Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final Junio. Curso 2014/2015
(10/07/2015)
ENUNCIADO Y RESUELTO

PROBLEMA 1: Calcular la integral

$$\int_{C_\alpha} \left\{ \left(-yx^4 - \frac{2}{3}x^2y^3 + x^7 \right) dx + (xy^4 + y^3)dy \right\}$$

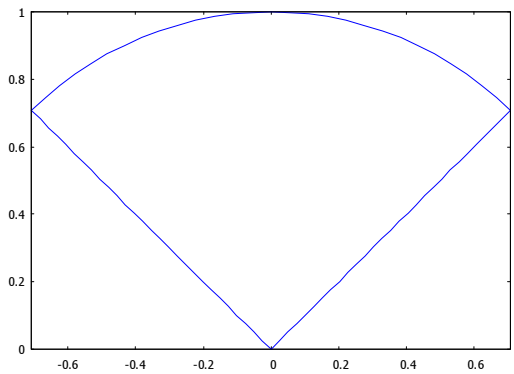
donde $C_\alpha = C_{\alpha_1} \cup C_{\alpha_2} \cup C_{\alpha_3}$ **está recorrida en sentido positivo y**

$$C_{\alpha_1} : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]; \qquad C_{\alpha_2} : \begin{cases} x = \cos(2\pi t) \\ y = \sin(2\pi t) \end{cases} \quad t \in \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8} \right];$$

$$C_{\alpha_3} : \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right]$$

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular la integral de línea a lo largo del camino cerrado, recorrido en sentido positivo



(representación realizada con wxMaxima:

$draw2d([parametric(t,t,t,0,2\hat{}(1/2)/2),$
$parametric(cos(2*\%pi*t),sin(2*\%pi*t),t,1/8,3/8),$
$parametric(t,-t,t,-2\hat{}(1/2)/2,0)]);)$

Puesto que se verifica que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x^4 - 2x^2y^2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = y^4$$

la integral depende del camino de integración, por lo que la resolveremos mediante el teorema de Green: Así,

$$I = \oint_{C_\alpha} \left\{ \left(-yx^4 - \frac{2}{3}x^2y^3 + x^7 \right) dx + (xy^4 + y^3)dy \right\} =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (y^4 + x^4 + 2x^2y^2)dxdy$$

Como el recinto de integración viene dado por el sector circular $x^2 + y^2 \leq 1$, con $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, realizaremos el cambio a coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

siendo el jacobiano $J = r$, con $r \in [0,1]$. Por tanto

$$I = \iint_D (y^4 + x^4 + 2x^2y^2)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^1 (r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta + 2r^4\cos^2\theta\sin^2\theta)r \cdot dr =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^1 (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2 r \cdot dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^1 (r^2)^2 r \cdot dr = \frac{\pi}{12}$$

NOTA: Esta integral también podríamos resolverla de forma directa, tomando las correspondientes parametrizaciones y usando que

$$\int_{C_\alpha} = \int_{C_{\alpha_1}} + \int_{C_{\alpha_2}} + \int_{C_{\alpha_3}}$$

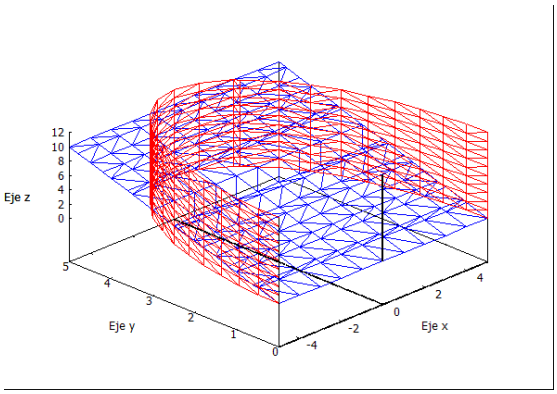
Si resolvemos cada una de estas integrales por separado, la 1ª y 3ª son inmediatas de calcular, pero la 2ª es complicada (aparecen potencias elevadas de senos y cosenos). Por ello, es más sencillo resolver este problema mediante el teorema de Green.

