Profesor: **Roque Molina Legaz**

Tema 3.2: INTRODUCCIÓN A LAS EDP's LINEALES DE 2º ORDEN: MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

PROGRAMA DETALLADO:

Introducción. Sobre soluciones de una EDP lineal.
Método de separación de variables.
Principio de superposición.
Clasificación de las ecuaciones.
Algunas ecuaciones clásicas.

Introducción. Sobre las soluciones de una EDP lineal.

Una **EDP de 2º orden** con dos variables independientes x e y es de la forma

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

mientras que una **EDP lineal de 2º orden** con dos variables independientes x e y será de la forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G \qquad (1)$$

donde los coeficientes A, B, C, D, E, F y G son constantes o funciones de x e y.

Cuando $G(x,y)=0$ se dice que la ecuación es **homogénea**; en caso contrario diremos que es **no homogénea**.

Example *Las EDP lineales de 2º orden*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=xy$$

son, respectivamente, homogénea y no homogénea.

Definition *La **solución** de una EDP lineal* (1) *es una función* $u(x,y)$ *de dos variables independientes (y para las que al menos existen todas las derivadas que aparecen en la ecuación) y que la satisface en alguna región del plano* $0XY$.

No es nuestra intención analizar procedimientos para encontrar soluciones generales de las EDP lineales. A menudo no solamente es difícil obtener la solución general de una EDP lineal de 2º orden, sino que una solución general habitualmente tampoco resulta muy útil en las aplicaciones. Por tanto, en este tema introductorio a estas EDP lineales de 2º orden nos centraremos en determinar soluciones particulares de algunas EDP lineales importantes, puesto que son ecuaciones que suelen aparecer en un gran número de aplicaciones.

Algunos casos particulares.

Para el caso particular en el que en la ecuación sólo aparecen derivadas parciales respecto de una variable, la integración puede realizarse de forma fácil ya que podemos tratarla como una ecuación diferencial ordinaria (EDO) respecto de esa variable, considerando la otra variable como constante:

Example *La EDP de 2º orden*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

puede ser resuelta integrando dos veces respecto de y : *Integrando una vez sobre* y, *tenemos* $\frac{\partial u}{\partial y} = f(x)$, *e integrando nuevamente tenemos*

$$u(x,y) = yf(x) + g(x)$$

con f, g *funciones arbitrarias.*

Example *Para resolver*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

hacemos el cambio de variable $w = \frac{\partial u}{\partial y}$, *de manera que la EDP anterior se transforma en*

$$\frac{\partial w}{\partial x} + w = 1$$

que es una EDO lineal de 1er orden. Resolviéndola (como se ve, por ejemplo, en la asignatura de Matemáticas I), se obtiene que su solución es

$$w = 1 + F(y)e^{-x}$$

siendo F *una función arbitraria. Deshaciendo el cambio original e integrando respecto a* y, *resulta que la solución de la EDP dada es*

$$u(x,y) = y + e^{-x} \int F(y)dy + g(x)$$

Example *Si queremos resolver*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 u = e^x$$

la resolveremos como si fuese una edo no homogénea lineal de 2º orden. Así primero hemos de resolver la edo homogénea asociada, que viene dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 u = 0$$

Tomando entonces y *como una constante, la solución general de esta edo homogénea es*

$$u_{gral} = f(y)e^{xy} + g(y)e^{-xy}$$

Para encontrar la solución particular usaremos el método de los coeficientes indeterminados, suponiendo que la solución particular que queremos encontrar es de la forma

$$u_{part} = A(y)e^x$$

Así, sustituyendo esta última función en la ecuación dada en el enunciado,resulta

$$Ae^x - y^2 Ae^x = e^x$$

por lo que

$$A(y) = \frac{1}{1-y^2}$$

Por tanto, una solución de la ecuación dada es (Solución general de la homogénea + solución particular de la no homogénea)

$$u = f(y)e^{xy} + g(y)e^{-xy} + \frac{e^x}{1-y^2}$$

Como ya hemos resaltado anteriormente, la mayoría de las EDP no pueden ser resueltas tan fácilmente como en los tres ejemplos anteriores. Sin embargo, en muchas aplicaciones en que intervienen EDP lineales bastará con obtener soluciones particulares.

