

Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final Febrero. Curso 2014/2015
(9/02/2015)
ENUNCIADO Y RESUELTO

PROBLEMA 1: Calcular las siguientes integrales de línea

$$I_1 = \int_{C_a} \{3x^2 dx + y^2 dy\}$$

$$I_2 = \int_{C_a} \left\{ \frac{2}{3}y^3 dx + 8x dy \right\}$$

donde C_a es la circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio 1, recorrida en sentido positivo.

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular integrales de línea a lo largo de un camino cerrado. Para la primera de ellas, y puesto que se verifica que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

la misma es independiente del camino de integración, por lo que

$$I_1 = \oint_{C_a} \{3x^2 dx + y^2 dy\} = 0$$

Para I_2 , al ser

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 8$$

la integral depende del camino de integración, por lo que la resolveremos mediante el teorema de Green: Así,

$$I_2 = \oint_{C_a} \left\{ \frac{2}{3}y^3 dx + 8x dy \right\} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (8 - 2y^2) dx dy$$

Como el recinto de integración viene dado por la ecuación $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, realizaremos el cambio de variable

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = 1 + r \sin \theta \end{cases}$$

siendo el jacobiano $J = r$, con $r \in [0, 1]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Por tanto

$$\iint_D (8 - 2y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (8 - 2(1 + r \sin \theta)^2) r dr = \dots = \frac{11\pi}{2}$$

NOTA: Esta segunda integral también podríamos resolverla de forma directa, tomando una parametrización $\gamma(t) = (\cos t, 1 + \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, por lo que

$$I_2 = \int_{C_a} \left\{ \frac{2}{3}y^3 dx + 8x dy \right\} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}(1 + \sin t)^3(-\sin t) + 8 \cos t(\cos t) \right) dt$$

aunque es más complicada que resolver el problema mediante el teorema de Green.

PROBLEMA 2. Calcular la integral de línea

$$\int_{C_\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

siendo $\vec{F}$ el campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (z^3, x^3, -y^3)$$

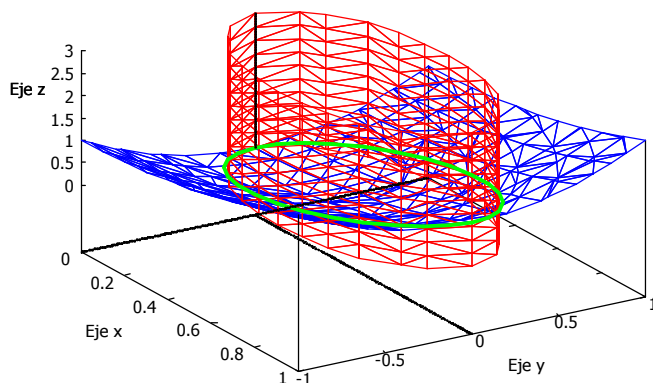
y C_α la curva definida por la intersección de las superficies

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 + y^2 = x \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

La curva C_α está dada por la intersección de un paraboloide ($x^2 + y^2 = z$) y de un cilindro de eje Z ($x^2 + y^2 = x$), por lo que se trata de una curva cerrada, como se observa en el gráfico adjunto.

Curva intersección entre cilindro y paraboloide



Al ser la integral de línea a lo largo de una curva cerrada en $\mathbb{R}^3$, resolveremos el problema utilizando el teorema de Stokes. Así

$$\int_{C_\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot\vec{F}} \cdot \vec{n} dS$$

siendo S una superficie que tenga a C_α por borde. Como la intersección de ambas superficies nos da el plano $z = x$, resulta que dicha intersección será la circunferencia $x^2 + y^2 = x$, aunque contenida en el plano $z - x = 0$. Por tanto tomaremos $S : z - x = 0$.

De esta forma, tendremos

$$\overrightarrow{rot\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & x^3 & -y^3 \end{vmatrix} = (-3y^2, 3z^2, 3x^2)$$

siendo además

$$\vec{n} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$$

y

$$dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

Así

$$\int_{C_a} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot\mathbf{F}} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \frac{3y^2 + 0 + 3x^2}{\sqrt{2}} \sqrt{2} dx dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

siendo D la proyección sobre el plano XY de la intersección de ambas superficies; es decir, D es la circunferencia

$$x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Esta última integral la resolveremos mediante un cambio a polares

