Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final SEPTIEMBRE. Curso 2012/2013
(03/09/2013)
ENUNCIADO Y RESUELTO

CUESTIONES TEÓRICAS.

1. **Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas**

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = (r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + z^2\sin(\theta))\vec{\mathbf{e}}_r - (r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) - z^2\cos(\theta))\vec{\mathbf{e}}_\theta + r\cos(z)\vec{\mathbf{k}}$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ **es la base de vectores móviles de** $\mathbb{R}^3$ **asociada a dichas coordenadas:**

1.a Escribe la expresión del campo rotacional $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ **en coordenadas cartesianas.**

1.b Determina el valor de la integral del $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ **sobre la superficie** S **(**Figura 1 siguiente**)**

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + \frac{y^2}{2+\cos(\pi z)} = z,\ 0 < z < 4\right\}$$

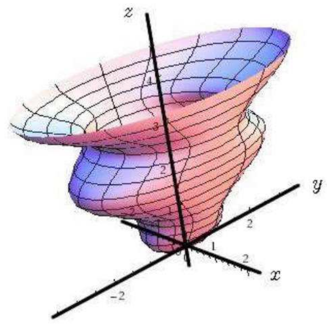

Figura 1

2. **Dada la función**

$$f(x+y\mathbf{i}) = y\sin(x) + \frac{y^2}{2}\mathbf{i}$$

indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente la respuesta:

2.a La función f **es derivable en** $2\pi + \mathbf{i}$**.**

2.b Existe una sucesión de números complejos (a_n) **de forma que**

$$f(z) = \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1$$

SOLUCIÓN:

(1.a) Si pasamos el campo $\vec{\mathbf{F}}$ a coordenadas cartesianas, obtendremos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + z^2\sin(\theta)) \\ -(r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) - z^2\cos(\theta)) \\ r\cos(z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r^2\sin\theta\cos\theta \\ z^2 \\ r\cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ z^2 \\ \sqrt{x^2+y^2}\,\cos z \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = xy\vec{i} + z^2\vec{j} + \sqrt{x^2+y^2}\,\cos z\vec{k}$$

Por tanto

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & z^2 & \sqrt{x^2+y^2}\,\cos z \end{vmatrix} = \left(\frac{y\cos z}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2z, -\frac{x\cos z}{\sqrt{x^2+y^2}}, -x \right)$$

(1.b) Nos piden calcular $\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)dS$, que en lugar de calcular de forma directa lo haremos por el Th de Stokes, es decir

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)dS = \oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr}$$

siendo γ la curva frontera de S, que viene dada por $x^2 + \frac{y^2}{3} = 4$, o lo que es lo mismo $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$. Así, como una parametrización de dicha curva es

$$\gamma(t) = \left(2\cos(t), 2\sqrt{3}\,\sin(t), 4\right),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

tendremos que

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} = \oint_\gamma \left(xy, z^2, \sqrt{x^2+y^2}\,\cos z\right) \cdot (dx, dy, dz) = \oint_\gamma \left\{xydx + z^2dy + \sqrt{x^2+y^2}\,\cos zdz\right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\sqrt{3}\,\cos(t)\sin(t)(-2\sin(t))dt + 4^2\left(2\sqrt{3}\,\cos(t)\right)dt + (\dots)\cdot 0dt =$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

(2.a) Para ver si f es derivable en z_0 tenemos que ver si se verifican en dicho punto las ecuaciones de Cauchy Riemann, es decir, comprobar si en $z_0 = 2\pi + \mathbf{i}$ se verifican que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, siendo $u(x,y) = y\sin(x)$; $v(x,y) = \frac{y^2}{2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,1) = 1; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}(2\pi,1) = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(2\pi,1) = 0; \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial v}{\partial x}(2\pi,1) = 0$$

Por tanto, la función SI es derivable en dicho punto.