Método de separación de variables.

A pesar que existen varios métodos que pueden utilizarse para encontrar soluciones particulares de una EDP lineal, con el **método de separación de variables** nuestro objetivo será encontrar una solución particular en forma de producto de una función de variable x y de una función de variable y, es decir, una solución de la forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Mediante esta suposición, con frecuencia será factible reducir una EDP lineal de dos variables a dos EDO's. Con este objetivo, notemos que se verifica

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = XY'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''$$

donde las primas ($'$) indican las derivadas ordinarias.

Example *Para hallar soluciones en forma de producto para la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial u}{\partial y}$$

realizamos la sustitución $u(x,y) = X(x)Y(y)$ *en la EDP, de forma quese obtiene*

$$X''Y = 4XY'$$

Así, dividiendo ambos miembros entre $4XY$ *separamos las variables*

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y}$$

Como el miembro izquierdo de esta expresión es independiente de y y es igual al miembro derecho, que es independiente de x, podemos concluir que ambos miembros de la ecuación son independientes de x e y. Es decir, cada miembro de la ecuación debe ser constante. A efectos prácticos, resulta conveniente escribir esta *constante como $-\lambda$. Así, a partir de las dos igualdades*

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda$$

obtenemos dos edo lineales

$$X'' + 4\lambda X = 0 \qquad y \qquad Y' + \lambda Y = 0 \tag{2}$$

La primera es una edo lineal de segundo orden mientras que la segunda es una edo lineal de primer orden. Según los valores de λ distinguiremos tres casos: que sea cero (es decir, $\lambda = 0$), positivo (es decir, de la forma $\lambda = \alpha^2$, siendo $\alpha > 0$) y negativo (es decir, $\lambda = -\alpha^2$, siendo $\alpha > 0$):

- *Caso I* $(\lambda = 0)$: *En este caso las edo's dadas por* (2) *se transforman en*

$$X'' = 0 \qquad y \qquad Y' = 0$$

que tienen por solución $X = c_1 + c_2 x$; $Y = c_3$.

Por tanto, una solución particular en forma de producto de la EDP dada será

$$u = XY = (c_1 + c_2 x)c_3 = A_1 + B_1 x$$

- *Caso II* $\left(\lambda = \alpha^2,\ con\ \alpha > 0\right)$: *En este caso las edo's dadas por* (2) *se transforman en*

$$X'' + 4\alpha^2 X = 0 \qquad y \qquad Y' + \alpha^2 Y = 0$$

que tienen por solución

$$X = c_4 \cos(2\alpha x) + c_5 \sin(2\alpha x); \qquad Y = c_6 e^{-\alpha^2 y}$$

Por tanto, una solución en forma de producto particular de la EDP dada será

$$u = XY = (c_4 \cos(2\alpha x) + c_5 \sin(2\alpha x))c_6 e^{-\alpha^2 y} =$$
$$= A_2 e^{-\alpha^2 y} \cos(2\alpha x) + B_2 e^{-\alpha^2 y} \sin(2\alpha x)$$

- *Caso III* $\left(\lambda = -\alpha^2,\ con\ \alpha > 0\right)$: *En este caso las edo's dadas por* (2) *se transforman en*

$$X'' - 4\alpha^2 X = 0 \qquad y \qquad Y' - \alpha^2 Y = 0$$

que tienen por soluciones

$$X = c_7 e^{-2\alpha x} + c_8 e^{2\alpha x}; \qquad Y = c_9 e^{\alpha^2 y}$$

respectivamente.

Por tanto, una solución en forma de producto particular de la EDP dada será

$$u = XY = (c_7 e^{-2\alpha x} + c_8 e^{2\alpha x})c_9 e^{\alpha^2 y} =$$
$$= A_3 e^{-2\alpha x + \alpha^2 y} + B_3 e^{2\alpha x + \alpha^2 y}$$

Se deja como ejercicio comprobar que efectivamente las tres expresiones particulares anteriores satisfacen la ecuación de partida.

