Profesor: **Roque Molina Legaz**

Tema 2.3: INTEGRAL DE SUPERFICIE.

PROGRAMA DETALLADO:

Superficies biláteras. **Ejemplos y definiciones previas**.
Integral de superficie.
Integrales de funciones escalares sobre superficies.
Integrales de superficie de funciones vectoriales.
Teoremas fundamentales de la Teoría de Campos.
Teorema de Stokes.
Teorema de la divergencia.
Aplicaciones de la integral de superficie.
Resumen: **Cálculo de la integral de superficie**
Ejercicios resueltos.
Ejercicios propuestos.

De la misma forma que la integral de línea extiende el concepto de integral sobre un intervalo del eje real al caso de curvas en el espacio, la integral de superficie extenderá la definición de integral sobre un dominio plano al caso de superficies alabeadas.

Existe gran similitud en el estudio de las integrales sobre líneas y superficies, tanto en las definiciones como en las interpretaciones y aplicaciones. Al igual que en la integral de línea interviene el sentido del recorrido de la curva de integración, en las integrales de superficie es necesario distinguir las dos caras de las superficies llamadas *biláteras* u *orientables*. Como se verá, la distinción entre ambas caras de integración se hará a través de criterios basados en el sentido del vector normal a la superficie.

Superficies biláteras. Ejemplos y definiciones previas.

Una superficie S en $\mathbb{R}^3$ puede venir dada de tres formas:

a) Como la gráfica de una función dada en forma explícita $z = f(x,y)$, donde $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, es decir

$$S = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$$

Recordamos que en este caso, la ecuación del plano tangente en un punto $(a,b,c) = (a,b,f(a,b)) \in S$ viene dada por

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)$$

b) De forma implícita, mediante una expresión de la forma $g(x,y,z) = 0,$ siendo g una función diferenciable de tres variables:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0\}$$

y la ecuación del plano tangente en un punto $(a,b,c) \in S$ es el plano de ecuación implícita

$$\nabla g(a,b,c) \bullet (x-a, y-b, z-c) = 0$$

donde "$\bullet$" representa el producto escalar de dos vectores (se supone que $\nabla g(a,b,c) \neq 0,$ puese en otro caso el plano tangente no está definido). Notemos que el vector gradiente $\nabla g(a,b,c)$ es ortogonal a S en el punto (a,b,c).

c) Mediante sus ecuaciones paramétricas, como vemos a continuación.

Definition *Se define una **superficie parametrizada** S como la imagen de una función* $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\Phi(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

donde $(s,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

A la función Φ *se le llama **parametrización** de S. Si* Φ *es diferenciable (lo que equivale a decir que sus componentes son funciones diferenciables), se dice que la superficie S es **diferenciable**.*

Al conjunto de puntos dado por

$$S = \{\Phi(s,t) \in \mathbb{R}^3 \mid (s,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\}$$

*se le llama **gráfica** de la superficie S.*

Remark *En este caso, y como veremos más adelante, el plano tangente en un punto* $\Phi(s_0,t_0) = (a,b,c) \in S$ *es el plano de ecuaciones paramétricas*

$$(x,y,z) = \Phi(s_0,t_0) + s\frac{\partial \Phi(s_0,t_0)}{\partial s} + t\frac{\partial \Phi(s_0,t_0)}{\partial t}$$

donde

$$\frac{\partial \Phi(s_0,t_0)}{\partial s} = \left(\frac{\partial x(s_0,t_0)}{\partial s}, \frac{\partial y(s_0,t_0)}{\partial s}, \frac{\partial z(s_0,t_0)}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial \Phi(s_0,t_0)}{\partial t} = \left(\frac{\partial x(s_0,t_0)}{\partial t}, \frac{\partial y(s_0,t_0)}{\partial t}, \frac{\partial z(s_0,t_0)}{\partial t}\right)$$

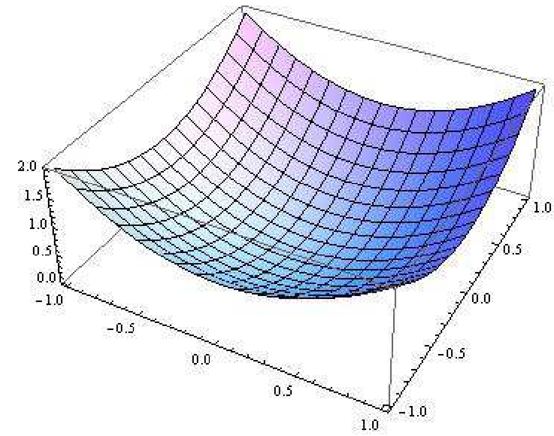
siendo ambos vectores tangentes a S en (a,b,c).

