Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final Septiembre. Curso 2011/2012
(05/09/2012)
ENUNCIADO Y RESUELTO

CUESTIONES TEÓRICAS.

1. **Dado el campo vectorial escrito en polares**

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta) = \cos(\theta)\vec{\mathbf{e}}_r + r\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}}_\theta$$

donde $\{\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta\}$ **es la base de vectores móviles de** $\mathbb{R}^2$ **asociada a dichas coordenadas:**

1.a Escribe el campo vectorial en coordenadas cartesianas.

1.b ¿Es el campo $\vec{\mathbf{F}}$ **conservativo? ¿Por qué?**

2. **Sea la función**

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z(z+i)}$$

indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente la respuesta.

2.a Existe una sucesión de números complejos (a_n) **de forma que**

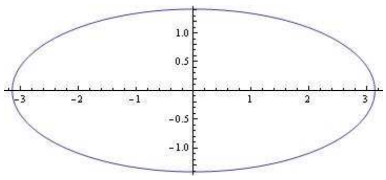
$$f(z) = -\mathbf{i} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1$$

2.b Se verifica la identidad

$$\int_\gamma f(z)dz = \pi(e - e^{-1})\mathbf{i}$$

donde γ **es la curva elíptica de ecuación**

$$\gamma(t) = \pi\cos(t) + \mathbf{i}\sqrt{2}\,\sin(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



Gráfica Cuestión 2.b

SOLUCIÓN:

(1.a) Para pasar a coordenadas cartesianas, hay que aplicar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ r\sin^2(\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - r\sin^3\theta \\ \cos\theta\sin\theta + r\cos\theta\sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta(1 + r\sin\theta) - r\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta + r\cos\theta\sin^2\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta(1+y) - y \\ \cos\theta\sin\theta(1 + r\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2}(1+y) - y \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(1+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + \frac{x+xy}{x^2+y^2} \\ \frac{xy+xy^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

ya que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Por todo lo anterior, el campo se transforma en

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = \left(-y + \frac{x+xy}{x^2+y^2}\right)\vec{\mathbf{i}} + \frac{xy+xy^2}{x^2+y^2}\vec{\mathbf{j}}$$

(1.b) Puesto que su rotacional es

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(-y + \frac{x+xy}{x^2+y^2}\right) & \frac{xy+xy^2}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = (0,0,¿?)$$

el campo ¿es conservativo?.

(2) La función tiene por puntos singulares $z_1 = 0$ y $z_2 = -\mathbf{i}$. El primero de ellos es una singularidad evitable (ya que anula una vez al numerador y al denominador; para calcular el valor de f en el punto cero, habremos de darle el valor de su límite cuando $z \to 0$, que si lo calculamos resulta ser $-\mathbf{i}$), mientras que el segundo es un polo simple. Lo que nos quiere decir el apartado (2.a) es que f admite un desarrollo en serie de McLaurin, lo que será cierto si $f(0) = -\mathbf{i}$, cosa que es cierta, y si f es analítica en el punto $z_1 = 0$, cosa que también es cierta. Por tanto, la afirmación de (2.a) es verdadera.

El apartado (2.b) nos pide que calculemos la integral de f, cosa que haremos por el teorema de los residuos. Así, como solo el punto $z_2 = -\mathbf{i}$ es un polo, tendremos

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi\mathbf{i} \cdot \mathrm{Res}f(-\mathbf{i}) = 2\pi\mathbf{i}\frac{p(-\mathbf{i})}{q'(-\mathbf{i})} = 2\pi\mathbf{i}\frac{\sin(-\mathbf{i})}{-\mathbf{i}} = 2\pi\sin(\mathbf{i}) = \ldots = -\pi(e - e^{-1})\mathbf{i}$$

Por lo tanto la igualdad NO es cierta (solo se diferencia en el signo).

