Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final Junio. Curso 2011/2012
(13/07/2012)

CUESTIONES TEÓRICAS.

1. **Dado el campo vectorial**

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = xy\,\vec{\mathbf{i}} + (y+\cos(z^2))\,\vec{\mathbf{k}} + \nabla\Phi(x,y,z)$$

donde

$$\Phi(x,y,z) = \log(2+x^2\cos(y-z)) + \sin\left(e^{x-y+z^2}\right) + \pi x\sqrt{y^2+4z^2}$$

se pide

1.a Calcular la expresión del rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$ en coordenadas cilíndricas.

1.b Calcular la integral de $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo de la elipse de ecuación

$$\gamma(t) = (\cos(t), \pi\sin(t), 2),\ \text{con } 0 \le t \le 2\pi$$

2. **Sea** $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ **definida por** $u(x+\mathbf{i}y) = xy$. **Se pide:**

2.a Determinar la función $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ **de forma que**

$$f(x+\mathbf{i}y) = u(x+\mathbf{i}y) + \mathbf{i}v(x+\mathbf{i}y)$$

sea holomorfa (derivable) en todo $\mathbb{C}$, con $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

2.b Calcular el valor de la integral

$$\int_\sigma \frac{f(z)}{z-\frac{\mathbf{i}}{2}}dz$$

donde $\sigma(t) = e^{it},\ 0 < t < 2\pi,$ **es la circunferencia unidad**.

SOLUCIÓN:

(1.a) El campo $\vec{\mathbf{F}}$ se puede escribir como

$$\vec{\mathbf{F}} = (xy, 0, y+\cos(z^2)) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \left(xy + \frac{\partial\Phi}{\partial x},\ \frac{\partial\Phi}{\partial y},\ y+\cos(z^2) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

por lo que su rotacional será

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy + \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & y+\cos(z^2) + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \ldots = (1,0,-x)$$

por lo que en coordenadas cilíndricas, será

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ -r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

es decir

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \cos(\theta)\vec{\mathbf{u}}_r - \sin(\theta)\vec{\mathbf{u}}_\theta - r\cos(\theta)\vec{\mathbf{k}}$$

NOTA: Otra forma de realizar más rápido este mismo apartado es tener en cuenta que

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = rot\left(xy\vec{\mathbf{i}} + (y+\cos(z^2))\vec{\mathbf{k}} + \nabla\Phi\right) = rot\left(xy\vec{\mathbf{i}} + (y+\cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}\right) + rot(\nabla\Phi)$$

y como $rot(\nabla\Phi) = \vec{0}$, entonces

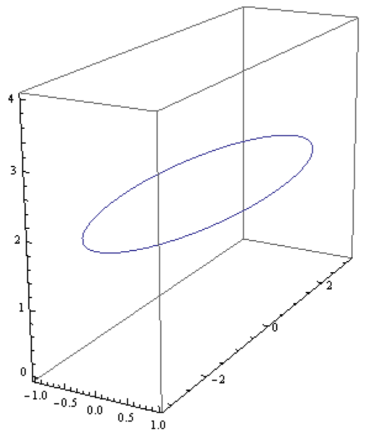
$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = rot\left(xy\vec{\mathbf{i}} + (y+\cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}\right) =\ldots= (1,0,-r\cos\theta)$$

y expresar los vectores unitarios $\vec{\mathbf{i}},\ \vec{\mathbf{j}},\ \vec{\mathbf{k}}$ en función de $\vec{\mathbf{u}}_r,\ \vec{\mathbf{u}}_\theta,\ \vec{\mathbf{k}}$.

(1.b) Se trata de calcular $\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{dr}}$, cosa que podemos hacer de forma directa usando la parametrización dada para la curva γ, o utilizando el teorema de Stokes (Notemos que, en este caso, la integral de línea no es independiente del camino de integración, puesto que su rotacional -como hemos visto en el apartado anterior- no es nulo). Así, si usamos Stokes (nos evitamos de esta forma parametrizar el camino y sustituir en el campo vectorial), tendremos

$$\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{dr}} = \iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}dS$$

Como S es la superficie interior a la elipse $\gamma(t) = (\cos(t), \pi\sin(t), 2)$ (es una elipse situada en plano $z = 2$ y de semiejes $1,\ \pi;$ su gráfica está dada en la siguiente figura),



su vector normal será $(1,0,0),$ por lo que

$$\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{dr}} = \iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}dS = \iint_S (1,0,-x) \bullet (1,0,0)dS = \iint_S dS = Area(S) = \pi \bullet 1 \bullet \pi = \pi^2$$

