Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final JUNIO. Curso 2013/2014
(28/06/2014)

ENUNCIADO Y RESUELTO

PROBLEMA 1: Calcular

$$\oint_{C_\alpha} \{(x+1)dx - ye^x dy\}$$

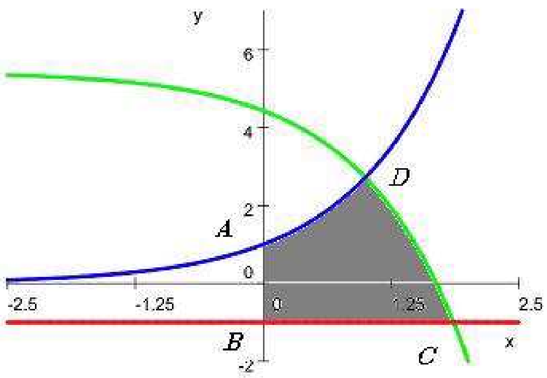
siendo C_α la frontera (orientada positivamente) de la región compacta

$$D = \left\{(x,y);\ x \geq 0,\ y \geq -1,\ y \leq e^x,\ y \leq -e^x + 2e\right\}$$

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular una integral de línea a lo largo de un camino cerrado, pero dicha integral es dependiente del camino (puesto que $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -ye^x$). Por tanto, la forma de calcular la misma es realizando una parametrización de dicha curva frontera o aplicando el teorema de Green en el plano.

Si lo hacemos a través de curvas, y al observar la gráfica siguiente



notamos que la curva C_α está formada por las siguientes 4 curvas (recorridas en el sentido que indican las letras): (1) recta AB, (2) recta BC; (3) curva CD y (4) curva DA. Además, estos puntos de intersección son $A(0,1)$, $B(0,-1)$, $C(\ln(1+2e),-1)$ y $D(1,e)$. Por tanto

$$\oint_{C_\alpha} \{(x+1)dx - ye^x dy\} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

donde cada una de las respectivas curvas viene dada por las siguientes parametrizaciones:

- recta AB (recta $x = 0$) : $\gamma(t) = (0,t)$, con $t \in [1,-1]$.
- recta BC (recta $y = -1$) : $\gamma(t) = (t,-1)$, con $t \in [0,\ln(1+2e)]$.
- curva CD (curva $y = -e^t + 2e$) : $\gamma(t) = (t,-e^t + 2e)$, con $t \in [\ln(1+2e),1]$.
- curva DA (curva $y = e^t$) : $\gamma(t) = (t,e^t)$, con $t \in [1,0]$.

Entonces, si calculamos cada integral por separado:

$$\int_{AB} = \int_1^{-1} ((0+1)0 - te^0)dt = 0$$

$$\int_{BC} = \int_0^{\ln(1+2e)} ((t+1) - (-1)e^t 0)dt = \ln(2e+1) + \frac{1}{2}\ln^2(2e+1)$$

$$\int_{CD} = \int_{\ln(1+2e)}^{1} ((t+1) - (-e^t + 2e)e^t(-e^t))dt =$$

$$= -\frac{1}{3}e^3 + ee^2 - \ln(2e+1) + \frac{1}{3}(2e+1)^3 - \frac{1}{2}\ln^2(2e+1) - e(2e+1)^2 + \frac{3}{2}$$

$$\int_{DA} = \int_1^0 ((t+1) - e^t e^t e^t)dt = -\frac{11}{6} + \frac{1}{3}e^3$$

Por tanto

$$\oint_{C_\alpha} \{(x+1)dx - ye^x dy\} = \ldots = e^3 + \frac{1}{3}(2e+1)^3 - e(2e+1)^2 - \frac{1}{3}$$

Si lo hacemos usando el teorema de Green, tendremos

$$\oint_{C_\alpha} \{(x+1)dx - ye^x dy\} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D (-ye^x - 0)dxdy =$$

$$= -\iint_{D_1} ye^x dxdy - \iint_{D_2} ye^x dxdy$$

donde $D_1 \cup D_2 = D$, siendo estas regiones las dadas por:

$$D_1 : 0 \leq x \leq 1;\ -1 \leq y \leq e^x; \qquad D_1 : 1 \leq x \leq \ln(2e+1);\ -1 \leq y \leq -e^x + 2e$$

De esta forma

$$\oint_{C_\alpha} \{(x+1)dx - ye^x dy\} = -\int_0^1 dx \int_{-1}^{e^x} ye^x dy - \int_1^{\ln(2e+1)} dx \int_{-1}^{-e^x+2e} ye^x dy =$$

$$= \ldots = e^3 + \frac{1}{3}(2e+1)^3 - e(2e+1)^2 - \frac{1}{3}$$

y se obtiene (simplificando) el mismo resultado que haciéndolo directamente.