NOTA: Para calcular $\sin(\mathbf{i})$, se han utilizado las fórmulas de Euler

$$\sin(\mathbf{i}) = \frac{e^{\mathbf{i}} - e^{-\mathbf{i}}}{2\mathbf{i}} \text{ siendo } e^{\mathbf{i}} = \cos(1) + \mathbf{i}\sin(1)$$

NOTA: Esta integral también podíamos calcularla usando las fórmulas integrales de Cauchy, para lo que tendríamos que considerar

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z+i}dz = 2\pi\mathbf{i} \cdot g(-\mathbf{i}) = 2\pi\mathbf{i}\frac{\sin(-\mathbf{i})}{-\mathbf{i}}$$

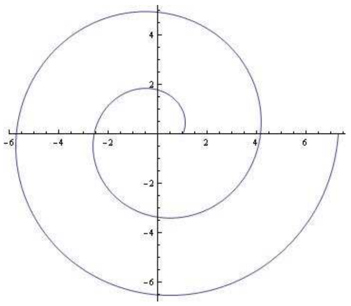
siendo $g(z) = \frac{f(z)}{z}$.

– –

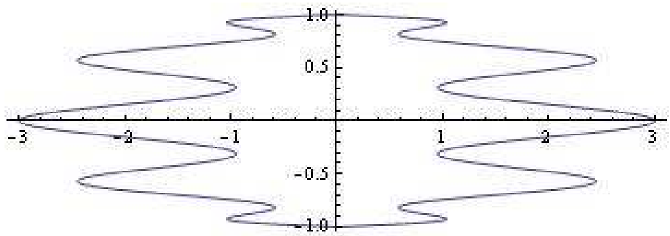
PROBLEMA 1. Calcula las integrales de los campos vectoriales a lo largo de las curvas que se indican (orientadas positivamente). Justifica el procedimiento que uses en cada caso.

(1.a) **Campo** $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = \left(2x - y\sin(xy), -x\sin(xy) + (y-1)^2\right)$

Curva $\gamma(t) = \left(1 + \frac{t}{2}\right)(\cos(t),)\sin(t)),\ 0 < t < 4\pi.$



Curva 1.a



Curva 1.b

(1.b) **Campo** $\vec{\mathbf{G}}(x,y) = ((1+x)y^2, \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y))$

Curva $\sigma(t) = ((2+\cos(10t))\cos(t), \sin(t)),\ 0 < t < 2\pi.$

AYUDA: Cualquier curva de la forma $\sigma(\theta) = (\alpha(\theta)\cos(\theta), \beta(\theta)\sin(\theta))$, **con** α, β **funciones contínuas y** $2\pi - \textit{periódicas}$ **(es decir,** $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ **y** $\beta(0) = \beta(2\pi)$**) es frontera de un conjunto** $D \subset R^2$ **que puede describirse en coordenadas elípticas como**

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow x = r \cdot \alpha(\theta)\cos(\theta),\ y = r \cdot \beta(\theta)\sin(\theta),\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < r < 1$$

SOLUCIÓN: Para el apartado (1.a): La curva γ no es cerrada, pero, la integral de línea $\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}}$ es independiente del camino de integración (ya que si llamamos $P(x,y) = 2x - y\sin(xy)$ y $Q(x,y) = -x\sin(xy) + (y-1)^2$, se verifica que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$). Por tanto, en lugar de considerar el camino propuesto, tomaremos la recta (eje X) que une los puntos $(1,0)$ y $(1+2\pi)$, sabiendo que una parametrización de este camino viene dada por

$$\gamma_1(t) = (t,0),\ 1 < t < 1+2\pi$$

Entonces

$$\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \int_{\gamma_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \ldots = \int_1^{1+2\pi} 2t \cdot dt$$

integral que es inmediata.

