Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final Febrero. Curso 2012/2013
(24/01/2013)
ENUNCIADO Y RESUELTO

CUESTIONES TEÓRICAS.

1. **Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas**

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\vec{\mathbf{e}}_r - r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}}_\theta + (r\sin(\theta)+\cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ **es la base de vectores móviles de** $\mathbb{R}^3$ **asociada a dichas coordenadas:**

1.a Escribe el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ **en coordenadas cartesianas.**

1.b Determina el valor de la integral del campo vectorial $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ **sobre el semielipsoide** S **(**Figura 1 siguiente**) descrito por las ecuaciones**

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{3} + z^2 = 1,\ y < 0\right\}$$

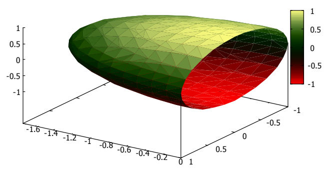


Figura 1

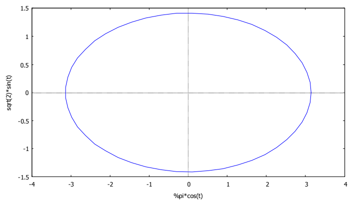


Figura 2

2. **Dada la función**

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2(z+\mathbf{i})}$$

indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente la respuesta:

2.a Existe una sucesión de números complejos (a_n) **de forma que**

$$f(z) = \frac{(1-\mathbf{i})\sin(1)}{2} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} a_n(z-1)^n, \qquad |z-1| < 1$$

2.b Se verifica la identidad

$$\int_\gamma f(w)dw = 2\pi\mathbf{i}$$

donde γ **es la elipse de ecuación (**Figura 2 anterior**)**

$$\gamma(t) = \pi\cos(t) + \mathbf{i}\sqrt{2}\sin(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

SOLUCIÓN:

(1.a) Hemos de aplicar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) \\ -r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) \\ (r\sin(\theta)+\cos(z^2)) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} r^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ r\sin\theta+\cos z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ y+\cos z^2 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = xy\,\vec{\mathbf{i}} + 0\,\vec{\mathbf{j}} + (y+\cos(z^2))\,\vec{\mathbf{k}}$$

(1.b) Como nos piden calcular

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS$$

en lugar de calcular esta integral de superficie de forma directa, aplicaremos el teorema de Stokes, por lo que

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = \oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr}$$

siendo γ la curva frontera de S, que viene dada por $x^2+z^2 = 1.$ Así, como una parametrización de dicha curva es

$$\gamma(t) = (\cos(t), 0, \sin(t)),\ 0 \le t \le 2\pi$$

tendremos que

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = \oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} = \oint_\gamma (xy, 0, y+\cos(z^2)) \cdot \vec{dr} =$$
$$= \int_0^{2\pi} (0,0,\cos(\sin^2(t))) \cdot (-\sin(t), 0, \cos(t))dt = \int_0^{2\pi} \cos(\sin^2(t))\cos(t)dt = 0$$

(2) Lo que nos quiere decir el enunciado de (2.a) es que veamos si f admite un desarrollo en serie de Taylor en el punto $z_0 = 1$ y si su valor de en el punto $z_0 = 1$ es el dado por $\frac{(1-\mathbf{i})\sin(1)}{2}$. Estudiemos ambas cosas por separado:

- Es cierto que f es analítica en el punto $z_0 = 1;$ ya que sus puntos singulares aislados son $z_1 = 0$ y $z_2 = -\mathbf{i}$ y ambos son polos simples (aunque $z_1 = 0$ anula dos veces al denominador, también anula una vez al numerador).
- Su valor en el punto $z_0 = 1$ viene dado por

$$f(1) = \frac{\sin(1)}{1^2(1+\mathbf{i})} = \frac{\sin(1)}{1+\mathbf{i}}\frac{1-\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}} = \frac{(1-\mathbf{i})\sin(1)}{2}$$

por lo que también es cierta la afirmación del enunciado.

Por las dos consideraciones anteriores, resulta que la afirmación de (2.a) es verdadera.

El apartado (2.b) nos pide que calculemos la integral de f, cosa que haremos por el teorema de los residuos. Así, como sus puntos singulares son $z_1 = 0$ y $z_2 = -\mathbf{i},$ y ambos son polos simples, tendremos

$$\mathrm{Res}f(0) = \lim_{z\to 0} z \cdot f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z(z+\mathbf{i})} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{z(z+\mathbf{i})} = \frac{1}{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$$

$$\mathrm{Res}f(-\mathbf{i}) = \frac{p(-\mathbf{i})}{q'(-\mathbf{i})} = \frac{\sin(-\mathbf{i})}{-1} = \sin(\mathbf{i})$$

Por tanto

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi\mathbf{i}(\mathrm{Res}f(0) + \mathrm{Res}f(-\mathbf{i})) = 2\pi\mathbf{i}(-\mathbf{i} + \sin(\mathbf{i})) \neq 2\pi\mathbf{i}$$

Por lo tanto la afirmación de (2.b) NO es cierta.