Remark *El caso (a) anterior, es una particularización del caso (b), ya que basta con considerar* $g(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$. *También el caso (a) es una particularización de (c), es decir, dada una superficie en forma explícita* $z = f(x,y)$, *siempre podemos considerar una parametrización elemental de la misma, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:*

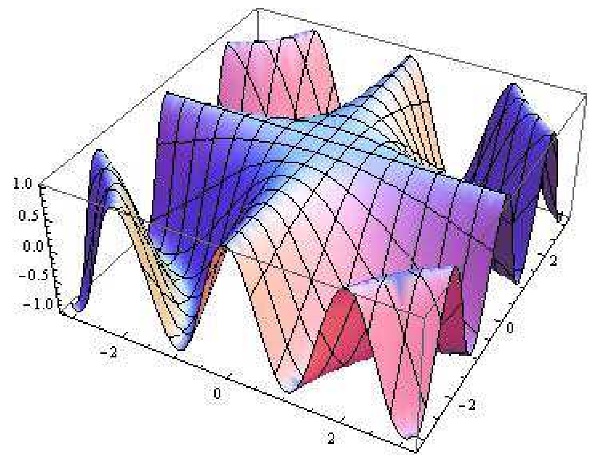
Example *Dada una función de dos variables* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *ésta define de forma natural una superficie de la forma* $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por la parametrización*

$$\begin{cases} x(s,t) = s \\ y(s,t) = t \\ z(s,t) = f(s,t) \end{cases}$$

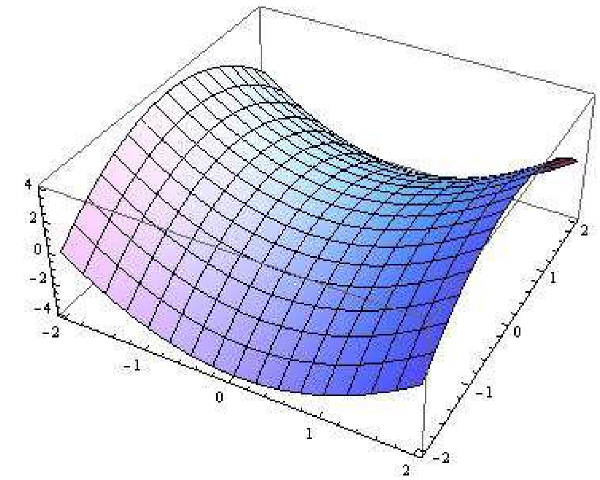
Así, por ejemplo, si consideramos $f(x,y) = x^2 + y^2$ *definida en* $D = [-1,1] \times [-1,1]$ *se obtiene una superficie cuya gráfica viene dada por*



De igual forma la gráfica de $f(x,y) = \cos(xy)$ *definida en* $D = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$ *es*



Otro ejemplo interesante de superficie es el del paraboloide hiperbólico ("silla de montar"), que es la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$*, que por ejemplo, definida en* $D = [-2,2] \times [-2,2]$*, viene dada por*



Example ***(Plano)*** *Obviamente, cualquier plano de* $\mathbb{R}^3$ *es una superficie. Sabemos que un plano viene dado por una ecuación del tipo* $Ax + By + Cz + D = 0$*. Si por ejemplo, suponemos que* $A \neq 0$*, podemos despejar x de la ecuación anterior y obtenemos que el plano viene dado por la siguiente parametrización* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x(s,t) = \frac{1}{A}(D - Bs - Ct) \\ y(s,t) = s \\ z(s,t) = t \end{cases}$$

Example ***(Esfera y elipsoide)*** *El elipsoide de centro* $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *viene dado por la ecuación implícita*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

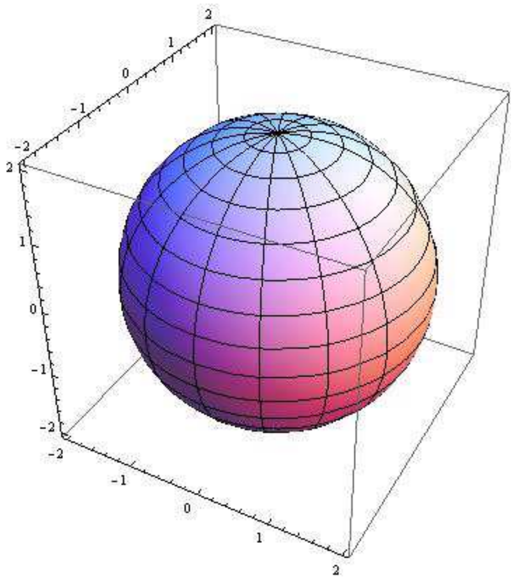
donde a, b, c *son números reales positivos. Cuando* $a = b = c = R$*, obtenemos una esfera de radio R, dada por las ecuaciones*