Example *Para hallar una solución en forma de producto para la EDP*

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad k > 0$$

que verifique las condiciones $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$, hacemos $u = XT$, de manera *que podemos escribir la ecuación dada en la forma*

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\alpha^2$$

obteniendo así dos edo's lineales

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \qquad y \qquad T' + k\alpha^2 T = 0 \tag{3}$$

que tienen por soluciones

$$X = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x); \qquad T = c_3 e^{-k\alpha^2 t}$$

respectivamente. Ahora bien, puesto que

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$
$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

habrá de ser $X(0) = 0$ *y* $X(L) = 0$*. Estas son condiciones de frontera para la edo* $X'' + \alpha^2 X = 0$*. Aplicando la primera de estas condiciones a su solución, resulta inmediatamente que* $c_1 = 0$*, por lo que* $X = c_2 \sin(\alpha x)$*. La segunda condición de frontera implica que* $X(L) = c_2 \sin(\alpha L) = 0$*. Así, habrá de ser* $c_2 \neq 0$ *(ya que si* $c_2 = 0$*, entonces* $X = 0$*, por lo que* $u = 0$*, que será una solución trivial de la EDP original), por lo que entonces de* $\sin(\alpha L) = 0$*, tendremos* $\alpha L = n\pi$ *o* $\alpha = \frac{n\pi}{L}$*, siendo* $n = 1, 2, 3, \ldots$

Por consiguiente

$$u = (c_2 \sin(\alpha x))\left(c_3 e^{-k\alpha^2 t}\right) = A_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

es una solución de la EDP original que cumple las condiciones iniciales dadas. El coeficiente $c_2 c_3$ *anterior se ha expresado como* A_n *para indicar que se obtiene una solución distinta para cada valor de n.*

Remark *En este último ejemplo solamente se ha estudiado el Caso II del ejemplo anterior. Se deja para el lector comprobar que si se usa cualquiera de los otros dos casos no se obtiene una solución de la EDP original que cumpla las condiciones iniciales.*

La separación de variables no es un método general para encontrar soluciones particulares; algunas EDP lineales simplemente no se pueden separar: por ejemplo, puede el alumno comprobar que el supuesto $u = XY$ no nos da una solución para la EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

Principio de superposición.

El siguiente resultado es similar al que ya conocemos para edo lineales de orden superior (como vimos en Matemáticas I):

Theorem ***(Principio de superposición)****. Si* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *son las soluciones de una EDP lineal homogénea, entonces la combinación lineal*

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$$

siendo c_i *constantes, también es solución de la misma EDP.*

En lo que resta de tema supondremos que siempre que tengamos un conjunto infinito u_1, u_2,

.. de soluciones de una EDP lineal homogéna, podremos construir otra solución u formando la serie infinita

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$$

siendo c_i constantes.

Example *En virtud del prinicipio de superposición, la función definida mediante la serie*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

también satisfará (aunque sea formalmente) la EDP del último ejemplo anterior. Notemos también que esta última expresión de u como serie infinita satisface las condiciones iniciales $u(0,t) = 0$*,* $u(L,t) = 0$.

Clasificación de las ecuaciones.

Una EDP lineal de segundo orden en dos variables independientes con coeficientes constantes puede clasificarse en tres tipos diferentes. Esta clasificación dependerá solamente de los coeficientes de las derivadas de segundo orden:

Definition *La EDP lineal de segundo orden*

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \tag{4}$$

donde A, B, C, D, E *y* F *son constantes reales, se dice que es*

* ***Hiperbólica** si* $B^2 - 4AC > 0$.

* ***Parabólica** si* $B^2 - 4AC = 0$.

* ***Elíptica** si* $B^2 - 4AC < 0$.

Example *Para clasificar las siguientes EDP*

$$a)\ 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad b)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad c)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

escribimos cada ecuación en la forma general anterior (4)*, de manera que se tiene el siguiente cuadro:*

ECUACIÓN	*COEFICIENTES*	**B^2–4AC**	*TIPO*
$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$A = 3, B = C = 0$	0	*Parabólica*
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$A = 1, B = 0, C = -1$	4	*Hiperbólica*
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$A = 1, B = 0, C = 1$	–4	*Elíptica*

Remark *Una explicación más detallada de por qué desearíamos clasificar una EDP* *lineal de 2º orden sobrepasa el objetivo inicial de esta introducción. Sin embargo, la respuesta reside en el hecho de que deseamos resolver EDP sujetas a ciertas condiciones alternas conocidas (como son las condiciones iniciales y las de frontera). Los tipos apropiados de condiciones alternas para una determinada ecuación están en función de si la EDP es hiperbólica, parabólica o elíptica.*

Algunas ecuaciones clásicas.