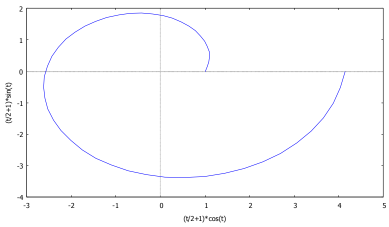
— —

PROBLEMA 1: Calcula la integral del campo vectorial

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = ((1+x)y^2 + \cos(x), \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y))$$

a lo largo de la curva parametrizada por la ecuación

$$\gamma(t) = \left(1+\frac{t}{2}\right)(\cos(t),)\sin(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$



Curva γ (Problema 1)

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular una integral de línea a través de una curva que no es cerrada. Además dicha integral de línea depende del camino (puesto que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$). Por ello, lo que vamos a hacer es cerrar el camino con γ_1, segmento de eje X que une los puntos extremo y origen de γ, de manera que tendremos el camino cerrado $\Gamma = \gamma \cup \gamma_1$, siendo por tanto

$$\oint_\Gamma = \int_\gamma + \int_{\gamma_1}$$

de manera que

$$\int_\gamma = \oint_\Gamma - \int_{\gamma_1}$$

donde la integral a lo largo de Γ la calcularemos por Green y la integral a lo largo de γ_1 la haremos directamente. Calculemos ambas por separado:

- A lo largo de γ_1 : tomamos como parametrización la dada por

$$\gamma_1(t) = (t,0),\ \text{con}\ t \in [1+\pi, 1]$$

(el punto origen de γ_1 es el resultado de sustituir t por $1+\pi$, ya que es en este punto donde finaliza Γ) por lo que

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \int_{1+\pi}^{1} ((1+t)0^2 + \cos(t), (\pi t - \log(1)\cos(0))) \cdot (dt, 0dt) =$$

$$= \int_{1+\pi}^{1} \cos(t)dt = \ldots = 2\sin(1)$$

- A lo largo de Γ : Aplicaremos el teorema de Green, por lo que

$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (\pi - 2(1+x)y)dxdy$$

siendo D la región encerrada por la curva Γ y recorrida en sentido positivo. Vamos a realizar un cambio a coordenadas polares en esta integral doble, teniendo en cuenta que

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta);\ J = r;\ \text{siendo } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ mientras que } 0 \leq r \leq 1 + \frac{\theta}{2}$$

Así,

$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \iint_D (\pi - 2(1+x)y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1+\frac{\theta}{2}} ((\pi - 2(1 + r\cos(\theta))r\sin(\theta))r)dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\theta}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(1+\frac{\theta}{2}\right)^3 \cos(\theta)\sin(\theta) - \frac{1}{2}\left(1+\frac{\theta}{2}\right)^4 \sin(\theta) \right] d\theta =$$

$$= \ldots = -\frac{(44\pi^4 + 144\pi^3 - 33\pi^2 - 354\pi}{96}$$

Por todo lo anterior

$$\int_{\gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} - \int_{\gamma_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = -\frac{(44\pi^4 + 144\pi^3 - 33\pi^2 - 354\pi}{96} - 2\sin(1)$$

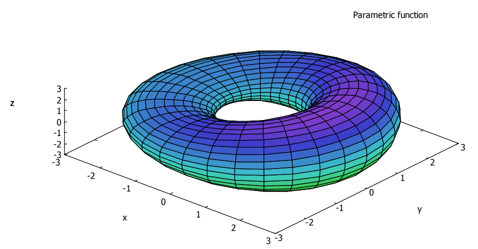
_ _

PROBLEMA 2. Sea la superficie $\mathcal{A}$ descrita mediante la parametrización

$$\Psi(\theta,\varphi) = ((2+\cos(\varphi))\cos(\theta), (2+\cos(\varphi))\sin(\theta), (2+\cos(\theta))\sin(\varphi))$$

con $0 < \theta < 2\pi,\ 0 < \varphi < 2\pi.$ **Calcular la integral de superficie**

$$\iint_{\mathcal{A}^+} (x+z)\vec{\mathbf{k}} \cdot dS$$



Superficie $\mathcal{A}$ (Problema 2)

SOLUCIÓN:

Como la superficie viene dada mediante una parametrización, aplicaremos que

$$\iint_{\mathcal{A}^+} \vec{\mathbf{F}} \cdot dS = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Psi(\theta,\varphi)) \cdot T_\theta \times T_\varphi d\theta d\varphi$$

donde $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (0,0,x+z)$ y $\cdot$ denota el producto escalar. En primer lugar tenemos que calcular el producto vectorial $T_\theta \times T_\varphi$ (que nos da el vector normal a la superficie), y como posteriormente lo tenemos que multiplicar escalarmente por $\vec{\mathbf{F}}$, observamos que no es preciso obtener todas sus componentes de este producto vectorial, sino que nos basta con obtener su 3ra componente (ya que las dos primeras componentes de $\vec{\mathbf{F}}$ son nulas). Entonces se tiene que

$$\vec{\mathbf{F}}(\Psi(\theta,\varphi)) = (0,0,(2+\cos(\varphi))\cos(\theta)+(2+\cos(\theta))\sin(\varphi))$$

$$T_\theta \times T_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -(2+\cos(\varphi))\sin(\theta) & (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) & -\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\sin(\theta) & (2+\cos(\theta))\cos(\varphi) \end{vmatrix}$$

y desarrollando este producto, obtendremos

$$T_\theta \times T_\varphi = (1^{\text{a}}componente, 2^{\text{a}}compontente, (2+\cos(\varphi))\sin(\varphi))$$

