Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final JUNIO. Curso 2012/2013
(12/06/2013)
ENUNCIADO Y RESUELTO

CUESTIONES TEÓRICAS.

1. **Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas**

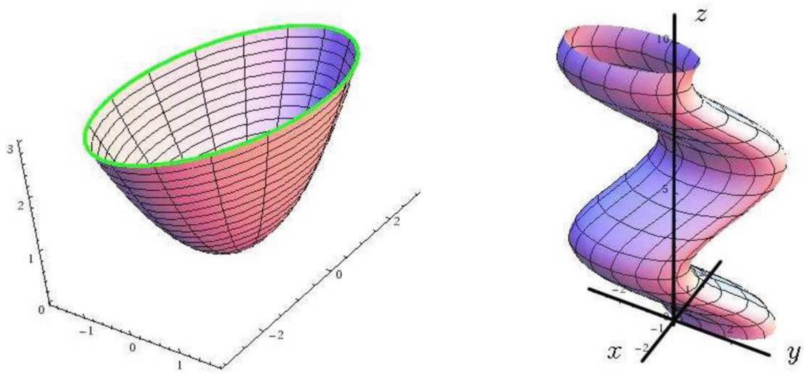
$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\vec{\mathbf{e}_r} - r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}_\theta} + (r\sin(\theta) + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}_r},\vec{\mathbf{e}_\theta},\vec{\mathbf{k}}\right\}$ **es la base de vectores móviles de** $\mathbb{R}^3$ **asociada a dichas coordenadas:**

1.a **Escribe el campo vectorial** $div\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ **en coordenadas cartesianas.**

1.b **Determina el valor de la integral del campo vectorial** $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ **a lo largo de la curva borde de la superficie** S **(**Figura 1 siguiente**)**

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + \frac{y^2}{3} = z, \ 0 < z < 3\right\}$$



Figuras 1 y 2

2. **Dada la función**

$$f(x+y\mathbf{i}) = y\sin(x) + \frac{y^2}{2}\mathbf{i}$$

y el número complejo $z_0 = 2\pi + \mathbf{i}$, **indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente la respuesta:**

2.a **La función** f **es derivable en** z_0**.**

2.b **Existe una sucesión de números complejos** (a_n) **de forma que**

$$f(z) = \frac{\mathbf{i}}{2} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad |z-z_0| < 1$$

SOLUCIÓN:

(1.a) En el examen de Febrero 2013 está pasado el campo $\vec{\mathbf{F}}$ a coordenadas cartesianas, obteniéndose

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (xy, 0, y+\cos(z^2))$$

Por tanto

$$div\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = y + 0 - 2z\sin(z^2)$$

(1.b) Nos piden calcular

$$\oint_\gamma rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_\gamma (1,0,x) \cdot (dx,dy,dz)$$

siendo γ la curva frontera de S, que viene dada por $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$. Así, como una parametrización de dicha curva es

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{3}\cos(t), 3\sin(t), 3\right),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

tendremos que

$$\oint_\gamma rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_\gamma (1,0,x) \cdot (dx,dy,dz) = \oint_\gamma dx + xdz =$$
$$= \int_0^{2\pi} -\sqrt{3}\sin(t)dt + \sqrt{3}\cos(t) \cdot 0dt = -\sqrt{3}\int_0^{2\pi} \sin(t)dt = 0$$

(2.a) Para ver si f es derivable en z_0 tenemos que ver si se verifican en dicho punto las ecuaciones de Cauchy Riemann, es decir, comprobar si en z_0 se verifican que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, siendo $u(x,y) = y\sin(x)$; $v(x,y) = \frac{y^2}{2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,1) = 1; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}(2\pi,1) = 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(2\pi,1) = 0; \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial v}{\partial x}(2\pi,1) = 0$$

Por tanto, la función SI es derivable en dicho punto.

(2.b) Lo que nos quiere decir el enunciado de (2.b) es que veamos si f admite un desarrollo en serie de Taylor en el punto z_0 y si su valor en dicho punto es el dado por $\frac{\mathbf{i}}{2}$. Ya hemos visto (apartado 2.a) que efectivamente f es analítica en el punto z_0; calculemos entonces $f(z_0)$:

$$f(z_0) = f(2\pi + \mathbf{i}) = f(2\pi,1) = 1 \cdot \sin(2\pi) + \frac{1^2}{2}\mathbf{i} = \frac{\mathbf{i}}{2}$$

Por tanto, el enunciado es Verdadero.