– –

PROBLEMA 2. Comprobar el teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y,z,x)$$

utilizando como curva de integración la curva γ dada por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z - x = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Se trata de probar que

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \iint_S \overrightarrow{rot(\mathbf{F})}dS$$

es decir, que

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \iint_S \overrightarrow{rot(\mathbf{F})} \cdot \vec{\mathbf{n}}dS$$

siendo S una superficie que tenga por borde la curva γ (por ejemplo, podemos tomar como superficie S el plano $z - x = 0$, restringido a la intersección con el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$).

Si calculamos en primer lugar la integral de superficie, tendremos que al ser

$$\overrightarrow{rot(\mathbf{F})} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)$$

y ser

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad dS == \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy$$

entonces

$$\iint_S \overrightarrow{rot(\mathbf{F})} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \iint_D 0\sqrt{2}\, dxdy = 0$$

Si calculamos ahora la integral de línea, teniendo en cuenta que la curva γ viene dada por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con el plano $z - x = 0$, dicha curva tendrá por parametrización

$$\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), a\cos(t))$$

(las dos primeras componentes vienen dadas por la parametrización del cilindro, mientras que la tercera coincide con la 1ª, al ser $z - x = 0$)..

Por lo tanto

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \oint_\gamma \{ydx + zdy + xdz\} = \int_0^{2\pi} (a\sin(t)(-a\sin(t)) + a\cos(t)a\cos(t) + a\cos(t)(-a\sin(t)))dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) + \cos^2(t) - \sin(t)\cos(t))dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t)\right)dt = \ldots = 0$$

– –

PROBLEMA 3. Determinar la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{8}{-z^3 + 5z^2 - 7z + 3}$$

en el anillo $0 < |z - 2| < 1$.

SOLUCIÓN:

Se trata de expresar este cociente como potencias (positivas y/o negativas) de$(z - 2)$. Si descomponemos en fracciones simples

$$f(z) = \frac{8}{-z^3 + 5z^2 - 7z + 3} = \frac{-8}{z^3 - 5z^2 + 7z - 3} =$$
$$= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-3} = \ldots = \frac{2}{z-1} + \frac{4}{(z-1)^2} + \frac{-2}{z-3}$$

y entonces hemos de expresar cada una de estas fracciones como potencias de $(z - 2)$:

Se tiene que

$$\frac{2}{z-1} = \frac{2}{(z-2)+1} = \frac{2}{1+(z-2)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n$$

y este desarrollo es válido siempre que $|z - 2| < 1,$ cosa que ocurre en la región que estamos considerando (donde recordamos que nos hemos basado en el conocido desarrollo: $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, siempre que $|z| < 1$).

De igual forma

$$\frac{4}{(z-1)^2} = 4\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{z-1}\right) = \text{por el desarrollo anterior} =$$

$$= -4\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\right) = -4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{d}{dx}(z-2)^n =$$

$$= -4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(z-2)^{n-1}$$

que también es válido en la región considerada (al ser la derivada de un desarrollo válido en esa región).

Por último

$$\frac{-2}{z-3} = \frac{-2}{(z-2)-1} = \frac{2}{1-(z-2)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$$

y este desarrollo es válido siempre que $|z-2| < 1,$ cosa que ocurre en la región que estamos considerando (donde recordamos que hemos utilizando el desarrollo dado por $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, siempre que $|z| < 1$).

Si entonces sumamos todos los desarrollos, tendremos

$$f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n - 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(z-2)^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$$

Notemos que no aparece ninguna potencia de $(z-2)$ negativa, lo que es debido a que la función $f(z)$ no tiene a $z_0 = 2$ como punto singular; es decir, su desarrollo de Laurent como potencias de $(z-2)$ coincidirá con su desarrollo de Taylor en el punto $z_0 = 2.$ Por lo tanto, otra forma de haber calculado dicho desarrollo sería el de usar la fórmula de Taylor para la función $f(z)$ en el punto $z_0 = 2$ (aunque, en este caso, tendríamos el inconveniente de tener que calcular la derivada $n-sima$ del cociente dado por $f(z)$).