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

En este caso, para dar una parametrización de la misma puede ser aconsejable usar coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x(\theta,\varphi) = x_0 + R\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(\theta,\varphi) = y_0 + R\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(\theta,\varphi) = z_0 + R\cos(\varphi) \end{cases}$$

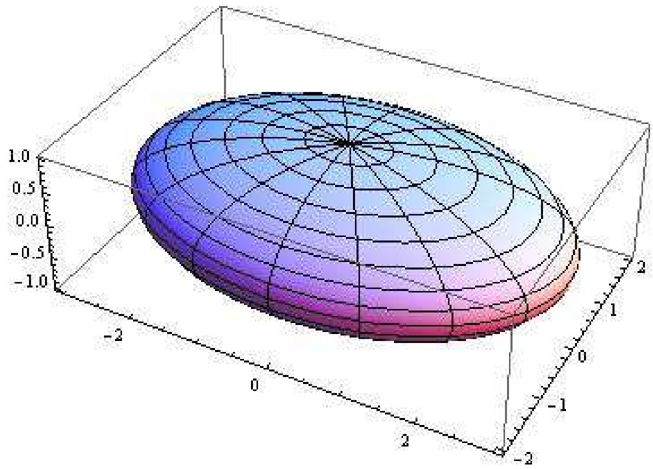
donde $\theta \in [0, 2\pi]$ *y* $\varphi \in [0, \pi]$*. Por ejemplo, si consideramos que la esfera está centrada en el origen y que su radio es* $R = 2$ *su representación gráfica es*



En el caso más general del elipsoide, la parametrización es de la forma

$$\begin{cases} x(\theta,\varphi) = x_0 + a\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(\theta,\varphi) = y_0 + b\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(\theta,\varphi) = z_0 + c\cos(\varphi) \end{cases}$$

de manera que, por ejemplo, si consideramos el elipsoide centrado en $(0,0,0)$ *y con semiejes* $a = 3,\ b = 2$ *y* $c = 1$ *tenemos*



En este caso también podíamos haber considerado para parametrizar la esfera la misma observación que hemos realizado anteriormente para cualquier función de dos variables de los ejemplos anteriores, aunque en este caso la esfera sería la unión de dos gráficas cuyas parametrizaciones vienen dadas por

$$\begin{cases} x(s,t) = s \\ y(s,t) = t \\ z(u,v) = +\sqrt{R^2 - s^2 - t^2} \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x(s,t) = s \\ y(s,t) = t \\ z(u,v) = -\sqrt{R^2 - s^2 - t^2} \end{cases}$$

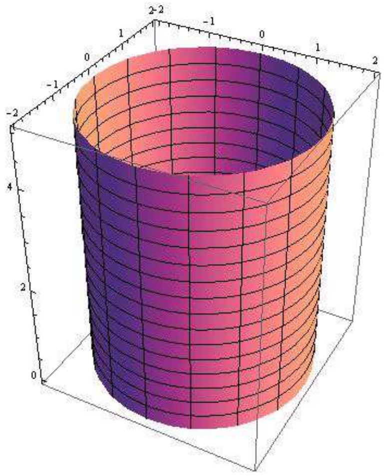
Example ***(Cilindros)*** *Un cilindro podemos pensarlo como una superficie que se genera al repetir una curva plana una cantidad infinita de veces, o lo que es lo mismo, la superficie que se genera al desplazar una curva plana a lo largo, por ejemplo, de un eje. Consideremos como ejemplo un cilindro de base circular, dado por la ecuación* $x^2 + y^2 = R^2$*, donde* $0 \leq z \leq h$*. Notemos que es la base del cilindro (en este caso la circunferencia* $x^2 + y^2 = R^2$*) la que se repite. Por ello, si la curva plana tiene por ecuaciones paramétricas* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *con* $t \in [a,b]$*, una posible parametrización para el cilindro de base* $\gamma(t)$ *es la dada por*

$$\begin{cases} x(s,t) = x(s) \\ y(s,t) = y(s) \\ z(s,t) = t \end{cases}$$

con $s \in [a,b]$ *y* $t \in [0,h]$*. Por ejemplo, si tomamos el cilindro de base* $x^2 + y^2 = 4$*, donde* $0 \leq h \leq 5$*, su parametrización es la dada por*

$$
\begin{cases} x(s,t) = 2\cos(s) \\ y(s,t) = 2\sin(s) \\ z(s,t) = t \end{cases}
$$