– –

PROBLEMA 1: Dada la superficie cilíndrica (Figura 2 anterior)

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{(x-\cos(z))^2}{4} + (y-\cos(z))^2 = 1,\ 0 < z < 10\right\}$$

calcular el flujo de calor a través de la misma que genera el campo de temperaturas

$$T(x,y,z) = z\left(x^2 + (y-1)^2\right)$$

suponiendo por simplicidad que la conductividad térmica es constante e igual a uno, es decir, calcular la integral de superficie

$$\iint_{\mathcal{A}} \nabla T \cdot dS$$

Justificar el procedimiento utilizado.

Ayuda: *Para describir una región cuya geometría se asemeja a un cilindro de sección elíptica con centro y semiejes variables con la altura pueden usarse coordenadas cilíndricas de la forma* (r,θ,z)*, que se relacionan con las cartesianas mediante las igualdades*

$$x = p(z) + a(z)r\cos(\theta); \qquad y = q(z) + b(z)r\sin(\theta); \qquad z = z$$

siendo $a(z)$, $b(z)$ *los semiejes de las secciones elípticas y* $(p(z),q(z))$ *las coordenadas del centro. El rango máximo de los valores que pueden tomar estas coordenadas es* $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. *El determinante jacobiano es en este caso de la forma* $J = a(z)b(z)r$.

SOLUCIÓN: Sea $\vec{F} = \overrightarrow{\nabla T} = \left(2xz, 2(y-1)z, x^2 + (y-1)^2\right)$. En lugar de calcular la integral de superficie de forma directa, y sobre todo teniendo en cuenta la indicación que nos dan (que nos servirá para hacer un cambio de variable en una integral triple), vamos a aplicar el teorema de Gauss, de forma, que si tomamos $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, siendo $S_1 = \mathcal{A}$, S_2 la superficie (tapa inferior) $z = 0$, y S_3la superficie (tapa superior) $z = 10$. De esta forma, el flujo a través de $\mathcal{A}$ será $\Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_S - \Phi_{S_2} - \Phi_{S_3}$, donde Φ_S lo calcularemos usando el teorema de Gauss y Φ_{S_1} y Φ_{S_2} los obtendremos de forma directa.

- Para Φ_S :

$$\Phi_S = \iint_S \vec{F} \cdot dS = \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz = \iiint_V (2z + 2z + 0) dxdydz = 4\iiint_V zdxdydz$$

  Esta integral triple la resolvemos usando las indicaciones que nos dan: Observando la ecuación de S, notamos que las coordenadas del centro son $(p(z),q(z)) = (\cos(z),\cos(z))$, mientras que los semiejes vienen dados por $(a(z),b(z)) = (2,1)$. Por tanto, hemos de realizar el cambio

$$x = p(z) + a(z)r\cos(\theta) = \cos(z) + 2r\cos(\theta); \; y = q(z) + b(z)r\sin(\theta) = \cos(z) + r\sin(\theta); z = z$$

  siendo el jacobiano el dado por $J = a(z)b(z)r = 2r$. Aplicando este cambio, será

$$\Phi_S = 4\iiint_V zdxdydz = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{10} z \cdot 2rdz = \ldots = 400\pi$$

- Para Φ_{S_2} :

$$\Phi_{S_2} = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot dS_2 = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{n_{S_2}} dS_2 = -\iint_{D_2} \left(x^2 + (y-1)^2\right) dxdy$$

  puesto que $\overrightarrow{n_{S_2}} = (0,0,-1)$, y siendo D_2 la proyección (tapa inferior) de la superficie sobre el plano $z = 0$, y que viene dada por

$$\frac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$$

  Por tanto, esta integral doble la resolveremos usando el cambio a coordenadas polares generalizadas (D_2 es una elipse centrada en $(1,1)$ y de semiejes $a = 2$ y $b = 1$)

$$x = 1 + 2r\cos(\theta); \; y = 1 + r\sin(\theta); \; J = 2r$$

  (Notemos que es el mismo cambio que nos dan en la indicación, particularizado a la elipse D_2). Entonces

$$\begin{aligned}\Phi_{S_2} &= -\iint\limits_{D_2}\left(x^2+(y-1)^2\right)dxdy = \\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left((1+2r\cos(\theta))^2+(1+r\sin(\theta)-1)^2\right)2rdr = \\ &= -\int_0^{2\pi}\left(\frac{8}{3}\cos\theta+\frac{3}{4}\cos 2\theta+\frac{9}{4}\right)d\theta = -\frac{9}{2}\pi\end{aligned}$$