En este último apartado del tema nos centraremos en hallar las soluciones producto de las siguientes EDP lineales de 2º orden y homogéneas

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad k > 0 \tag{5}$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{7}$$

o ligeras variaciones de ellas. Como ya avanzamos en el tema anterior, estas ecuaciones clásicas de física/matemáticas se conocen, respectivamente, como **ecuación unidimensional del calor**, **ecuación unidimensional de onda** y **ecuación bidimensional de Laplace**. El término "unidimensional" se refiere a que x expresa una dimension espacial mientras t representa el tiempo; en la tercera ecuación "bidimensional" significa que x e y son dimensiones espaciales. Siguiendo la clasificación introducida en el apartado anterior, notamos fácilmente que la ecuación del calor es parabólica, que la de onda es hiperbólica y que la de Laplace es elíptica.

Remark *La ecuación* (5) *se presenta en la teoría del flujo de calor, esto es, la transferencia de calor por conducción en una varilla o alambre delgado. La función* $u(x,t)$ *es la temperatura.*

Los problemas acerca de vibraciones mecánicas a menudo llevan a la ecuación de onda (6). *Para efectos del presente análisis, una solución* $u(x,t)$ *de* (6) *representará el desplazamiento de una cuerda idealizada.*

Por último, comentaremos que una solución $u(x,y)$ *de la ecuación de Laplace* (7) *puede interpretarse como la distribución de temperatura de estado estable (es decir, independiente del tiempo) en una placa delgada de dos dimensiones.*

Remark *En muchos libros de Ecuaciones Diferenciales puede estudiarse como surgen las anteriores ecuaciones diferenciales parciales, así como cuales son las habituales suposiciones de simplificación, que dan lugar a los respectivos problemas de condiciones iniciales o de frontera que vamos a intentar resolver. Por ejemplo, todo lo anterior podemos verlo en el texto Zill, D. G. - Cullen, M. R.: Matemáticas Avanzadas para Ingeniería I - Ecuaciones Diferenciales, de la editorial McGraw-Hill.*

La ecuación del calor.

Consideramos una varilla delgada de longitud L con temperatura inicial $f(x)$ en toda ella y cuyos extremos se mantienen a temperatura cero en todo tiempo t. Bajo unas hipótesis adicionales, y que pueden verse en el texto anteriormente mencionado (haciendo coincidir la barilla con el eje X en el intervalo $[0,L]$, básicamente las hipótesis consisten en suponer que dentro de la varilla el flujo de calor tiene lugar solo en la dirección x; que la superficie lateral -o curva- de la varilla está aislada -esto es, no se escapa calor de su superficie-; que no se genera calor dentro de la varilla; que la varilla es homogénea -es decir, su masa por unidad de volumen es constante-; y, por último, que el calor específico y la conductividad térmica del material de la varilla son constantes), entonces su temperatura $u(x,t)$ se determina mediante el problema de valores en la frontera

$$\begin{cases} k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad k > 0,\ 0 < x < L,\ t > 0 \\ \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{8}$$

(donde la constante k es proporcional a la conductividad térmica y se llama **difusividad térmica**).

Este problema, a excepción de la última condición inicial $u(x,0) = f(x)$, ha sido resuelto por separación de variables en un ejemplo anterior (nos hemos quedado solamente con el Caso II, ya que los otros dos casos quedan reducidos a $X(x) = 0,$ por lo que tendríamos como solución $u(x,t) = 0$), obteniéndose como solución

$$u_n(x,t) = A_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Así, con la finalidad de que esta solución verifiquen también la condición inicial $u(x,0) = f(x),$ podríamos seleccionar el coeficiente A_n de tal manera que

$$u_n(x,0) = f(x) = A_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

En general, no es de esperar que esta última condición quedase satisfecha mediante cualquier selección de f. Por tanto, estamos obligados a admitir que la anterior $u_n(x,t)$ no es una solución del problema dado por (8). Sin embargo, mediante el principio de superposición, la función

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

también debe satisfacer la ecuación y las condiciones de partida dadas por (8).