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

siendo el jacobiano $J = r$, con $r \in [0, \frac{1}{2}]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Por tanto

$$\int_{C_a} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} \left(\left(\frac{1}{2} + r \cos \theta \right)^2 + (r \sin \theta)^2 \right) r dr = \frac{9}{32} \pi$$

PROBLEMA 3. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación

$$\cos(iz) + 3i \sin(iz) + 1 = 0$$

SOLUCIÓN:

A partir de las igualdades (definición de funciones trigonométricas en $\mathbb{C}$)

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad y \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

la ecuación dada se transforma en

$$\frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} + 3i \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} + 1 = 0$$

es decir

$$\frac{e^{-z} + e^z}{2} + 3i \frac{e^{-z} - e^z}{2i} + 1 = 0$$

y si hacemos $t = e^z$, tendremos que resolver la ecuación

$$\frac{1/t+t}{2} + 3i \frac{1/t-t}{2i} + 1 = 0$$

es decir,

$$t^2 - t - 2 = 0$$

ecuación que tiene por soluciones $t = 2, -1$.

Entonces

$$\text{Si } t = 2 \Rightarrow e^z = 2 \Rightarrow z = \log(2) = \log(2_0) = \log 2 + i0 = \log 2$$

$$\text{Si } t = -1 \Rightarrow e^z = -1 \Rightarrow z = \log(-1) = \log(1_\pi) = \log 1 + i\pi = i\pi$$

donde hemos considerado los valores principales para cada uno de estos logaritmos neperianos complejos.

PROBLEMA 4. Determinar todas las series de Laurent centradas en $z_0 = 0$ para la función

$$f(z) = \frac{3}{z^2 - z - 2}$$

estableciendo el dominio de validez de cada uno de los desarrollos obtenidos. Indicar en cada uno de ellos la parte regular y la parte principal.

SOLUCIÓN:

La función tiene por puntos singulares $\{2, -1\}$, por lo que consideraremos las 3 regiones siguientes:

$$D_1 : |z| < 1; D_2 : 1 < |z| < 2; D_3 : |z| > 2$$

y para cada una de ellas tendremos en cuenta que

$$f(z) = \frac{3}{z^2 - z - 2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2} = \dots = \frac{-1}{z+1} + \frac{1}{z-2}$$

(a) En D_1 : Utilizando desarrollos conocidos, tenemos que

$$\frac{-1}{z+1} = -\frac{1}{z+1} = -(1 - z + z^2 - z^3 + \dots)$$

desarrollo que es válido si $|z| < 1$ (y por tanto válido en D_1), mientras que para la segunda fracción podemos poner

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right)$$

desarrollo que es válido si $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ (y por tanto también válido en D_1).

Por tanto, en D_1 se tendrá

$$f(z) = -(1 - z + z^2 - z^3 + \dots) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right)$$

constituyendo todo este desarrollo la parte regular y no existiendo parte principal.

(b) En D_2 : Sigue siendo válido el desarrollo

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right)$$

(ya que éste lo es siempre que $|\frac{z}{2}| < 1$), pero no lo es el de la 1ª fracción (puesto que éste es válido si $|z| < 1$). Por ello, haremos

$$\frac{-1}{z+1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots \right)$$

desarrollo que es válido si $|\frac{1}{z}| < 1$ (y por tanto válido en D_2).

Por tanto, en esta región se tendrá

$$f(z) = -\frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right)$$

constituyendo el primer paréntesis la parte principal y el segundo la parte regular.

(c) En D_3 : Sigue siendo válido el desarrollo

$$\frac{-1}{z+1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots \right)$$

(ya que éste lo es siempre que $|\frac{1}{z}| < 1$), pero no lo es el de $\frac{1}{z-2}$ (puesto que éste es válido si $|z| < 2$). Por ello, haremos

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 - \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \dots \right)$$

desarrollo que es válido si $|\frac{2}{z}| < 1$ (y por tanto válido en D_3). Por tanto, en esta región se tendrá

$$f(z) = -\frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots \right) + \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 - \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \dots \right)$$

constituyendo todo el desarrollo la parte principal o singular y no existiendo parte regular.