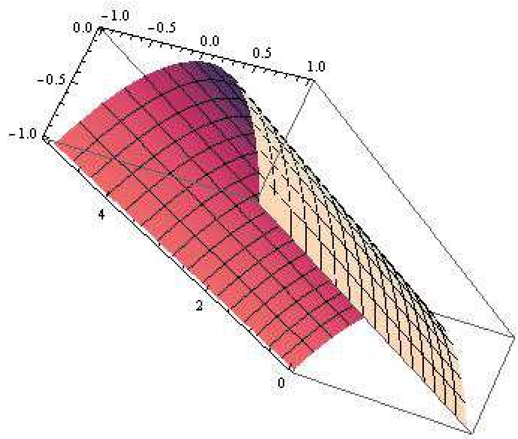
con $s \in [0, 2\pi]$ *y* $t \in [0, 5]$.



Para el caso de un cilindro parabólico con base la parábola $y = -x^2$ *se parametriza como*

$$
\begin{cases} x(s,t) = s \\ y(s,t) = -s^2 \\ z(s,t) = t \end{cases}
$$

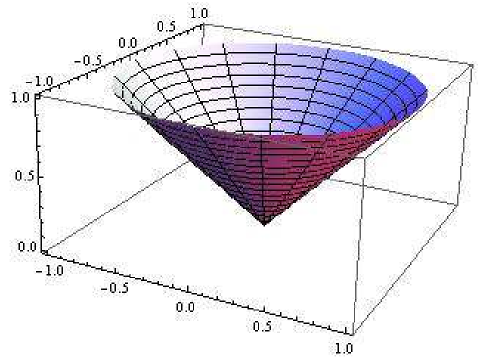
y si consideramos que $s \in [-1, 1]$ *y* $t \in [0, 5]$*, tendremos*



Example ***(Conos)*** *La ecuación normalizada de un cono viene dada por* $x^2 + y^2 = z^2$ *(se trata de un cono de eje Z y de abertura* $\pi/4$*). Para parametrizar dicha superficie es aconsejable tomar coordenadas cilíndricas. Para ello sabemos que para cada* $z = z_0 \in \mathbb{R}$ *se tiene una circunferencia* $x^2 + y^2 = z_0^2$*, que se escribe en coordenadas polares, teniendose por tanto la parametrización*

$$\begin{cases} x(s,t) = t\cos(s) \\ y(s,t) = t\sin(s) \\ z(s,t) = t \end{cases}$$

con $s \in [0,2\pi]$ *y* $t \in \mathbb{R}$. *Si lo representamos con* $t \in [0,1]$ *se tiene*



Supongamos entonces que Φ es una superficie diferenciable en (s_0,t_0). Si le damos a s un valor fijo s_0, se obtiene una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $t \mapsto \Phi(s_0,t)$ cuya imagen es una curva

$$\Phi(s_0,t) = (x(s_0,t), y(s_0,t), z(s_0,t))$$

sobre la superficie, y cuyo vector tangente en el punto t_0 está dado por

$$\frac{\partial\Phi(s_0,t_0)}{\partial t} = \left(\frac{\partial x(s_0,t_0)}{\partial t}, \frac{\partial y(s_0,t_0)}{\partial t}, \frac{\partial z(s_0,t_0)}{\partial t}\right)$$

y que representamos por $\Phi_s(s_0,t_0)$.

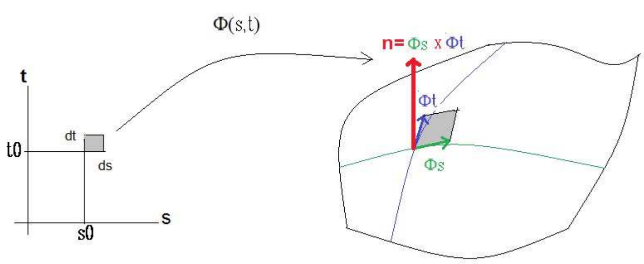
De manera análoga, si fijamos $t = t_0$ tendremos la curva $s \mapsto \Phi(s,v_0)$ dada por

$$\Phi(s,t_0) = (x(s,t_0), y(s,t_0), z(s,t_0))$$

que tiene por vector tangente en s_0 el dado por

$$\frac{\partial\Phi(s_0,t_0)}{\partial s} = \left(\frac{\partial x(s_0,t_0)}{\partial s}, \frac{\partial y(s_0,t_0)}{\partial s}, \frac{\partial z(s_0,t_0)}{\partial s}\right)$$

y que representamos por $\Phi_t(s_0,t_0)$.