(2.a) Si f es holomorfa, significa que se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y que $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. De la primera, tendremos $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = y$. Así

$$v(x,y) = \int ydy = \frac{y^2}{2} + g(x)$$

Para hallar $g(x)$ usaremos la segunda de las ecuaciones de C-R: De $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ se llega a $-g'(x) = x$, por lo que $g'(x) = -x$ y $g(x) = -\frac{x^2}{2} + cte$. Así se tiene que

$$v(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + cte$$

Por tanto

$$f(x+\mathbf{i}y) = xy + \mathbf{i}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + cte\right)$$

y como $f(0,0) = (0,0)$, se tiene que $cte = 0$.

(2.b) Podemos utilizar la primera de las fórmulas integrales de Cauchy, puesto que

$$f(z) = xy + \mathbf{i}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

es analítica en todos los puntos del círculo unidad. Por tanto

$$\int_\sigma \frac{f(z)}{z - \frac{\mathbf{i}}{2}} dz = 2\pi\mathbf{i} \cdot f\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) = 2\pi\mathbf{i}\left(0 + \mathbf{i}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$$

– –

PROBLEMA 1. Calcula la integral del campo vectorial

$$\vec{\mathbf{G}}(x,y) = ((1+x)y^2, \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y))$$

a lo largo de la curva dibujada en rojo en la Figura 2, positivamente orientada. Tener en cuenta que el conjunto coloreado en la Figura 2 es de la forma

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 3,\ -\sqrt{4-(x-1)^2} < y < \phi(x)\right\}$$

donde

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x < 1 \\ \sqrt{1-(x-2)^2}, & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases}$$

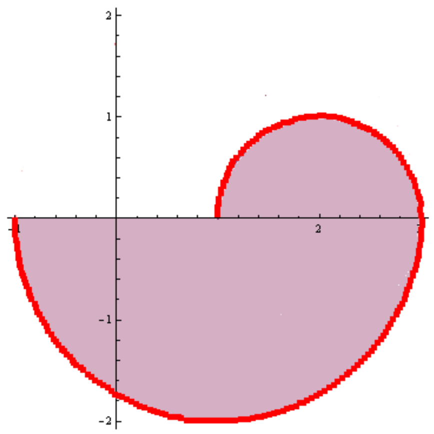


Figura 2: Conjunto D

SOLUCIÓN: Sea γ la curva dibujada en rojo en la figura. Observemos que la curva no es cerrada, y que además, la integral de línea $\int_\gamma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}}$ es dependiente del camino de integración, ya que si llamamos $P(x,y) = (1+x)y^2$ y $Q(x,y) = \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y)$, se verifica que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Por tanto, esta integral tendremos que calcularla directamente (no lo haremos ya que el campo vectorial tiene funciones cuyas integrales son complicadas) o, si conseguimos cerrar el camino, podremos aplicar el teorema de Green en el plano. Así, sea σ la curva cerrada dada por $\sigma = \gamma \cup \delta$, siendo δ el trozo de eje $0X$ que va desde $x = 1$ a $x = -1$. Así, sabemos que

$$\oint_\sigma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \int_\gamma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} + \int_\delta \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}}$$

por lo que la integral que queremos calcular será

$$\int_{\gamma} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \oint_{\sigma} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} - \int_{\delta} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}}$$

donde la 1ª de estas integrales la obtendremos por el teorema de Green en el plano, mientras que la segunda la calcularemos directamente (al ser muy fácil la parametrización del camino δ : $\delta(t) = (t, 0)$ con $t \in [1, -1]$). Si realizamos los oportunos cálculos:

- Aplicando el teorema de Green a la integral cerrada:

$$\oint_{\sigma} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_{D} (\pi - 2(1+x)y) dxdy =$$

$$= \pi \iint_{D} dxdy - 2 \iint_{D} (1+x) ydxdy = \pi Area(D) - 2 \iint_{D} (1+x) ydxdy$$