- Para Φ_{S_3} :

$$\Phi_{S_3} = \iint\limits_{S_3}\vec{F}\bullet dS_3 = \iint\limits_{S_3}\vec{F}\bullet\overrightarrow{n_{S_3}}dS_3 = \iint\limits_{D_3}\left(x^2+(y-1)^2\right)dxdy$$

puesto que $\overrightarrow{n_{S_3}} = (0,0,1)$, y siendo D_3 la proyección de la superficie (tapa superior) sobre el plano $z = 0$, y que viene dada por

$$\frac{(x-\cos(10))^2}{4}+(y-\cos(10))^2 = 1$$

Esta integral doble la resolveremos usando el cambio a coordenadas polares generalizadas (D_3 es una elipse centrada en $(\cos(10),\cos(10))$ y de semiejes $a = 2$ y $b = 1$)

$$x = \cos(10)+2r\cos(\theta);\ y = \cos(10)+r\sin(\theta);\ J = 2r$$

(Notemos de nuevo que es el mismo cambio que nos dan en la indicación, particularizado a la elipse D_1). Entonces

$$\begin{aligned}\Phi_{S_3} &= \iint\limits_{D_2}\left(x^2+(y-1)^2\right)dxdy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1\left((\cos(10)+2r\cos(\theta))^2+(\cos(10)+r\sin(\theta)-1)^2\right)2rdr = \\ &= \frac{13}{2}\pi-4\pi\cos 10+2\pi\cos 20\end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{A}} &= \Phi_S-\Phi_{S_2}-\Phi_{S_3} = 400\pi-\left(-\frac{9}{2}\pi\right)-\left(\frac{13}{2}\pi-4\pi\cos 10+2\pi\cos 20\right) = \\ &= 398\pi+4\pi\cos 10-2\pi\cos 20\end{aligned}$$

_ _

PROBLEMA 2. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el recinto limitado por la circunferencia unidad y la parábola $y = 2\sqrt{3}x^2$ (Figura 3). **Calcular la integral**

$$\int_\gamma \vec{F}\bullet dr$$

donde

$$\vec{F}(x,y) = (-(x-\pi)y^2+\cos(x^2),\log(1+y^2))$$

y γ es la frontera de recinto D (recorrida en sentido positivo).

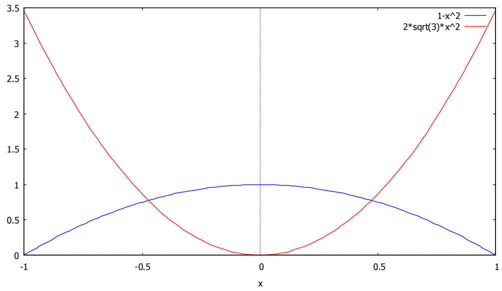


Figura 3

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular una integral de línea, en una línea cerrada que encierra un área. Por tanto, en lugar de realizar la integral de forma directa como suma de dos integrales de línea (una a través del trozo de parábola y otra a través del trozo de circunferencia), será más rápido aplicar el teorema de Green en el plano (ya que, evidentemente, la integral de línea va a ser dependiente del camino de integración y éste es cerrado). Así, aplicando dicho teorema, tendremos

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (0 - 2y(\pi - x))dxdy$$

y si resolvemos esta integral doble poniendo sus respectivos límites de integración

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot dr = -2 \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{2\sqrt{3}x^2}^{\sqrt{1-x^2}} y(\pi - x)dy =$$

$$= -2 \int_{-1/2}^{1/2} \left(x^4(6x - 6\pi) + (1 - x^2)\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x \right) \right) dx = -\frac{23}{30}\pi$$

– –

PROBLEMA 3. Resolver los siguientes apartados:

(3.a) Calcular el conjunto de los logaritmos del número complejo $1 + 2\mathbf{i}$, **es decir resolver en** $\mathbb{C}$ **la ecuación**

$$e^z = 1 + 2\mathbf{i}$$

(3.b) Sea la función

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

Calcular su desarrollo alrededor del punto $z = 0$ **¿Cual es el radio de convergencia de dicha serie? ¿Tiene alguna singularidad aislada? ¿De qué tipo?**