Como los vectores $\frac{\partial\Phi(s_0,t_0)}{\partial s}$ y $\frac{\partial\Phi(s_0,t_0)}{\partial t}$ son tangentes a dos curvas sobre la superficie en el punto $\Phi(s_0,t_0)$, determinan el **plano tangente** a la superficie en este punto; esto es, el vector obtenido al multiplicar vectorialmente los anteriores vectores tangentes, es decir,

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\partial\Phi(s_0,t_0)}{\partial s} \times \frac{\partial\Phi(s_0,t_0)}{\partial t} \equiv \Phi_s(s_0,t_0) \times \Phi_t(s_0,t_0)$$

que es un vector normal a la superficie S.

Así, se dice que la superficie S es **suave en un punto** $\Phi(s_0,t_0)$ si $\vec{\mathbf{n}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ en (s_0,t_0). La superficie S es **suave** si es suave en todos los puntos de S. Intuitivamente, que una superficie sea suave significa que no tiene ”esquinas”.

Por tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (x_0,y_0,z_0) viene dado por

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\bullet\vec{\mathbf{n}} = 0$$

donde "$\bullet$" indica el producto escalar de los dos vectores.

Veamos algunos ejemplos:

Example *Sea la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ dada por su parametrización (en coordenadas esféricas, tomando constante el radio $R = 1$)*

$$\begin{cases} x(\theta,\varphi) = \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(\theta,\varphi) = \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(\theta,\varphi) = \cos(\varphi) \end{cases}$$

con $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$. Entonces

$$\Phi_\theta = (-\sin(\theta)\sin(\varphi),\cos(\theta)\sin(\varphi),0)$$
$$\Phi_\varphi = (\cos(\theta)\cos(\varphi),\sin(\theta)\cos(\varphi),-\sin(\varphi))$$

y el vector normal es

$$\vec{\mathbf{n}} = \Phi_\theta \times \Phi_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{vmatrix} =$$
$$= \left(-\cos(\theta)(\sin(\varphi))^2,-\sin(\theta)(\sin(\varphi))^2,-\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right) =$$
$$= -\sin(\varphi)(x(\theta,\varphi),y(\theta,\varphi),z(\theta,\varphi))$$

Example *Sea el cono dado por la parametrización*

$$\begin{cases} x(s,t) = s\cos(t) \\ y(s,t) = s\sin(t) \\ z(s,t) = s \end{cases}$$

con $s \in [0,1]$ y $t \in [0,2\pi]$.

Entonces

$$\Phi_s = (\cos(t),\sin(t),1) \quad y \quad \Phi_t = (-s\sin(t),s\cos(t),0)$$

y el vector normal es

$$\vec{\mathbf{n}} = \Phi_s \times \Phi_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(t) & \sin(t) & 1 \\ -s\sin(t) & s\cos(t) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (s\cos t, s\sin t, s) = s(\cos t, \sin t, 1)$$

por lo que el cono será suave excepto cuando $s = 0$*, o lo que es lo mismo en el el punto* $(0,0,0)$.

Al igual que en el caso de las integrales de línea interviene el sentido del recorrido de la curva de integración, en las integrales de superficie es necesario distinguir las dos caras de la superficie (puesto que siempre utilizamos **superficies biláteras** u **orientables**). La distinción entre ambas caras de integración se hace a través de criterios basados en el sentido del vector normal a la superficie. El criterio más usual, y que es el que nosotros empleamos, consiste en tomar como **cara superior** o **positiva** aquella en la que el vector normal forma en cada uno de sus puntos un ángulo agudo con la dirección positiva del eje *OZ*, es decir, tal que $\cos\gamma > 0$, siendo $\cos\gamma$ el coseno director en dicho eje; análogamente, la **cara inferior** o **negativa** será aquella en la que el vector normal forma un ángulo obtuso con la dirección positiva del eje *OZ*, es decir, tal que $\cos\gamma < 0$. Ambas caras se encuentran separadas por el **contorno** o **frontera**, de forma que un punto móvil sobre la superficie, para pasar de una a otra cara, deberá interceptar al contorno.