Esta última integral la resolveremos por separado, y como la región D es la unión de dos semicírculos, pondremos $D = D_1 \cup D_2$, siendo D_1 la mitad inferior del círculo de centro $(1,0)$ y radio 2; mientras que D_2 es la mitad superior del círculo de centro $(2,0)$ y radio 1. Así

$$\iint_{D} (1+x) ydxdy = \iint_{D_1} (1+x) ydxdy + \iint_{D_2} (1+x) ydxdy =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{2} (1+1+r\cos\theta) r \sin\theta \cdot r \cdot dr +$$

$$+ \int_{0}^{\pi} d\theta \int_{0}^{1} (1+2+r\cos\theta) r \sin\theta \cdot r \cdot dr = -\frac{32}{3} + 2 = -\frac{26}{3}$$

donde en D_1 hemos realizado el cambio a polares $x = 1 + r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$; con $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 2$; y en D_2 hemos realizado el cambio a polares $x = 2 + r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$; con $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq r \leq 1$. Así

$$\oint_{\sigma} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \pi \cdot \frac{5\pi}{2} - 2\left(-\frac{26}{3}\right)$$

- Calculando de manera directa la segunda de las integrales

$$\int_{\delta} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \int_{1}^{-1} \{(1+t)0^2 \cdot dt + (\pi t - \log(1+0^2)\cos(0^4 + 3 \cdot 0))0 \cdot dt\} = 0$$

Por tanto

$$\int_{\gamma} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \oint_{\sigma} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} - \int_{\delta} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \pi \cdot \frac{5\pi}{2} - 2\left(-\frac{26}{3}\right) - 0$$

— —

PROBLEMA 2. Sea S la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$, situado en el primer octante y limitada por el plano $z = 1$. Sea $\vec{\mathbf{F}}$ el campo vectorial dado por

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y - z, z - x, x - y)$$

(a) **Calcular $\iint_{S} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS$, siendo $\vec{\mathbf{n}}$ la normal interior al paraboloide.**

(b) **Calcular directamente $\oint_{C} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr}$, siendo C la curva frontera de S.**

(c) **Comprobar el resultado anterior usando el teorema de Stokes.**

SOLUCIÓN:

(a) Como S viene dada por $z = x^2 + y^2$, tendremos que

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \text{ mientras que } dS = \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy$$

(proyectamos sobre el plano XY) por lo que

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \ldots = \iint_D (2x^3 + 2xy^2 - 2x^2y - 2y^3 + x - y)dxdy$$

y haciendo un cambio a coordenadas polares (y teniendo en cuenta que D es la parte del círculo unidad que está en el primer cuadrante)

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \ldots = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (2r^4 + r^2)(\cos\theta - \sin\theta)dr = \ldots = 0$$

(b) La curva cerrada C a través de la cual nos piden calcular la integral de línea es unión de 3 curvas: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$,

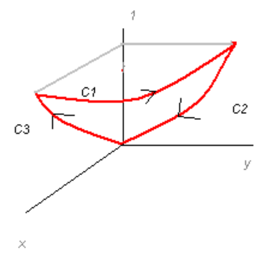


Gráfico curva C

siendo C_1 la porción de circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ situada en el primer octante y en el plano $z = 1$ (cuya parametrización viene dada por $C_1(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, con $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$), C_2 la parábola $y = z^2$ (cuya parametrización viene dada por $C_2(t) = (0, t, t^2)$, con $t \in [1, 0]$), y C_3 la parábola $x = z^2$ (cuya parametrización viene dada por $C_2(t) = (t, 0, t^2)$, con $t \in [0, 1]$). Por lo tanto, se verificará

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} = \int_{C_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} + \int_{C_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} + \int_{C_3} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr}$$

Si calculamos cada una de estas integrales por separado

$$\int_{C_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} = \int_0^{\pi/2} ((\sin t - 1)(-\sin t)dt + (1 - \cos t)\cos t \cdot dt + (\cos t - \sin t)0dt) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{C_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} = \int_1^0 ((t - t^2)0dt + (t^2 - 0)dt + (0 - t)2t \cdot dt) = \frac{1}{3}$$

$$\int_{C_3} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} = \int_1^0 ((0 - t^2)dt + (t^2 - t)0dt + (t - 0)2t \cdot dt) = \frac{1}{3}$$

por lo que

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} = 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}$$

(c) Por el teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{dr} = \iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}} dS$$

