Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Segundo Curso
Examen final septiembre. Curso 2013/2014
(20/09/2014)

1. **Calcular, de dos maneras distintas, la integral de línea**

$$\int_\gamma \{2xdx + e^{y+z}dy + e^{y+z}dz\}$$

desde el punto $(0,0,0)$ **al punto** $(2,2,12)$, **a lo largo de la curva**

$$\gamma : \begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ y = x \end{cases}$$

recorrida en sentido negativo.

SOLUCIÓN:

Esta integral de línea se puede calcular de forma directa, puesto que una parametrización de la curva viene dada por

$$\gamma(t) = (t,t,t^2+2t^2) = (t,t,3t^2) \qquad \text{con } t \in [0,2]$$

De esta forma

$$\int_\gamma \{2xdx + e^{y+z}dy + e^{y+z}dz\} = \int_0^2 \left(2tdt + e^{t+3t^2}dt + e^{t+3t^2}6tdt\right) =$$

$$= \int_0^2 \left(2t + (1+6t)e^{t+3t^2}\right)dt = e^{14} + 3$$

NOTA: Como nos piden en sentido negativo, hay que cambiar el signo al resultado.

También podemos observar que esta integral es independiente del camino de integración, puesto que si se toma $\vec{F} = (2x, e^{y+z}, e^{y+z})$, resulta que

$$rot\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & e^{y+z} & e^{y+z} \end{vmatrix} = \ldots = (0,0,0)$$

Por tanto, la integral también puede calcularse a través de la función potencial, o tomando cualquier otro camino que una los puntos $(0,0,0)$ y $(2,2,12)$. Si, por ejemplo, lo hacemos de esta segunda forma, y tomamos como camino γ' la recta que une ambos puntos, y cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{22} = t$$

es decir

$$x = 2t;\ y = 2t;\ z = 12t; \qquad \text{con } t \in [0,1]$$

tendremos

$$\int_\gamma \{2xdx + e^{y+z}dy + e^{y+z}dz\} = \int_{\gamma'} \{2xdx + e^{y+z}dy + e^{y+z}dz\} =$$

$$= \int_0^1 (8tdt + 2e^{14t}dt + 12e^{14t}dt) = \int_0^1 (8t + 14e^{14t})dt = e^{14} + 3$$

NOTA: Como nos piden en sentido negativo, hay que cambiar el signo al resultado.

NOTA: Como hemos comentado, la tercera forma de calcular esta misma integral es a través de la función potencial, evaluando la misma en los puntos extremo y origen. Si se hace de esta forma, se obtiene como función potencial (se propone como ejercicio obtener esta función potencial)

$$\Phi(x,y,z) = x^2 + e^{y+z} + K$$

por lo que

$$\int_\gamma \{2xdx + e^{y+z}dy + e^{y+z}dz\} = \Phi(2,2,12) - \Phi(0,0,0) = 4 + e^{14} - 1 = e^{14} + 3$$

y habría que cambiar el signo al resultado (o bien calcular directamente $\Phi(0,0,0) - \Phi(2,2,12)$).

– –

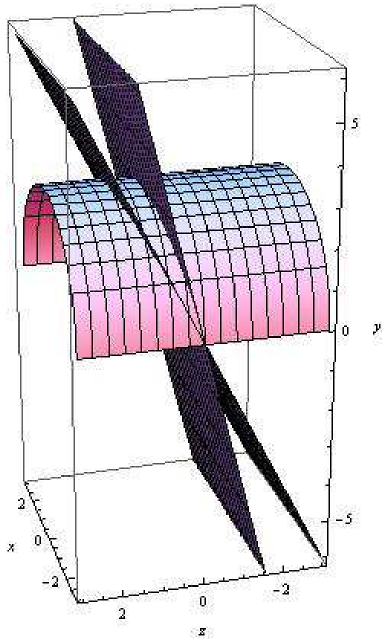
2. Si una superficie S está parametrizada en el recinto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en la forma $\Phi = \Phi(u,v)$, se puede calcular su área a partir de la fórmula

$$A(S) = \iint_D \|\Phi_u \times \Phi_v\| dudv$$

Calcular el área de la porción de superficie cilíndrica limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 2y,\ z = 4y,$ con $z \geq 0$.