– –

PROBLEMA 4. Aplicar el Teorema de los residuos para calcular las siguientes integrales:

(a) **La integral**

$$\oint_{C_\alpha} \frac{g(z)}{(z-a_1)(z-a_2)}dz$$

donde $g(z)$ **es una función entera,** a_1 **y** a_2 **son dos puntos de** $\mathbb{C}$ **distintos, y** $\alpha(t) = (1+|a_1|+|a_2|)e^{-it}$**, con** $t \in [0,2\pi]$.

(b) **La integral**

$$\oint_{C_\beta} \frac{(z+1)e^z}{z^7(z^7-\pi i)}dz$$

donde $\beta(t) = e^{it}$**, con** $t \in [0,2\pi]$.

SOLUCIÓN:

(a) La curva $\alpha(t)$ es la circunferencia centrada en el origen y de radio $1+|a_1|+|a_2|$ (aunque recorrida en sentido inverso). Por tanto, como $g(z)$ es una función entera (analítica), el cociente $\frac{g(z)}{(z-a_1)(z-a_2)}$ tiene, en la región encerrada por $\alpha(t)$, dos puntos singulares aislados, que son a_1 y a_2, que sabemos que son polos simples. De esta forma

$$\oint_{C_\alpha} \frac{g(z)}{(z-a_1)(z-a_2)}dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,a_1) + \mathrm{Res}(f,a_2))$$

y puesto que

$$\mathrm{Res}(f,a_1) = \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} = \frac{g(a_1)}{a_1-a_2} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Res}(f,a_2) = \frac{P(a_2)}{Q'(a_2)} = \frac{g(a_2)}{a_2-a_1}$$

se tendrá que

$$\oint_{C_\alpha} \frac{g(z)}{(z-a_1)(z-a_2)}dz = 2\pi i\left(\frac{g(a_1)}{a_1-a_2} + \frac{g(a_2)}{a_2-a_1}\right)$$

(b) En el círculo unidad la función $f(z) = \frac{(z+1)e^z}{z^7(z^7-\pi i)}$ tiene un único punto singular aislado $z_0 = 0$, que es un polo de orden 7 (ya que anula 7 veces al denominador y ninguna vez al numerador; además las 7 raíces séptimas de πi están fuera del círculo unidad). Por lo tanto

$$\oint_{C_\beta} \frac{(z+1)e^z}{z^7(z^7-\pi i)}dz = 2\pi i\mathrm{Res}(f,0)$$

¿Cómo calcularemos entonces $\mathrm{Res}(f,0)$?: No lo vamos a realizar con la fórmula de las derivadas (recordamos que, como hemos visto en teoría, se tiene que, para un polo de orden n, $Res(f,z_0) = \dfrac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$), puesto que habríamos de derivar 6 veces antes de calcular el límite. Por tanto, lo mejor es calcular dicho residuo calculando el coeficiente del término que lleva $\frac{1}{z}$ en el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$:

Puesto que se tiene que

$$f(z) = \frac{(z+1)e^z}{z^7(z^7-\pi i)} = (z+1)e^z\frac{1}{z^7(z^7-\pi i)} = (z+1)e^z\left(\frac{A}{z^7} + \frac{B}{(z^7-\pi i)}\right) = \ldots =$$

$$= (z+1)e^z\left(\frac{i/\pi}{z^7} + \frac{-i/\pi}{(z^7-\pi i)}\right) = (z+1)e^z\frac{i/\pi}{z^7} + (z+1)e^z\frac{-i/\pi}{(z^7-\pi i)}$$

y el segundo de los sumandos es función analítica en $z_0 = 0$, se verificará que

$$\mathrm{Res}(f,0) = \mathrm{Res}\left((z+1)e^z\frac{i/\pi}{z^7},0\right) = \frac{7}{720}\frac{i}{\pi}$$

donde el residuo de esta función lo hemos calculado obteniendo el coeficiente de $\frac{1}{z}$ en el desarrollo de la misma. Notemos que solo hemos de poner el desarrollo de McLaurin para la función e^z y observar cual es el término que lleva $\frac{1}{z}$ en todo el desarrollo:

$$(z+1)e^z\frac{i/\pi}{z^7} = (z+1)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)\frac{i/\pi}{z^7}$$

y si desarrollamos este producto y observamos el coeficiente del término $\frac{1}{z}$, resulta que $\mathrm{Res}(f,0) = \frac{7}{720}\frac{i}{\pi}$.

De esta manera,

$$\oint_{C_\beta} \frac{(z+1)e^z}{z^7(z^7-\pi i)}dz = 2\pi i\mathrm{Res}(f,0) = 2\pi i\frac{7}{720}\frac{i}{\pi} = -\frac{7}{360}$$

– –