Si sustituimos $t = 0$ en la expresión anterior, se llega a

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

siendo esta última expresión la expansión de medio intervalo de f en una serie seno. Haciendo la identificación $A_n = b_n$, se llega a que

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

(ver seccion 10.3 del texto mencionado en la última observación anterior).

Por tanto, podemos concluir que una solución al problema de valores en la frontera dado por (8) está dado por la serie infinita

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Por ejemplo, para el caso particular en que la temperatura inicial sea $u(x,0) = 100,\ L = \pi$ y $k = 1,$ puede probarse que los coeficientes A_n vienen dados por

$$A_n = \frac{200}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]$$

por lo que la solución vendrá dada por la serie

$$u(x,t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

La ecuación de onda.

En este ejemplo consideramos las vibraciones transversales de una cuerda extendida entre dos puntos, por ejemplo, $x = 0$ y $x = L$. Si esta cuerda la hacemos coincidir con el eje $0X$ en el intervalo $[0,L]$, el movimiento de la misma se producirá en el plano XY, de manera tal que cada punto de la cuerda se mueve en dirección perpendicular al eje $0X$. Si $u(x,t)$ denota el desplazamiento de la cuerda para $t > 0$ medidos desde el eje $0X$, entonces u satisface la ecuación

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

donde suponemos que:

* La cuerda es perfectamente flexible.
* La cuerda es homogénea (es decir, su masa por unidad de longitud es constante).
* Los desplazamientos de u son pequeños comparados con el largo de la cuerda.
* La tensión de la cuerda es constante.
* La tensión es grande en comparación con la fuerza de gravedad.
* No actúan otras fuerzas sobre la cuerda.

Por consiguiente, un problema típico de condiciones en la frontera es

$$\begin{cases} a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < L, t > 0 \\ \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0} = g(x), \qquad 0 < x < L \end{cases} \tag{9}$$

Las condiciones de frontera de (9) simplemente dicen que los extremos de la cuerda permanecen fijos en todo instante. En $t = 0$, las funciones f y g dadas por las condiciones anteriores especifican la configuración inicial y la velocidad inicial de cada punto de la cuerda, respectivamente. En el contexto está implícito que f es continua y que $f(0) = f(L) = 0$.

Para solucionar este problema, separaremos variables en la EDP anterior, por lo que si $u(x,t) = X(x)T(t)$, obtendremos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda$$

por lo que

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad \text{y} \qquad T'' + a^2\lambda T = 0 \tag{10}$$

Tal y como ocurre en el problema anterior, las condiciones de frontera nos llevan a que $X(0) = X(L) = 0$. Por tanto, la primera de las dos edo dadas por (10) junto con las condiciones de frontera nos dan lugar al PVI habitual

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(L) = 0 \tag{11}$$

De las tres posibilidades para el parámetro λ ($\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$) solamente la última nos lleva a soluciones no triviales. Así, la solución general de (11), correspondiente a $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$, es

$$X = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)$$

Las condiciones $X(0) = X(L) = 0$ indican que $c_1 = 0$ y $c_2 \sin(\alpha L) = 0$. Esta última expresión indica que $\alpha L = n\pi$ o $\alpha = \frac{n\pi}{L}$. Los valores propios y las correspondientes funciones propias de (11) son $\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$ y $X(x) = c_2 \sin(\frac{n\pi}{L}x)$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

La solución general de la segunda edo de (10) es

$$T(t) = c_3 \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + c_4 \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

Volviendo a escribir c_2c_3 como A_n y c_2c_4 como B_n, las soluciones que satisfacen tanto la ecuación onda como las condiciones de frontera son

$$u_n = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{12}$$

Haciendo $t = 0$ en esta última expresión, resulta

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

el cual es un desarrollo de f en serie de senos en medio intervalo. Como para la ecuación del flujo de calor, podemos poner $A_n = b_n$,

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{13}$$

Para determinar B_n, derivamos (12) con respecto a t y luego hacemos $t = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi a}{L} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + B_n \frac{n\pi a}{L} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\ \Big|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Para que esta última serie sea un desarrollo de g en serie de senos en medio intervalo en el intervalo dado, el coeficiente total, o $B_n \frac{n\pi a}{L}$, debe estar dado por la forma

$$B_n \frac{n\pi a}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

de donde

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{14}$$

Por tanto, la solución formal del problema viene dada por la expresión (12), con A_n y B_n dados por (13) y (14) respectivamente. Notemos que cuando la cuerda se suelta a partir del reposo, entonces $g(x) = 0$ para todo x en $0 \leq x \leq L$, y en consecuencia, $B_n = 0$.