Entonces

$$\iint_{\mathcal{A}^+} \vec{\mathbf{F}} \cdot dS = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Psi(\theta,\varphi)) \cdot T_\theta \times T_\varphi d\theta d\varphi =$$

$$= \iint_D [(2+\cos(\varphi))\cos(\theta)+(2+\cos(\theta))\sin(\varphi)](2+\cos(\varphi))\sin(\varphi) d\theta d\varphi =$$

$$= \iint_D \left[(2+\cos(\varphi))^2\cos(\theta)\sin(\varphi)+(2+\cos(\theta))(2+\cos(\varphi))\sin^2(\varphi) \right] d\theta d\varphi =$$

$$= \text{ (integrando primero respecto de } \theta \text{, con } 0 < \theta < 2\pi) = \ldots =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(4\pi\cos(\varphi)+8\pi)]\sin^2(\varphi) \cdot d\varphi = \ldots = 8\pi^2$$

– –

PROBLEMA 3. Resolver los siguientes apartados:

(3.a) Calcular el conjunto de los logaritmos del número complejo $-1-\mathbf{i}$, **es decir resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación**

$$e^z = -1-\mathbf{i}$$

(3.b) ¿Para qué puntos del plano complejo es derivable la función $f(z)$ **siguiente?**

$$f(x+\mathbf{i}y) = y\sin(x)+\mathbf{i}y^2$$

¿Tiene alguna singularidad aislada?

SOLUCIÓN:

(3.a) Sabemos que

$$-1-\mathbf{i} = \left(\sqrt{2}\right)_{\frac{5\pi}{4}}$$

por lo que

$$\log(-1-\mathbf{i}) = \log\left(\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{5\pi}{4}}\right) = \log\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

(3.b): Sabemos que para que una función de la forma $f(x+\mathbf{i}y) = u(x,y)+\mathbf{i}v(x,y)$ sea derivable en un punto se han de verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Veamos por tanto en qué puntos se verifican estas igualdades.

Si tomamos $u(x,y) = y\sin(x)$; $v(x,y) = y^2$:

- De $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ se llega a

$$y\cos(x) = 2y$$

de donde

$$y(\cos(x) - 2) = 0$$

por lo que

$$y = 0 \text{ ó } \cos(x) = 2$$

y como este último resultado es imposible, tendrá que ser $y = 0$.

- De $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ se llega a

$$\sin(x) = 0$$

de donde

$$x = k\pi$$

siendo $k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, $f(z)$ solo será derivable en puntos de la forma $(k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Esto quiere decir que sus singularidades no son aisladas, sino que los que son aislados son los puntos donde la función es derivable.

– –

PROBLEMA 4. Sea el conjunto

$$D_\alpha = \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \alpha, \ \operatorname{Im}(z) > 0\right\}$$

con $\alpha > 0$. Discutir en función del parámetro $\alpha > 0$ el valor de la integral

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(w^2)}{w(w - \mathbf{i})(w^2 - 2)} dw$$

donde ∂D_α^+ denota la frontera del recinto $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ orientada positivamente.

SOLUCIÓN: Las singularidades que tiene el denominador son $z_1 = 0,$ que es una singularidad evitable (puesto que también anula el numerador; además, se tiene que $\lim_{w\to 0} f(w) = 0$), $z_2 = \mathbf{i}$ (polo simple) y $z_{3,4} = \pm\sqrt{2}$ (también polos simples). Pero de estas 4 singularidades, solamente $z_2 = \mathbf{i}$ verifica $\operatorname{Im}(z) > 0$ (Notemos que 0 y $\pm\sqrt{2}$ no están en el interior de dicha región, puesto que su parte imaginaria vale 0). Por tanto, según los valores de $\alpha > 0$ distinguiremos:

- Si $0 < \alpha < 1$: No hay niguna una singularidad dentro de la región. Así

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(w^2)}{w(w - \mathbf{i})(w^2 - 2)} dw = 0$$

- Si $\alpha > 1$: Hay una única singularidad dentro de la región (es $z_2 = \mathbf{i}$), y como se tiene que

$$Resf(\mathbf{i}) = \frac{p(\mathbf{i})}{q'(\mathbf{i})} = \frac{\sin(-1)}{-3\mathbf{i}} = -\frac{\sin(1)}{-3\mathbf{i}}$$

entonces:

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(w^2)}{w(w-\mathbf{i})(w^2-2)} dw = 2\pi\mathbf{i} \cdot Resf(\mathbf{i}) = 2\pi\mathbf{i}\frac{\sin(1)}{3\mathbf{i}} = \frac{2\pi}{3}\sin(1)$$