Para (1.b), si hacemos $P(x,y) = (1+x)y^2$ y $Q(x,y) = \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y)$, se verifica que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, por lo que la integral que queremos calcular será dependiente del camino de integración. Al ser éste cerrado, aplicaremos el teorema de Green en el plano, por lo que

$$\int_\sigma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (\pi - 2(1+x)y)dxdy$$

siendo D la región que encierra la curva. Usando la indicación del enunciado, esta integral doble la calcularemos haciendo un cambio a coordenadas elípticas

$$x = r \cdot \alpha(\theta)\cos(\theta),\ y = r \cdot \beta(\theta)\sin(\theta),\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < r < 1$$

donde en nuestro caso

$$\alpha(\theta) = 2 + \cos(10\theta) \text{ y } \beta(\theta) = 1$$

por lo que el cambio será

$$x = r \cdot (2 + \cos(10\theta))\cos(\theta),\ y = r \cdot \sin(\theta),\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < r < 1$$

No se nos tiene que olvidar multiplicar por el jacobiano del cambio, que viene dado por

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

es decir

$$J = \begin{vmatrix} (2+\cos(10\theta))\cos(\theta) & r(-10\sin(10\theta)\cos(\theta) - (2+\cos(10\theta))\sin(\theta)) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} =$$

$$= 2r + 10r\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(10\theta) + r\cos(10\theta)$$

De esta forma

$$\int_\sigma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \iint_D (\pi - 2(1+x)y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\pi - 2(1 + r(2+\cos(10\theta))\cos(\theta))r\sin(\theta))(2r + 10r\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(10\theta) + r\cos(10\theta))dr$$

y calculando, resulta ser

$$\int_\sigma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = 2\pi^2$$

– –

PROBLEMA 2. Dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \left((y-1)^2 + \sin^2(\pi x^2 + 1),\ z + \cos(y^2),\ y + \log(1+x^2)\right)$$

calcula el flujo saliente de su rotacional a través de la superficie

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 - z = 0,\ 0 < z < \pi\right\}$$

es decir la integral

$$\iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS$$

Justifica el procedimiento utilizado.

SOLUCIÓN:

Este problema podemos resolverlo de forma directa o usando el teorema de la divergencia (cerrando la superficie). Veremos que es más aconsejable realizarlo de la segunda forma (ya que las integrales a calcular son mucho más sencillas):

Si lo resolvermos DIRECTAMENTE, se tiene que

$$\iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = \iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \iint_D rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \vec{\mathbf{n}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy$$

siendo D la proyección de la superficie $\mathcal{P}$ sobre el plano XY; es decir

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq \pi\right\}$$

y $\vec{\mathbf{n}}$ el vector dado por

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \text{ mientras que } dS = \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dxdy$$

Como

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y-1)^2 + \sin^2(\pi x^2+1) & z + \cos(y^2) & y + \log(1+x^2) \end{vmatrix} = \left(0, \frac{-2x}{(1+x^2)}, -2(y-1)\right)$$

resultará ser

$$\iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = \iint_{D} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \vec{\mathbf{n}} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dxdy = \ldots = \iint_{D} \left(\frac{4xy}{(1+x^2)} - 2(y-1) \right) dxdy$$

que si resolvemos usando un cambio a coordenadas polares

$$\iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\frac{4r\cos(\theta) r\sin(\theta)}{(1+r^2\cos^2(\theta))} - 2(r\sin(\theta)-1) \right) rdr$$

Esta última integral es más fácil de calcular si integramos primero respecto de θ y después respecto de r, es decir, si hacemos

$$\iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = \int_0^{\sqrt{\pi}} rdr \int_0^{2\pi} \left(\frac{4r\cos(\theta) r\sin(\theta)}{(1+r^2\cos^2(\theta))} - 2(r\sin(\theta)-1) \right) d\theta$$

Operando, resulta ser

$$\iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = 4\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} rdr = 2\pi^2$$