Como

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = (-2,-2,-2)$$

y $\vec{\mathbf{n}}$ y dS están calculados en el apartado (a), resulta entonces

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{dr} = \iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}} dS = \ldots = \iint_D (4x+4y-2)dxdy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (4r\cos\theta + 4r\sin\theta - 2)rdr = \ldots = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}$$

– –

PROBLEMA 3. Calcula la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-\mathbf{i})}$$

alrededor de los puntos $z_0 = 0,\ \mathbf{i},\ 1+\mathbf{i}$**. Indica que clase de singularidad se tiene en cada punto.**

SOLUCIÓN: Antes que nada, ya podemos afirmar que los puntos $z_0 = 0,\ z_1 = \mathbf{i},$ son polos simples (ya que son ceros simples del denominador y el numerador no se anula en ellos), mientras que el punto $z_2 = 1+\mathbf{i}$ será una singularidad evitable (puesto que la función es derivable en dicho punto). Esto también se observa si obtenemos los correspondientes desarrollos de Laurent (puesto que en el correspondiente desarrollo como potencias de z aparecerá un único término con $\frac{1}{z}$ y todos los demás términos serán de la forma z^n (con $n \geq 0$); en el desarrollo como potencias de $z-\mathbf{i}$ aparecerá un único término con $\frac{1}{z-\mathbf{i}}$ y todos los demás términos serán de la forma $(z-\mathbf{i})^n$ (con $n \geq 0$); y en el desarrollo como potencias de $z-(1+\mathbf{i})$) todos los términos serán de la forma $(z-(1+\mathbf{i})))^n$ (con $n \geq 0$)): Como se verifica

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-\mathbf{i})} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-\mathbf{i}} = \text{ operando } = \frac{\mathbf{i}}{z} + \frac{1-\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}$$

- En $z_0 = 0$: Como queremos expresar cada fracción en potencias de z, sólo tendremos que expresar en dichos términos cada una de las dos fracciones elementales anteriores. La primera ya lo está, por lo que para expresar la segunda usaremos desarrollos conocidos (en este caso, usaremos el desarrollo de $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, que es convergente si $|z| < 1$):

$$\frac{1-\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{i}-1}{\mathbf{i}-z} = \frac{1}{\mathbf{i}} \frac{\mathbf{i}-1}{1-\frac{z}{\mathbf{i}}} = \frac{\mathbf{i}-1}{\mathbf{i}} \frac{1}{1-\frac{z}{\mathbf{i}}} = \frac{\mathbf{i}-1}{\mathbf{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\mathbf{i}}\right)^n$$

  que será convergente si $\left|\frac{z}{\mathbf{i}}\right| < 1,$ es decir si $|z| < |\mathbf{i}| = 1.$ Así el desarrollo de Laurent en torno a este punto será

$$f(z) = \frac{\mathbf{i}}{z} + \frac{\mathbf{i}-1}{\mathbf{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\mathbf{i}}\right)^n$$

  (de nuevo se observa que $z_0 = 0$ es un polo simple, ya que solamente aparece un término con z dividiendo, y éste es de grado 1).
- En $z_1 = \mathbf{i}$: Como queremos expresar cada fracción en potencias de $z-\mathbf{i}$, sólo tendremos que expresar en dichos términos cada una de las dos fracciones elementales anteriores. La

segunda ya lo está, por lo que para expresar la primera volveremos a usar desarrollos conocidos (en este caso, usaremos el desarrollo de $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, que es convergente si $|z| < 1$):

$$\frac{\mathbf{i}}{z} = \frac{\mathbf{i}}{(z-\mathbf{i})+\mathbf{i}} = \frac{1}{\mathbf{i}}\frac{\mathbf{i}}{1+\frac{z-\mathbf{i}}{\mathbf{i}}} = \frac{1}{1+\frac{z-\mathbf{i}}{\mathbf{i}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\right)^n$$

que será convergente si $\left|\frac{z-\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\right| < 1,$ es decir si $|z-\mathbf{i}| < |\mathbf{i}| = 1$ (es decir, alrededor de la circunferencia de centro $\mathbf{i}$ y radio 1). Así el desarrollo de Laurent en torno a este punto será

$$f(z) = \frac{\mathbf{i}}{z} + \frac{1-\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\right)^n + \frac{1-\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}$$

(de nuevo se observa que $z_1 = \mathbf{i}$ es un polo simple, ya que solamente aparece un término con $z-\mathbf{i}$ dividiendo, y éste es de grado 1).