(2.b) Lo que nos quiere decir el enunciado de (2.b) es que veamos si f admite un desarrollo en serie de McLaurin (es decir, es analítica en el punto 0) y si su valor en $z_0 = 0$ es 0. Si verificamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann vistas en el apartado anterior, vemos que efectivamente éstas se cumplen en $z_0 = 0$, por lo que f es analítica en el punto z_0; calculemos entonces $f(z_0)$:

$$f(z_0) = f(0) = f(0,0) = 0 \cdot \sin 0 + \frac{0^2}{2}\mathbf{i} = 0$$

Por tanto, el enunciado es Verdadero.

– –

PROBLEMA 1: Calcular la integral del campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y^2 + \sin^2(\pi x^2 + 1), z + \cos(y^2), y + \log(1 + x^2))$$

a lo largo de la curva obtenida al intersectar el paraboloide de sección elíptica

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{4} = z\right\}$$

con el plano $z = \pi$ (Figura 2 siguiente). Justificar el procedimiento utilizado.

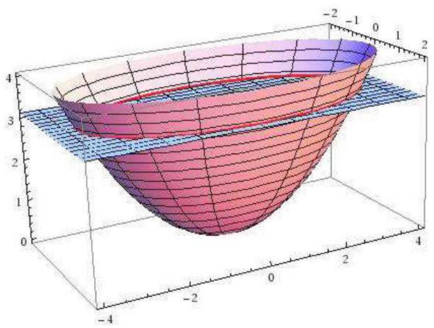

Figura 2: Intersección de $\mathcal{P}$ con $z = \pi$

Ayuda: *Para describir una región cuya geometría se asemeja a un cilindro de sección elíptica, pueden usarse coordenadas cilíndricas de la forma (r,θ,z), que se relacionan con las cartesianas mediante las igualdades*

$$x = a(z) r \cos(\theta); \qquad y = b(z) r \sin(\theta); \qquad z = z$$

siendo $a(z)$, $b(z)$ los semiejes de las secciones elípticas que pueden variar con la altura z. El rango máximo de los valores que pueden tomar estas coordenadas es $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. El determinante jacobiano es en este caso de la forma $J = a(z)b(z)r$.

SOLUCIÓN: Para no tener que calcular de forma directa la integral que nos piden, usaremos el teorema de Stokes, puesto que se verifica

$$\oint_\gamma \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_S rot\left(\overrightarrow{\mathbf{F}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}_S} dS$$

siendo S una superficie que tiene a γ como borde. Así, podemos tomar como S el plano $z = \pi$, por lo que $\overrightarrow{\mathbf{n}_S} = (0,0,1)$.

Si efectuamos los oportunos cálculos, resulta

$$rot\left(\overrightarrow{\mathbf{F}}\right) = \ldots = \left(0, \frac{-2x}{1+x^2}, 2y\right)$$

de manera que

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \vec{\mathbf{n}}_S = \left(0, \frac{-2x}{1+x^2}, 2y\right) \cdot (0,0,1) = 2y$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 0^2 + 0^2}\, dxdy = dxdy$$

Así

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} = \iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \vec{\mathbf{n}}_S dS = \iint_D 2ydxdy$$

con $D : \frac{x^2}{\pi} + \frac{y^2}{4\pi} = 1$, por lo que en la integral doble anterior realizaremos (según la indicación del ejercicio) el cambio de variables dado por

$$x = a(z)r\cos(\theta) = \sqrt{\pi}\, r\cos(\theta);\ y = b(z)r\sin(\theta) = 2\sqrt{\pi}\, r\sin(\theta);\ J = a(z)b(z)r = 2\pi r$$

De esta forma

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} = \iint_D 2ydxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2 \cdot 2\sqrt{\pi}\, r\sin(\theta) \cdot 2\pi r dr = \ldots = 0$$

_ _

PROBLEMA 2. Dada la superficie (Figura 3 siguiente)

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(2+x)^2} = 1\right\}$$

y el campo de temperaturas

$$T(x,y,z) = z\left(x^2 + (y-1)^2\right)$$

determinar:

(a) La temperatura de la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitada por A mediante el cálculo de la integral de volumen

$$\iiint_\Omega T(x,y,z)\ dxdydz$$

(b) El flujo de calor a través de la superficie A, suponiendo por simplicidad que la conductividad térmica es constante e igual a 1, es decir, se trata de calcular la integral de superficie

$$\iint_{\mathcal{A}} \nabla T \cdot dS$$

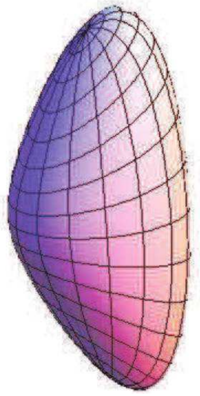

Figura 3: Superfice $\mathcal{A}$

Ayuda: Para describir una región cuya geometría se asemeja a un elipsoide con el tercer eje variable,

$$\mathcal{Q} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{g(x,y)^2} = 1\right\}$$

funcionan bien las coordenadas elipsoides (r,θ,φ)*, que se relacionan con las cartesianas mediante las igualdades*

$$x = ra\cos(\theta)\sin(\varphi);\ y = rb\sin(\theta)\sin(\varphi);\ z = r \cdot g(r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi)) \cdot \cos(\varphi)$$

El rango máximo de los valores que pueden tomar estas coordenadas es $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$, *siendo el determinante jacobiano el dado por*

$$J = a \cdot b \cdot g(r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi)) \cdot r^2\sin(\varphi)$$

SOLUCIÓN:

(2.a) Se trata de calcular la integral triple

$$\iiint_\Omega T(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_\Omega z\left(x^2 + (y-1)^2\right)\ dxdydz$$

para lo que usaremos el cambio de variable indicado. Como el volumen está limitado por $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(2+x)^2} = 1$, se tratará del cambio dado por

$$x = r \cdot 1 \cdot \cos(\theta)\sin(\varphi);\ y = r \cdot 1 \cdot \sin(\theta)\sin(\varphi);\ z = r(2 + r\cos(\theta)\sin(\varphi))\cos(\varphi)$$

con

$$0 < r < 1,\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ \text{y}\ J = 1 \cdot 1 \cdot (2 + r\cos(\theta)\sin(\varphi)) \cdot r^2\sin(\varphi)$$

Entonces

$$\iiint_\Omega z\left(x^2 + (y-1)^2\right)\ dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \left[r(2 + r\cos(\theta)\sin(\varphi))\cos(\varphi)\left((r\cos(\theta)\sin(\varphi))^2 + (r\sin(\theta)\sin(\varphi) - 1)^2\right) \cdot\right.$$

$$\left. \cdot (2 + r\cos(\theta)\sin(\varphi))r^2\sin(\varphi)\right]dr = \ldots =$$

(2.b) Al ser una superficie cerrada, la integral de superficie pedida la calcularemos mediante el teorema de la divergencia (Gauss). De esta forma

$$\iint_{\mathcal{A}} \nabla T \cdot dS = \iiint_{\Omega} div(\nabla T)\ dxdydz$$

Puesto que

$$\nabla T = \left(2xz, 2(y-1)z, x^2 + (y-1)^2\right)$$

se tiene que

$$div(\nabla T) = 2z + 2z + 0 = 4z$$

por lo que

$$\iint_{\mathcal{A}} \nabla T \cdot dS = \iiint_{\Omega} div(\nabla T)\ dxdydz = \iiint_{\Omega} 4z\ dxdydz$$

siendo el cambio de variable a realizar el mismo del apartado anterior. Por tanto

$$\iint_{\mathcal{A}} \nabla T \cdot dS = \iiint_{\Omega} 4z\ dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 4r(2 + r\cos(\theta)\sin(\varphi))\cos(\varphi) \cdot (2 + r\cos(\theta)\sin(\varphi))r^2 \sin(\varphi)\ dr$$

$$= \ldots$$

– –

PROBLEMA 3. Sea la función

$$g(z) = \frac{z}{(z^2 + \mathbf{i})(z+1)}$$

Calcular su desarrollo en serie de potencias alrededor del punto $z = 0$ ¿Cual es el radio de convergencia de dicha serie? ¿Tiene alguna singularidad? En caso afirmativo, ¿de qué tipo?. ¿Qué vale el residuo?