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular el área superficial de la "cuña" que aparece en la siguiente gráfica:



Una parametrización para el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ viene dada por

$$\begin{cases} x = 3\cos u \\ y = 3\sin u \\ z = v \end{cases}$$

con $0 \leq u \leq 2\pi$. Como z varia entre los planos $z = 2y = 6\sin u$ y $z = 4y = 12\sin u$, y ha de ser $z \geq 0$, esto quiere decir que $\sin u \geq 0$, o lo que es lo mismo, $0 \leq u \leq \pi$. De esta forma, la región D viene dada por

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq u \leq \pi,\ 6\sin u \leq z \leq 12\sin u\right\}$$

Puesto que la superficie viene parametrizada por

$$\Phi(u,v) = (3\cos u, 3\sin u, v), \text{ con } (u,v) \in D$$

tendremos que

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3\sin u & 3\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3\cos u, 3\sin u, 0)$$

siendo entonces

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = 3$$

De esta forma, el área pedida será

$$A(S) = \iint_D \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv = \int_0^\pi du \int_{6\sin u}^{12\sin u} 3dv = 3\int_0^\pi 6\sin u du = 36$$

----

3. Calcular

$$\int_\gamma \frac{\exp\left(\frac{\pi iz}{2}\right)}{z^4 - z^3 - 9z^2 - 11z - 4} dz$$

donde $\gamma(t) = -1 + 2e^{2\pi it}$, **con** $t \in [0,1]$.

SOLUCIÓN:

Notemos que la curva γ es la circunferencia de centro $(-1,0)$ y radio $2.$ Si tomamos

$$f(z) = \frac{\exp\left(\frac{\pi iz}{2}\right)}{z^4 - z^3 - 9z^2 - 11z - 4}$$

el denominador se puede factorizar en la forma

$$z^4 - z^3 - 9z^2 - 11z - 4 = (z-4)(z+1)^3$$

por lo que $f(z)$ tiene por puntos singulares aislados: $z_1 = 4$ (polo simple) y $z_2 = -1$ (polo triple); de éstos dos, solamente $z_2 = -1$ está en el círculo formado por $\gamma(t),$ de manera que

$$\int_\gamma \frac{\exp\left(\frac{\pi iz}{2}\right)}{z^4 - z^3 - 9z^2 - 11z - 4} dz = 2\pi i \text{Res}(f,-1) =$$

$$= 2\pi i \frac{(8-25\pi^2)i - 20\pi}{1000} = \frac{\pi^3}{20} - \frac{2\pi}{125} - \frac{\pi^2}{25} i$$

donde $\text{Res}(f,-1)$ se ha calculado a través de

$$\text{Res}(f,-1) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to-1} \left[(z+1)^3 f(z) \right]'' =$$

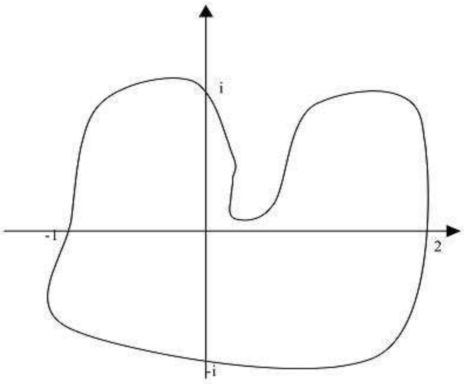
$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to-1} \left[\frac{\exp\left(\frac{\pi iz}{2}\right)}{z-4} \right]'' = \ldots = \frac{(8-25\pi^2)i - 20\pi}{1000}$$

– –

4. Calcular la integral

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2) + e^{1/z}}{zi + z} dz$$

donde γ es la curva de Jordan (positivamente orientada) cuya trayectoria se representa en la siguiente figura:



SOLUCIÓN:

Vamos a calcular la integral usando el teorema de los residuos, como suma de otras dos integrales, ya que:

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2) + e^{1/z}}{zi + z} dz = \int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{(1+i)z} dz + \int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(1+i)z} dz$$

Para la primera de ellas, la función $f(z) = \frac{\sin(z^2)}{(1+i)z}$ tiene por punto singular aislado $z_1 = 0$, siendo éste una singularidad evitable: notemos que este punto anula una vez al denominador, pero anula dos veces al numerador; o, lo que es equivalente, se tiene que

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z^2)}{(1+i)z} = 0$$

(basta con aplicar equivalencias en el numerador, o resolver dos veces por L'Hôpital). Por lo tanto

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{(1+i)z} dz = 0$$

Para la segunda de las integrales, la función $g(z) = \frac{e^{1/z}}{(1+i)z}$ tiene por punto singular aislado $z_2 = 0$, siendo éste una singularidad esencial: notemos que el desarrollo de Laurent, como potencias de z, de esta función viene dado por

$$\frac{e^{1/z}}{(1+i)z} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{(1/z)^2}{2!} + \frac{(1/z)^3}{3!} + \ldots\right)$$

por lo que la singularidad es esencial ya que hay infinitos términos en su parte singular (esto es, términos con potencias negativas de z). También observando este desarrollo vemos que $\mathrm{Res}(g,0) = \frac{1}{1+i}$, puesto que éste es el coeficiente del término $\frac{1}{z}$ en el desarrollo anterior.

Por todo lo anterior

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(1+i)z}dz = 2\pi i \mathrm{Res}(g,0) = 2\pi i \frac{1}{1+i} = \pi(1+i)$$

Así,

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2) + e^{1/z}}{zi+z}dz = \int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{(1+i)z}dz + \int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(1+i)z}dz = \pi(1+i)$$

_ _