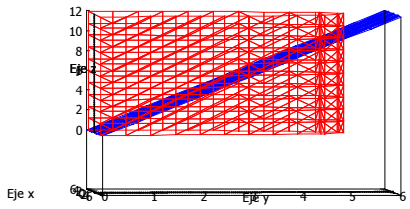
– –

PROBLEMA 2. Obtener el área de la porción de superficie $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$, **comprendida entre los planos** $z = 2y$ y $z = 12$

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular el área superficial de la superficie dada por el siguiente gráfico (área lateral en color rojo, por encima del plano azul)





(representaciones realizadas con wxMaxima:
load(*draw*);
draw3d(*color* = *blue*, *line_width* = 1,
implicit($z = 2 * y, x, -6, 6, y, 0, 6, z, 0, 12$),
color = *red*, *line_width* = 1,
implicit(x^2 + y^2 = 25, $x, -5, 5, y, 0, 5, z, 0, 12$),

$xlabel = "Ejex", ylabel = "Ejey", zlabel = "Ejez",$
$xaxis = true, yaxis = true, zaxis = true);)$

Recordamos que el área superficial para una superficie dada por una parametrización $\Phi(u,v)$, se calcula a través de

$$A(S) = \iint_{\Omega} \| T_u \times T_v \| dudv$$

siendo Ω el dominio donde varía (u,v). Como la superficie es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$, comprendida entre los planos $z = 2y$ y $z = 12$, la parametrización vendrá dada por

$$\Phi(u,v) = (5\cos u, 5\sin u, v)$$

donde

$$0 \leq u \leq \pi \qquad \text{y} \qquad 2 \cdot 5\sin u \leq v \leq 12$$

Así

$$T_u = \frac{\partial T}{\partial u} = (-5\sin u, 5\cos u, 0) \qquad \text{y} \qquad T_v = \frac{\partial T}{\partial v} = (0,0,1)$$

por lo que

$$T_u \times T_v = \ldots = (5\cos u, 5\sin u, 0) \qquad \text{y} \qquad \| T_u \times T_v \| = 5$$

De esta forma,

$$A(S) = \iint_{\Omega} \| T_u \times T_v \| dudv = \iint_{\Omega} 5dudv = 5\int_0^{\pi} du \int_{10\sin u}^{12} dv = \ldots = 5(12\pi - 20)$$

OTRA FORMA: Recordamos que el área superficial cuando la superficie viene dada por una ecuación de la forma $y = f(x,z)$, se puede obtener a partir de

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} dxdz = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}\right)^2} dxdz = \iint_D \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}} dxdz$$

siendo D la proyección de la superficie sobre el plano XZ. Como la superficie es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$, comprendida entre los planos $z = 2y$ y $z = 12$, la proyección sobre XZ es el "rectángulo" dado por $-5 \leq x \leq 5$, mientras que z varía entre la intersección de $z = 2y$ con el cilindro y el plano $z = 12$. La intersección del cilindro y el plano es $x^2 + \frac{z^2}{4} = 25$, de donde $z = 2\sqrt{25 - x^2}$. Por tanto, si resolvemos la integral anterior con

$$D = \left\{(x,z);\ -5 \leq x \leq 5,\ 2\sqrt{25 - x^2} \leq z \leq 12\right\}$$

tendremos

$$A(S) = \iint_D \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}} dxdz = \int_{-5}^{5} \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}} \left(12 - 2\sqrt{25 - x^2}\right) dx =$$

$$= \int_{-5}^{5} \left(\frac{60}{\sqrt{25 - x^2}} - 10\right) dx = \ldots = 60\pi - 100$$

– –

PROBLEMA 3. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación

$$\cos(z) + 2\sqrt{5}\,\mathbf{i} = 0$$

dando la solución en forma binómica.

SOLUCIÓN:

A partir de la igualdad (definición de $\cos z$ en $\mathbb{C}$)

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

la ecuación dada se transforma en

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + 2\sqrt{5}\,\mathbf{i} = 0$$

y si hacemos $t = e^{iz}$, tendremos que resolver la ecuación

$$\frac{t + \frac{1}{t}}{2} + 2\sqrt{5}\,\mathbf{i} = 0$$

es decir,

$$t^2 + 4\sqrt{5}\,\mathbf{i}t + 1 = 0$$

que tiene por soluciones

$$t = \frac{-4\sqrt{5} \pm \sqrt{84}}{2} i$$

Entonces

$$\text{Si } t = \frac{-4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2} i \Rightarrow e^{iz} = \frac{-4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2} i \Rightarrow iz = \log\left(\frac{-4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2} i\right)$$

por lo que expresando este número en forma polar (para poder calcular su logaritmo),

$$iz = \log\left(\frac{-4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2} i\right) = \log\left(\frac{-4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2}\right)_{\frac{\pi}{2}} = \log\left(\frac{-4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2}\right) + i\frac{\pi}{2}$$

de donde

$$z = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}\log\left(\frac{-4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \log\left(\frac{-4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2}\right) i$$

Análogamente

$$\text{Si } t = \frac{-4\sqrt{5} - \sqrt{84}}{2} i \Rightarrow e^{iz} = \frac{-4\sqrt{5} - \sqrt{84}}{2} i \Rightarrow iz = \log\left(\frac{-4\sqrt{5} - \sqrt{84}}{2} i\right)$$

por lo que

$$iz = \log\left(\frac{4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2}\right)_{\frac{3\pi}{2}} = \log\left(\frac{4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2}\right) + i\frac{3\pi}{2}$$

y entonces

$$z = \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{i}\log\left(\frac{4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - \log\left(\frac{4\sqrt{5} + \sqrt{84}}{2}\right) i$$

donde hemos considerado los valores principales para cada uno de estos logaritmos neperianos complejos.