Antes de proceder a dar la definición de integral de superficie consideramos primero el problema de calcular el área de una superficie, de forma análoga a como en el tema anterior se consideró el problema de hallar la longitud de un arco de curva:

Definition *Se define el* ***área de una superficie parametrizada*** *S mediante la integral doble dada por*

$$A(S) = \iint_{\Omega} \|\vec{\mathbf{n}}\| dsdt = \iint_{\Omega} \|\Phi_s \times \Phi_t\| dsdt$$

donde $\|\Phi_s \times \Phi_t\|$ *es la norma (módulo) de* $\Phi_s \times \Phi_t$*. Si S es la unión de varias superficies* S_i*, su área es la suma de las áreas de las* S_i*.*

Example *Vamos a calcular el área de la esfera de radio* 1 *dada en un ejemplo anterior:*

Como sabemos que

$$\vec{\mathbf{n}} = \Phi_\varphi \times \Phi_\theta = \left(-\cos(\varphi)(\sin(\theta))^2, -\sin(\varphi)(\sin(\theta))^2, -\sin(\theta)\cos(\theta)\right)$$

tenemos que

$$\|\Phi_\varphi \times \Phi_\theta\| = \ldots = \sin(\theta)$$

por lo que el área viene dada por

$$A(S) = \iint_{\Omega} \|\Phi_\varphi \times \Phi_\theta\| d\varphi d\theta = \iint_{\Omega} \sin(\theta)\, d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta = 4\pi$$

Remark *Para el caso particular en que la superficie S venga dada en la forma* $z = f(x,y)$*, ésta admite, como ya hemos visto, la parametrización dada por* $x = s$*,* $y = t$*,* $z = f(s,t)$*, por lo que si f es de clase* $\mathcal{C}^{(1)}$*, la fórmula para el cálculo del área de S se reduce a*

$$A(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

Establecidos estos preámbulos, pasamos a definir el concepto de integral de superficie, lo que haremos inicialmente para el caso de funciones escalares, y con posterioridad extenderemos dicha definición al caso de funciones vectoriales.

Integral de superficie.

Integrales de funciones escalares sobre superficies.

Consideramos una superficie S bilátera, dada por su ecuación paramétrica $\Phi\ :\ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y sea $f\ :\ S \subset \mathbb{R}^3 \to\ \mathbb{R}$ un campo escalar definido sobre S, que suponemos también acotado y continuo. Para definir la integral de f sobre S, procedemos como hemos realizado en temas anteriores a la hora de introducir un nuevo concepto de integral: Realizamos una partición arbitraria de S en n **áreas curvas parciales** ("*escamas de superficie*"), cada una de ellas con área superficial que denotamos por $\triangle_k\ S,\ (k = 1,2,\ldots,n)$. En cada una de estas áreas curvas elegimos un punto arbitrario intermedio $(\zeta_k,\eta_k,\delta_k)$. Entonces consideramos la suma de Riemann asociada a esta partición, que se define como la suma de productos de los valores que toma f en los puntos intermedios $(\zeta_k,\eta_k,\delta_k)$ por las correspondientes áreas parciales, es decir:

$$f(\zeta_1,\eta_2,\delta_3)\ \triangle_1\ S + \ldots + f(\zeta_n,\eta_n,\delta_n)\ \triangle_n\ S = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k,\eta_k,\delta_k)\ \triangle_k\ S$$

Definition *Si existe el límite de la suma anterior cuando $n \to \infty$ y $\triangle_k\ S \to 0$ (es decir, cuando consideramos una sucesión de particiones de S cada vez más finas y con norma tendiendo a 0), siendo este límite independiente de la partición en áreas curvas parciales realizada y de la elección de los puntos intermedios $(\zeta_k,\eta_k,\delta_k)$, a su valor le llamamos **integral de superficie** de $f(x,y,z)$ sobre S, y se representa por $\iint_S f\ dS$, es decir*

$$\iint_S f\ dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \triangle_k\ S\to 0}} \sum_{k=1}^{n} F(\zeta_k,\eta_k,\delta_k)\ \triangle_k\ S$$

Por supuesto, y como ya hemos visto cada vez que hemos introducido un nuevo concepto de integral, esta definición no es útil desde un punto de vista práctico para abordar directamente el cálculo de la integral de superficie, aunque esta definición si nos permite establecer sus propiedades más importantes. Entre éstas, destacamos:

Proposition *En las condiciones anteriores, se verifican:*

a) Las funciones continuas en S son integrables.

b) Las funciones casicontinuas (funciones acotadas con, a lo sumo, un número finito de discontinuidades) son integrables.