PROBLEMA 5. Calcular las siguientes integrales distinguiendo entre los posibles valores de $r > 0$:

a) $\int_{C_\alpha} 2(\bar{z} - 2)dz$, donde $\alpha(t) = 2 + re^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$

b) $\int_{C_\alpha} (3z^n + 4z^{n-1} - 16z^{15} + z^3 - 1)dz$, donde $\alpha(t) = re^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$ y $n \in \mathbb{N}$

c) $\int_{C_\alpha} z^5 \cos \frac{1}{z} dz$, donde $\alpha(t) = 1 + re^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$

SOLUCIÓN:

(a) La función a integrar es $f(z) = 2(\bar{z} - 2)$, que no es analítica en ningún punto (podemos ver que no se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann). Por tanto, la única forma de calcular esta integral es hacerlo de forma directa, de manera que

$$\int_{C_\alpha} 2(\bar{z} - 2)dz = \int_0^{2\pi} 2(\overline{2 + re^{it}} - 2)ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} 2(re^{-it})ire^{it} dt = \dots = 4\pi r^2 i$$

(b) En este caso la función a integrar $f(z) = 3z^n + 4z^{n-1} - 16z^{15} + z^3 - 1$ es analítica y es una función que tiene primitiva. Por tanto, y como el camino de integración es cerrado, se verifica

$$\int_{C_a} (3z^n + 4z^{n-1} - 16z^{15} + z^3 - 1)dz = 0$$

independientemente del valor que tome $r > 0$.

(c) La curva $\alpha(t) = 1 + re^{it}$ es la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio r .

Esta última integral hay que resolverla por el teorema de los residuos, teniendo en cuenta que el punto $z_0 = 0$ es la única singularidad de la función $f(z) = z^5 \cos \frac{1}{z}$, siendo ésta además de tipo esencial. Así, y siempre que $r > 1$, tendremos que

$$\int_{C_a} z^5 \cos \frac{1}{z} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0)$$

ya que el punto crítico es interior a la curva $\alpha(t) = 1 + re^{it}$. Como

$$f(z) = z^5 \cos \frac{1}{z} = z^5 \left(1 - \frac{(\frac{1}{z})^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{z})^4}{4!} - \frac{(\frac{1}{z})^6}{6!} + \dots \right)$$

tendremos que

$$\text{Res}(f, 0) = \text{coef del } t^0 \frac{1}{z} \text{ en el desarrollo anterior} = -\frac{1}{6!}$$

por lo que

$$\int_{C_a} z^5 \cos \frac{1}{z} dz = -\frac{2\pi i}{6!}$$

siempre que $r > 1$.

Si $0 < r < 1$, la integral valdrá 0, puesto que no hay puntos singulares dentro del recinto de integración.

PROBLEMA 6. Sea $0 < \theta < 1$ y sea $t \in \mathbb{R}$. **Demostrar que**

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \theta^2}{1 - 2\theta \cos t + \theta^2} dt = 1$$

SOLUCIÓN:

(a) Vamos a probar, de forma equivalente al enunciado, que se verifica

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \theta}{1 - 2\theta \cos t + \theta^2} dt = 2\pi$$

Para ello, haremos el conocido cambio de variable

$$z = e^{it} \text{ de donde } dt = \frac{dz}{iz} \text{ y } \cos t = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \theta}{1 - 2\theta \cos t + \theta^2} dt = \int_{|z|=1} \frac{1 - \theta}{1 - 2\theta \frac{z^2 + 1}{2z} + \theta^2} \frac{dz}{iz} = \dots = \frac{\theta^2 - 1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\theta z^2 - (\theta^2 + 1)z + \theta}$$

Esta fracción tiene por puntos singulares aislados las raíces de la ecuación $\theta z^2 - (\theta^2 + 1)z + \theta = 0$, que son $z_1 = \theta$ y $z_2 = \frac{1}{\theta}$ (siendo ambos polos simples). Como $0 < \theta < 1$, solamente $z_1 = \theta$ está en el interior de $|z| = 1$. De esta forma, y aplicando el teorema de los residuos,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-\theta}{1-2\theta \cos t + \theta^2} dt = \frac{\theta^2-1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\theta z^2 - (\theta^2+1)z + \theta} = \frac{\theta^2-1}{i} 2\pi i \operatorname{Res} f(\theta) = \frac{\theta^2-1}{i} 2\pi i \frac{1}{\theta^2-1} = 2\pi$$

como queríamos demostrar.

NOTA: El valor de $\operatorname{Res} f(\theta)$ lo hemos obtenido teniendo en cuenta que $f(z) = \frac{1}{\theta z^2 - (\theta^2+1)z + \theta}$ y que $z_1 = \theta$ es un polo simple, por lo que

$$\operatorname{Res} f(\theta) = \frac{p(\theta)}{q'(\theta)} = \dots = \frac{1}{\theta^2-1}$$