SOLUCIÓN:

(3.a) Sabemos que

$$1 + 2\mathbf{i} = \left(\sqrt{5} \right)_{\arctan(2)}$$

por lo que

$$\log(1 + 2\mathbf{i}) = \log\left(\left(\sqrt{5} \right)_{\arctan(2)} \right) = \log\left(\sqrt{5} \right) + i(\arctan(2) + 2k\pi)$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

(3.b) Se verifica

$$g(z) = \frac{z}{z^2+1} = z\frac{1}{1+z^2} = z(1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \ldots) =$$
$$= z - z^3 + z^5 - z^7 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{2n-1}$$

(puesto que la fracción $\frac{1}{1+z^2}$ corresponde a la suma de los infinitos términos de la serie geométrica que aparece desarrollada en el paréntesis). Además, sabemos que esta serie geométrica es convergente siempre que su razón sea menor que la unidad, por lo que ésta será convergente si $|-z^2| < 1$, lo que equivale a que $|z| < 1$.

La serie tiene por singularidades aisladas las raíces del denominador, es decir $z = \pm\mathbf{i}$. Estas singularidades son polos simples, ya que son ceros simples del denominador (y el numerador no se anula en ellas).

– –

PROBLEMA 4. Sea el conjunto

$$D_\alpha = \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \alpha,\ \frac{1}{2} + \mathrm{Im}(z) > 0\right\}$$

con $\alpha > 0$. Discutir en función del parámetro $\alpha > 0$ el valor de la integral

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)(z^2-2z+2)}dz$$

donde ∂D_α^+ denota la frontera del recinto $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ orientada positivamente.

SOLUCIÓN: Las singularidades que tiene el denominador son $z_1 = 0,$ que es una singularidad evitable (puesto que también anula el numerador; además, se tiene que $\lim_{w\to 0} f(w) = 0$), $z_{2,3} = 1$ (polo doble), $z_{4,5} = \pm\,\mathbf{i}$ (polos simple) y $z_{6,7} = 1 \pm \mathbf{i}$ (también polos simples).

Pero de estas 7 singularidades, solamente $z_1 = 0,\ z_{2,3} = 1,\ z_4 = \mathbf{i}$ y $z_6 = 1 + \mathbf{i}$ verifican $\frac{1}{2} + \mathrm{Im}(z) > 0$ (Notemos que $z_5 = -\,\mathbf{i}$ y $z_7 = 1 - \mathbf{i}$ no están en el interior de dicha región, puesto que $\frac{1}{2} + \mathrm{Im}(z) < 0$). Por tanto, según los valores de $\alpha > 0$ distinguiremos:

- Si $0 < \alpha < 1$: Solo hay una singularidad dentro de la región, que es $z_1 = 0$. Así

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)(z^2-2z+2)}dz = 2\pi\mathbf{i}Resf(0) = 0$$

- Si $1 < \alpha < \sqrt{2}$: Hay 3 singularidades dentro de la región: $z_1 = 0,\ z_{2,3} = 1$ y $z_4 = \mathbf{i}$, por lo que

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)(z^2-2z+2)}dz = 2\pi\mathbf{i}(Resf(0) + Resf(1) + Resf(\mathbf{i}))$$

- Si $\alpha > \sqrt{2}$: Hay 4 singularidades dentro de la región: $z_1 = 0,\ z_{2,3} = 1,\ z_4 = \mathbf{i}$ y $z_6 = 1 + \mathbf{i}$, por lo que

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)(z^2-2z+2)}dz = 2\pi\mathbf{i}(Resf(0) + Resf(1) + Resf(\mathbf{i}) + Resf(1+\mathbf{i}))$$

Para finalizar, solo nos faltan por calcular cada uno de los respectivos residuos para sustituir en las expresiones anteriores:

$$Resf(0) = 0$$

$$Resf(1) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 1}[\quad] = \cos(1) - \sin(1)$$

$$Resf(\mathbf{i}) = \frac{p(\mathbf{i})}{q'(\mathbf{i})} = \frac{-\sin(1)}{8+4\mathbf{i}}$$

$$Resf(1+\mathbf{i}) = \frac{p(1+\mathbf{i})}{q'(1+\mathbf{i})} = \frac{\sin\left((1+\mathbf{i})^2\right)}{}$$