*c) **Linealidad**:*

$$\iint_S (f+g)\ dS = \iint_S f\ dS + \iint_S g\ dS$$

y

$$\iint_S c\, f\, dS = c \iint_S f\, dS \quad (con\ c\ cte)$$

d) ***Partición del dominio de integración****: Si $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$, siendo S_i superficies que no se intersectan excepto, quizá, a lo largo de las curvas que definen sus fronteras, entonces*

$$\iint_S f\, dS = \sum_{i=1}^{m} \iint_{S_i} f\, dS$$

Cálculo práctico de integrales de funciones escalares sobre superficies.

Una vez establecido el concepto de integral de superficie, podemos abordar su cálculo desde un punto de vista práctico. Para ello distinguimos que la superficie S venga dada por una parametrización o por una expresión explícita (por ejemplo, de la forma $z = f(x,y)$). En cualquiera de estos casos habremos de expresar dS en función de algo que sepamos calcular (por ejemplo, si S viene dada por sus ecuaciones paramétricas con parámetros s, t, tendremos que expresar dS en términos de ds, dt; si S viene dada por $z = f(x,y)$, tendremos que expresar dS en términos de dx y dy). En definitiva, tenemos los siguientes casos:

* Si S viene dada por $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con $\Phi(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, se verifica

$$\iint_S f\, dS = \iint_\Omega f(\Phi(s,t))\, \|\Phi_s \times \Phi_t\|\, ds dt$$

que ya es una integral doble sobre el recinto Ω.

* Si S viene dada en forma explícita, distiguiremos los siguientes casos, según proyectemos sobre según que plano coordenado:

- Proyección sobre OXY : En este caso S viene dada por una ecuación de la forma $z = z(x,y)$. Entonces si representamos por D_1 a la proyección de S sobre el plano OXY, se obtiene

$$\iint_S f\, dS = \iint_{D_1} f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx dy$$

De forma análoga:

- Proyección sobre OXZ : Si representamos por D_2 a esta proyección y si la ecuación de S viene dada en forma explícita por $y = y(x,z)$,

$$\iint_S f\, dS = \iint_{D_2} f(x, y(x,z), z) \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\, dx dz$$

- Proyección sobre OYZ : Si representamos por D_3 a la proyección y si la ecuación de S viene dada en forma explícita por $x = x(y,z)$,

$$\iint_S f\, dS = \iint_{D_3} f(x(y,z), y, z) \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\, dy dz$$

Example *Calcular*

$$\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$$

siendo S la superficie $z = 2 - (x^2 + y^2)$.

Remark *Estas fórmulas de cálculo se aplican directamente en el caso de que S presente regularidad según las direcciones de los ejes. En otros casos será preciso realizar una partición previa de la superficie S en porciones regulares, de acuerdo con la propiedad de partición del dominio de integración.*

Remark *En el caso de que la ecuación de S venga dada en forma implícita por* $G(x,y,z) = 0$*, resultan las siguientes fórmulas de cálculo:*

$$\iint_S f\,dS = \iint_{D_1} f(x,y,z)\frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}{|G_z|}dxdy$$

$$\iint_S f\,dS = \iint_{D_2} f(x,y,z)\frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}{|G_y|}dxdz$$

$$\iint_S f\,dS = \iint_{D_3} f(x,y,z)\frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}{|G_x|}dydz$$

Example *Calcular*

$$\iint_S dS$$

extendida al casquete de radio $\frac{R}{2}$ *de la esfera de radio* R.

Integrales de superficie de funciones vectoriales.

La definición de integral de superficie para funciones escalares puede extenderse al caso de funciones vectoriales en la forma siguiente: Dado un campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ definido sobre *S*, se define la **integral de superficie de $\vec{\mathbf{F}}$ sobre** *S*, y se denota por $\iint_S \vec{\mathbf{F}}\,dS$, como la integral de superficie de la componente normal (a la que representaremos por $\vec{\mathbf{n}}$) de $\vec{\mathbf{F}}$ sobre la superficie, es decir

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\,dS = \iint_S \vec{\mathbf{F}}\bullet\vec{\mathbf{n}}\,dS$$

donde $\vec{\mathbf{F}}\bullet\vec{\mathbf{n}}$ representa el producto escalar de ambos vectores. A esta última, que no es sino la integral de superficie de una función escalar, se le conoce como **flujo del campo $\vec{\mathbf{F}}$ a través de la superficie** *S*. Por tanto