SOLUCIÓN:

Podemos descomponer en fracciones simples en la forma

$$g(z) = \frac{z}{(z^2 + \mathbf{i})(z+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz + C}{z^2 + \mathbf{i}}$$

y operando se llega a $A = \frac{-1}{1+\mathbf{i}}$, $B = \frac{1}{1+\mathbf{i}}$, $C = \frac{\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$, por lo que

$$g(z) = \frac{-1}{1+\mathbf{i}}\frac{1}{z+1} + \left(\frac{1}{1+\mathbf{i}}z + \frac{\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right)\frac{1}{z^2 + \mathbf{i}}$$

y solo tenemos que desarrollar las fracciones $\frac{1}{z+1}$ y $\frac{1}{z^2+\mathbf{i}}$ como potencias de z. Puesto que se verifica

$$\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$$

serie que es convergente siempre que $|z| < 1$, y además

$$\frac{1}{z^2 + \mathbf{i}} = \frac{1}{\mathbf{i}}\frac{1}{\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\mathbf{i}}\left(1 - \left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)^4 - \left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)^6 + \ldots\right)$$

siendo esta última serie convergente cuando $\left|\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)^2\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1.$. Solo hemos de sustituir estos dos desarrollos en la expresión de g como suma de fracciones simples para obtener el resultado pedido. Notemos que el radio de convergencia es 1. Además, y como sabemos desde el principio, la función tiene por puntos singulares aislados las raíces del denominador, es decir $z = \pm\sqrt{-\mathbf{i}}$ y $z = -1$. Estas singularidades son polos simples, ya que son ceros simples del denominador (y el numerador no se anula en ellas). Por último, para calcular el residuo de la función en 0 (o en cualquiera otra de las singularidades), solo hemos de aplicar que

$$Resf(0) = \frac{P(0)}{Q'(0)} = 0$$

– –

PROBLEMA 4. Sea la región circular

$$D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \alpha\}$$

con $\alpha > 0$. Discutir en función del parámetro $\alpha > 0$ el valor de la integral

$$\int_{\partial D_\alpha^+} f(z)\, dz$$

donde ∂D_α^+ denota la frontera del recinto $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ orientada positivamente y f es la función dada por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)}, \text{ si } |z| < 2 \\ \mathrm{Im}(z) + 2\mathbf{i}\,\mathrm{Re}(z), \text{ si } |z| \geq 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Si $|z| < 2$, la función tiene por singularidades los puntos $z_0 = 0$ (que es evitable al ser también cero del numerador), $z_1 = 1$ y $z_{2,3} = \pm\mathbf{i}$ (que son polos simples al ser ceros simples del denominador). Por tanto, distinguiremos los casos:

- Si $0 < \alpha < 1$:

$$\int_{\partial D_\alpha^+} f(z)\, dz = 2\pi\mathbf{i}Resf(0) = 0$$

- Si $1 < \alpha < 2$:

$$\int_{\partial D_\alpha^+} f(z)\, dz = 2\pi\mathbf{i}(Resf(0) + Resf(1) + Resf(\mathbf{i}) + Resf(-\mathbf{i}))$$

donde cada uno de estos residuos se puede calcular usando $Resf(z) = \frac{P(z)}{Q'(z)}$.

Si $|z| \geq 2$, la función es

$$f(z) = \mathrm{Im}(z) + 2\mathbf{i}\,\mathrm{Re}(z) = y + \mathbf{i}2x$$

pero esta función no tiene singularidades aisladas, sino que no es analítica en ningún punto (puede verse facilmente que no cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ningún punto). Por tanto, la integral pedida no puede calcularse usando el teorema de los residuos, sino que habría que calcularla de manera directa (tomando una parametrización del camino $|z| = \alpha$: $\gamma(t) = (\alpha\cos(t), \alpha\sin(t))$). Así,

$$\int_{\partial D_\alpha^+} f(z)\, dz = \int_{|z|=\alpha} (y + \mathbf{i}2x)(dx + \mathbf{i}dy) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\alpha\sin(t) + \mathbf{i}2\alpha\cos(t))(-\alpha\sin(t) + \mathbf{i}\alpha\cos(t))dt = \ldots = -3\pi\alpha^2$$