NOTA: También podríamos resolver este ejercicio usando el Th de la divergencia (Gauss), de la forma siguiente: Consideramos la superficie cerrada $\mathcal{P}'$ dada por la unión de la superficie $\mathcal{P}$ y de su tapa $\mathcal{P}''$ (es el círculo $x^2+y^2 \leq \pi$). Por el teorema de Gauss, sabemos que

$$\iint_{\mathcal{P}'} \vec{\mathbf{G}} dS = \iiint_{V} div\left(\vec{\mathbf{G}}\right)$$

siendo V el volumen interior al paraboloide que estamos considerando. Esta igualdad, para nuestro caso, y al ser $\vec{\mathbf{G}} = rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$, se convierte en

$$\iint_{\mathcal{P}'} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = \iiint_{v} div\left(rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)\right) dxdydz = 0$$

puesto que $div\left(rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)\right) = 0$ (basta con hacer los cálculos). Entonces, y puesto que

$$\iint_{\mathcal{P}'} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = \iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS + \iint_{\mathcal{P}''} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS$$

tendremos que el flujo que nos piden calcular coincide con

$$\iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = -\iint_{\mathcal{P}''} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS$$

es decir

$$\iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = -\iint_{\mathcal{P}''} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \iint_{D} -2(y-1) dxdy$$

puesto que $\vec{\mathbf{n}} = (0,0,1)$. Si calculamos esta última integral doble por cambio a polares, resulta ser

$$\iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS = \iint_{D} -2(y-1)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} -2(r\sin(\theta)-1)rdr = \ldots = 2\pi^2$$

– –

PROBLEMA 3. Sea la función

$$f(z) = |x+y| + \mathbf{i}(y-x)$$

(3.a) Determina el conjunto de puntos del plano $\mathbb{C}$ en los que ***f*** **es derivable.**
(3.b) Calcula la integral de f a lo largo de la circunferencia unidad,

$$\int_{\sigma} f(z)dz$$

con $\sigma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN: Teniendo en cuenta que $|x+y| = x+y$, si $x+y \geq 0$; y $|x+y| = -(x+y)$, si $x+y < 0$, tendremos que

$$f(z) = \begin{cases} x+y+\mathbf{i}(y-x) & \text{si } x+y \geq 0 \\ -x-y+\mathbf{i}(y-x) & \text{si } x+y < 0 \end{cases}$$

Por tanto consideraremos ambas regiones para estudiar cuando es derivable (apartado (3.a)):
- Si $x+y \geq 0$: Si detonamos por $u = x+y$, $v = y-x$, es inmediato ver que se cumplen las ecuaciones de Cauchy - Riemann, por lo que *f* será derivable en dicha región del plano complejo.
- Si $x+y < 0$: Si detonamos por $u = -x-y$, $v = y-x$, es inmediato ver que NO se cumplen las ecuaciones de Cauchy - Riemann, por lo que *f* NO será derivable.

Para (3.b): Puesto que la circunferencia unidad se encuentra en ambas regiones D_1 y D_2 (siendo D_1 el conjunto de puntos del plano tal que $x+y \geq 0$ y D_2 el conjunto tal que $x+y < 0$), tendremos que

$$\oint_{\sigma} f(z)dz = \int_{D_1} f(z)dz + \int_{D_2} f(z)dz$$

y si calculamos ambas integrales de forma directa

$$\int_{D_1} f(z)dz = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (x+y+\mathbf{i}(y-x))(x'+\mathbf{i}y')dt = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos t+\sin t+\mathbf{i}(\sin t-\cos t))(-\sin t+\mathbf{i}\cos t)dt = 0$$

mientras que

$$\int_{D_2} f(z)dz = \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} (-x-y+\mathbf{i}(y-x))(x'+\mathbf{i}y')dt =$$

$$= \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} (-\cos t-\sin t+\mathbf{i}(\sin t-\cos t))(-\sin t+\mathbf{i}\cos t)dt = (1-i)\pi$$

