coeficiente del término $\frac{1}{z}$ es 0 (el producto solo lleva potencias pares de z), de manera que $Res(f,0) = 0$.