- En $z_2 = 1+\mathbf{i}$: Pretendemos expresar las fracciones como potencias de $z-(1+\mathbf{i})$). Para ello, y por un razonamiento similar a los anteriores, pondremos

$$\frac{\mathbf{i}}{z} = \frac{\mathbf{i}}{z-1-i+(1+i)} = \frac{\frac{\mathbf{i}}{1+i}}{\frac{z-1-i}{1+i}+1} = \frac{\mathbf{i}}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n$$

que será convergente si $\left|\frac{z-1-i}{1+i}\right| < 1,$ es decir si $|z-1-\mathbf{i}| < |1+\mathbf{i}| = \sqrt{2}$ (es decir, alrededor de la circunferencia de centro $1+\mathbf{i}$ y radio $\sqrt{2}$), mientras que

$$\frac{1-\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \frac{1-\mathbf{i}}{(z-1-\mathbf{i})+1} = (1-\mathbf{i})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1-\mathbf{i})^n$$

que será convergente si $|z-1-\mathbf{i}| < 1,$ es decir, alrededor de la circunferencia de centro $1+\mathbf{i}$ y radio 1). Por tanto

$$f(z) = \frac{\mathbf{i}}{z} + \frac{1-\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{i}}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n + (1-\mathbf{i})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1-\mathbf{i})^n$$

y que será convergente alrededor de la circunferencia de centro $1+\mathbf{i}$ y radio 1.(De nuevo se observa que $z_2 = 1+\mathbf{i}$ no es singularidad, ya que en su desarrollo como potencias de $z-1-\mathbf{i}$ todos los términos aparecen multiplicando).

NOTA: También, y puesto que f es derivable en dicho punto, podríamos aplicar el desarrollo de Taylor de $f(z)$ en el punto $z_2 = 1+\mathbf{i}$, por lo que tendríamos que calcular las derivadas sucesivas de f y aplicaríamos

$$f(z) = f(1+\mathbf{i}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1+\mathbf{i})}{n!}(z-(1+\mathbf{i}))^n$$

— —

PROBLEMA 4. Sea $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0,2\pi]$, la circunferencia unidad. Discutir en función de los valores de $a > 0$ el resultado de la integral

$$\int_{\gamma}\frac{\sin(z^2)}{z(z^2+a^2)}dz$$

SOLUCIÓN: Las singularidades que tiene el denominador son $z_1 = 0,\ z_{2,3} = \pm a\mathbf{i}$. Por tanto, según los valores de $a > 0$ distinguiremos:

- Si $a > 1$: En este caso, el único punto singular aislado en el interior de γ es $z_1 = 0,$ por lo que

$$\int_{\gamma}\frac{\sin(z^2)}{z(z^2+a^2)}dz = 2\pi\mathbf{i}\,\mathrm{Res}(f,0) = 0$$

puesto que $\mathrm{Res}(f,0) = 0$, al ser $z_1 = 0$ una singularidad evitable (es un cero simple del denominador, pero es un cero doble del numerador).

NOTA: Este mismo caso también podría haberse calculado usando la primera de las fórmulas integrales de Cauchy, ya que

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{z(z^2+a^2)}dz = \int_\gamma \frac{\frac{\sin(z^2)}{(z^2+a^2)}}{z}dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z}dz = 2\pi\mathbf{i}\cdot g(0) = 0$$

- Si $a < 1$: En este caso, como las 3 singularidades están en el interior de γ, tendremos

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{z(z^2+a^2)}dz = 2\pi\mathbf{i}(\operatorname{Re}s(f,0) + \operatorname{Re}s(f,a\mathbf{i}) + \operatorname{Re}s(f,-a\mathbf{i})) =$$

$$= 2\pi\mathbf{i}\left(0 + \frac{\sin(a^2)}{2a^2} + \frac{\sin(a^2)}{2a^2}\right) = 2\pi\mathbf{i}\frac{\sin(a^2)}{a^2}$$

ya que

$$\operatorname{Re}s(f,a\mathbf{i}) = \frac{p(a\mathbf{i})}{q'(a\mathbf{i})} = \frac{\sin((a\mathbf{i})^2)}{3(a\mathbf{i})^2+a^2} = \frac{\sin(a^2)}{2a^2}$$

y el mismo resultado se obtiene para $\operatorname{Re}s(f,-a\mathbf{i})$.