La ecuación de Laplace.

Supongamos que se quiere obtener la temperatura $u(x,y)$ correspondiente al estado permanente en una placa rectangular cuyas orillas verticales $x = 0$ y $x = a$ se encuentran aisladas, mientras que las orillas superior e inferior $y = b$ e $y = 0$ se mantienen a temperaturas $f(x)$ y 0, respectivamente. Cuando no se pierde calor a través de las caras laterales de la placa, el problema viene dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ \\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0, \qquad 0 < y < b \\ u(x,0) = 0, \qquad u(x,b) = f(x), \qquad 0 < x < a \end{cases} \tag{15}$$

Tomando entonces $u(x,y) = X(x)Y(y)$, obtendremos

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

por lo que

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad \text{y} \qquad Y'' - \lambda^2 Y = 0 \tag{16}$$

y

$$X = c_1\cos(\lambda x) + c_2\sin(\lambda x) \qquad \text{y} \qquad Y = c_3\cosh(\lambda y) + c_2\sinh(\lambda y) \tag{17}$$

En (16), las tres condiciones de frontera nos llevan a que $X'(0) = 0$, $X'(a) = 0$ y $Y(0) = 0$. Derivando X y haciendo $x = 0$ se obtiene $c_2 = 0$, y por lo tanto $X = c_1\cos(\lambda x)$. Derivando nuevamente y haciendo $x = a$ resulta $-c_1\lambda\sin(\lambda a) = 0$. Esta última condición se satisface cuando $\lambda = 0$, cuando $\lambda a = n\pi$ o bien $\lambda = \frac{n\pi}{a}$, siendo $n = 1,2,\ldots$ Notemos que $\lambda = 0$ implica que la primera de las ecuaciones de (16) se transforma en $X'' = 0$. La solución general de esta ecuación viene dada por la función lineal $X = c_1 + c_2 x$, que no coincide con (17). En este caso, las condiciones de frontera $X'(0) = 0$, $X'(a) = 0$ exigen que $X = c_1$. Contrariamente a los dos ejemplos anteriores, estamos obligados a concluir que $\lambda = 0$ es un valor propio. Haciendo corresponder $\lambda = 0$ con $n = 0$, se tiene que las funciones propias son

$$X = c_1, \qquad n = 0 \qquad \text{y} \qquad X = c_1\cos\frac{n\pi}{a}x, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Finalmente, la condición $Y(0) = 0$ obliga a que $c_3 = 0$ en (16), cuando $\lambda > 0$. Sin embargo, cuando $\lambda = 0$ la ecuación se transforma en $Y'' = 0$ y por tanto la solución será $Y = c_3 + c_4 y$ en lugar de la dada por (17). No obstante, $Y(0) = 0$ nuevamente implica que $c_3 = 0$ y así $Y = c_4 y$. Por consiguiente, las soluciones en forma de producto de la ecuación que satisfacen las tres primeras condiciones de frontera son

$$A_0 y, \qquad n = 0 \qquad \text{y} \qquad A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

El principio de superposición nos da otra solución más

$$u(x,y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \tag{18}$$

Sustituyendo en esta expresión $y = b$ resulta

$$u(x,b) = f(x) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

lo que es un desarrollo de f en serie de cosenos de medio intervalo. Si hacemos las identificaciones $A_0 b = a_0/2$ y $A_n \sinh(\frac{n\pi}{a} b) = a_n$, tendremos que

$$2A_0 b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) dx; \qquad A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx$$

o lo que es lo mismo

$$A_0 = \frac{1}{ab} \int_0^a f(x) dx; \qquad A_n = \frac{2}{a \sinh(\frac{n\pi}{a} b)} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx \tag{19}$$

Por tanto, la solución formal de este problema viene dado por la serie (18) donde los coeficientes vienen dados por (19).