Así,

$$\int_{\sigma} f(z)dz = (1-i)\pi$$

– –

PROBLEMA 4. Discute en función del radio $\beta > 0$ los distintos valores de la integral

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz$$

siendo $\gamma(t) = i+\beta e^{it},\ t \in [0,2\pi]$**, la circunferencia de centro** i **y radio** β**.**

SOLUCIÓN: Las singularidades que tiene el denominador son $z_1 = 0$ (que es un polo doble), $z_{2,3} = \pm\mathbf{i}$ (ambos son polos simples) y $z_4 = 2$, $z_5 = \frac{1}{2}$ (también polos simples). Por tanto, según los valores de $\beta > 0$ distinguiremos:

- Si $\beta < 1$: Sólo hay una singularidad dentro de la circunferencia (es su centro $z_2 = \mathbf{i}$).
- Si $\beta < \frac{\sqrt{5}}{2}$: Hay dos singularidades dentro de la circunferencia (son $z_2 = \mathbf{i}$ y $z_1 = 0$).
- Si $\beta < 2$: Hay tres singularidades dentro de la circunferencia (son $z_2 = \mathbf{i},\ z_1 = 0$ y $z_5 = \frac{1}{2}$).
- Si $\beta < \sqrt{5}$: Hay cuatro singularidades dentro de la circunferencia (son $z_2 = \mathbf{i},\ z_1 = 0$, $z_5 = \frac{1}{2}$ y $z_3 = -\mathbf{i}$).
- Si $\beta > \sqrt{5}$: Las cinco singularidades están dentro de la circunferencia.

(Hemos distinguido estos valores en los que varía β ya que la singularidad $z_1 = 0$ está a una distancia de 1 del centro de la circunferencia, mientras que la singularidad $z_2 = \mathbf{i}$ es el centro de la circunferencia; el punto $z_3 = -\mathbf{i}$ está a una distancia 2 del centro; $z_4 = 2$ está a distancia $\sqrt{5}$ del centro y $z_5 = \frac{1}{2}$ está a $\frac{\sqrt{5}}{2}$ del centro).

Por tanto sólo hemos de calcular los respectivos residuos en cada una de las singularidades y aplicar el teorema de los residuos según los valores de β :

Como se tiene que

$$Resf(0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}\right) =\ldots= \frac{5}{8}$$

$$Resf(\mathbf{i}) = \frac{p(\mathbf{i})}{q'(\mathbf{i})} =\ldots= -\frac{1}{10}$$

$$Resf(\mathbf{i}) = \frac{p(-\mathbf{i})}{q'(-\mathbf{i})} =\ldots= -\frac{1}{10}$$

$$Resf(2) = \frac{p(2)}{q'(2)} =\ldots= \frac{17}{120}$$

$$Resf(\frac{1}{2}) = \frac{p(1/2)}{q'(1/2)} =\ldots= -\frac{17}{30}$$

siendo $p(z) = z^4+1$ y $q(z) = z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)$, entonces:

- Si $\beta < 1$:

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz = 2\pi\mathbf{i}Resf(\mathbf{i})$$

- Si $\beta < \frac{\sqrt{5}}{2}$:

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz = 2\pi\mathbf{i}(Resf(\mathbf{i})+Resf(0))$$

- Si $\beta < 2$:

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz = 2\pi\mathbf{i}(Resf(\mathbf{i})+Resf(0)+Resf(1/2))$$

- Si $\beta < \sqrt{5}$:

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz = 2\pi\mathbf{i}(Resf(\mathbf{i})+Resf(0)+Resf(1/2)+Resf(-\mathbf{i}))$$

- Si $\beta > \sqrt{5}$:

$$\int_{\gamma} \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz = 2\pi\mathbf{i}(Resf(\mathbf{i}) + Resf(0) + Resf(1/2) + Resf(-\mathbf{i}) + Resf(2))$$