– –

PROBLEMA 4. Dada la siguiente función

$$f(z) = \left(z^2 + \frac{1}{z}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

a) Calcular su desarrollo de Laurent centrado en $z_0 = 0$.
b) ¿Cual es su anillo de convergencia?
c) Indicar su parte regular y su parte singular.
d) Utilizando el desarrollo anterior, calcular $Res(f(z), z_0)$.

SOLUCIÓN:

Podemos usar que

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}$. De esta forma

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^6}{6!} + \ldots$$

siempre que $|z| > 0$. Así, el desarrollo de Laurent para $f(z)$ será

$$f(z) = \left(z^2 + \frac{1}{z}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \left(z^2 + \frac{1}{z}\right)\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^6}{6!} + \ldots\right) =$$

$$= z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{z} + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{2!z^3} - \frac{1}{6!z^4} + \frac{1}{4!z^5} - \frac{1}{8!z^6} + \ldots$$

Notemos que su anillo de convergencia será $|z| > 0$ (el anillo para $\cos z$ es $|z| < \infty$, por lo que para $\cos(\frac{1}{z})$ será $|\frac{1}{z}| < \infty$, es decir $|z| > 0$), que su parte regular son los dos primeros sumandos anteriores (y la parte singular, el resto), y que el punto $z_0 = 0$ es una singularidad esencial (hay infinitas potencias negativas de z dividiendo), siendo

$$Res(f(z), z_0) = 1$$

(coeficiente del término $\frac{1}{z}$).

PROBLEMA 5. Calcular, en función de $r > 0$, y usando el teorema de los residuos, la integral

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz$$

siendo $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$. Justificar razonadamente porqué se puede aplicar dicho teorema.

SOLUCIÓN:

La curva $\gamma(t) = 1 + re^{it}$ es la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio r. Las singularidades de la función $f(z) = \frac{\cos(z)}{z\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}$ son los puntos $z_1 = 0$ (polo simple) y $z_2 = \frac{\pi}{2}$ (polo simple, ya que anula dos veces al denominador, pero también anula al numerador). Así, según sea $r > 0$, distinguiremos los siguientes casos:

- Si $0 < r < \frac{\pi}{2} - 1$, no hay singularidades interiores a la circunferencia $\gamma(t)$, por lo que

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz = 0$$

- Si $\frac{\pi}{2} - 1 < r < 1$, la única singularidad interior a $\gamma(t)$ es $z_2 = \frac{\pi}{2}$, por lo que

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2)$$

- Y si $r > 1$, tendremos que los dos puntos singulares son interiores, por lo que

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f(z), z_2) + \operatorname{Res}(f(z), z_1))$$

Por tanto el valor de estas integrales se calcula sin más que tener en cuenta que

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{\cos 0}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{4}{\pi^2}$$

mientras que

$$\operatorname{Res}(f(z), z_2) = \lim_{z\to\pi/2}\left(\left(z-\frac{\pi}{2}\right)f(z)\right) = \lim_{z\to\pi/2}\frac{\cos z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{z\to\pi/2}\frac{-\sin z}{2z-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

(Notemos que para calcular este último residuo, y a pesar de ser z_2 un polo simple, no podemos aplicar $\operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{p(z_2)}{q'(z_2)}$ puesto que se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$).

– –

PROBLEMA 6. Calcular, mediante el teorema de los residuos,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10}+\sin t}dt$$

justificando de forma razonada lo realizado.

SOLUCIÓN:

Este tipo de integrales se reduce al campo complejo a través del cambio

$$z = e^{it}, \text{ de donde } dt = \frac{dz}{iz} \text{ y } \sin t = \frac{z^2-1}{2iz}$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10}+\sin t}dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{10}+\frac{z^2-1}{2iz}}\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2+2\sqrt{10}\,iz-1}$$

Esta fracción tiene por puntos singulares aislados las raíces de la ecuación $z^2 - 2\sqrt{10}\,iz - 1 = 0$, que son $z_1 = \left(3-\sqrt{10}\right)i$ y $z_2 = \left(-3-\sqrt{10}\right)i$ (siendo ambas polos simples). Solamente z_1 está en el interior de $|z| = 1$. De esta forma, y aplicando el teorema de los residuos,

$$\int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 2\sqrt{10}\,iz - 1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1) = 2\pi i \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = 2\pi i \frac{2}{6i} = \frac{2\pi}{3}$$