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\,dS = \iint_\Omega \vec{\mathbf{F}}(\Phi(s,t))\bullet\vec{\mathbf{n}}\,dsdt$$

Example *Consideremos la esfera de radio* 1 *dada por su correspondiente parametrización (vista en un ejemplo anterior) y sea* $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x,y,z)$*. Para calcular el flujo del campo* $\vec{\mathbf{F}}$ *a través de dicha esfera hemos de aplicar*

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\,dS = \iint_\Omega \vec{\mathbf{F}}(\Phi(\theta,\varphi))\bullet(\Phi_\theta \times \Phi_\varphi)\,d\theta d\varphi$$

Como sabemos que

$$\Phi_\theta \times \Phi_\varphi = -\sin(\varphi)(x(\theta,\varphi), y(\theta,\varphi), z(\theta,\varphi))$$

y

$$\vec{\mathbf{F}}(\Phi(\theta,\varphi)) = (\cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\varphi))$$

(sólo hemos de sustituir en $\vec{\mathbf{F}}$ las expresiones de $\Phi(\theta,\varphi)$), tendremos entonces

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\, dS =$$

$$= \iint_\Omega (\cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\varphi)) \bullet (-\sin(\varphi))(x(\theta,\varphi), y(\theta,\varphi), z(\theta,\varphi))\, d\theta d\varphi =$$

$$= \iint_\Omega -\sin(\varphi)\, d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} (-\sin(\varphi)) d\varphi = -4\pi$$

Example *Calcular*

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\, dS$$

siendo $\vec{\mathbf{F}}=(xy, -x^2, x+z)$ y S la parte del plano $2x + 2y + z = 6$ que queda en el primer octante.

Teoremas fundamentales de la Teoría de Campos.

Las integrales de funciones vectoriales intervienen en el campo de la física matemática en lo que se conoce como **Teoría de Campos**, y en concreto en dos teoremas de gran importancia: el *teorema de Stokes* y el *teorema de la divergencia*. Las expresiones vectoriales de ambos teoremas proporcionan interpretaciones físicas relacionadas con trabajos de circulación y flujos vectoriales, que toman especial relevancia en los casos de vectores conservativos y solenoidales.

Teorema de Stokes.

El teorema de Stokes constituye el resultado principal de la teoría de integrales de superficie. Se trata de una generalización del teorema de Green en el plano. Recordamos que este teorema relaciona la integral sobre una región plana con la integral de línea sobre la frontera de la misma región; en el teorema de Stokes se relaciona una integral de superficie con la integral de línea a lo largo del borde de dicha superficie:

Theorem ***(Stokes)*** *Sea S una superficie orientable limitada por una curva cerrada y simple γ, con un vector normal unitario $\vec{\mathbf{n}}$. Si $\vec{\mathbf{F}}$ es un campo vectorial con derivadas parciales de primer orden continuas sobre S, entonces*

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{dr} = \iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

Remark *Esta igualdad expresa que la integral curvilínea de la componente tangencial a un vector $\vec{\mathbf{F}}$ alrededor de una curva simple cerrada γ que limita una porción de superficie S (también conocido como **trabajo de circulación**), coincide con el flujo de su rotacional a través de dicha superficie en la dirección normal a la cara de integración que se considere. En el caso en que el campo $\vec{\mathbf{F}}$ sea conservativo (es decir, si $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \vec{\mathbf{0}}$), se verifica, por aplicación inmediata del teorea de Stokes, que $\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{dr} = 0$, como ya sabemos.*

Example *Calcular*

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

siendo $\vec{\mathbf{F}} = (3y, -xz, yz^2)$*, S la superficie del paraboloide* $2z = x^2 + y^2$ *limitado por* $z = 2$ *y* γ *el contorno de S.*

Example *Idem para* $\vec{\mathbf{F}} = (y, -x, yz)$*, siendo S la parte de la superficie* $z = 2x^2 + 2y^2$*, con* $z \leq \frac{1}{2}$*. Hacerlo directamente y mediante el teorema de Stokes.*

Remark *Este teorema puede generalizarse a superficies que no cumplan las restricciones impuestas, siempre que dicha superficie S pueda dividirse en superficies* S_1, S_2, $\ldots, S_k$*, de contornos* γ_1, γ_2, $\ldots, \gamma_k$*, que si cumplan las restricciones. Se aplicará entonces el teorema a cada superficie y sumando las integrales de cada miembro se obtiene el resultado final.*

Example *Comprobar el teorema de Stokes para* $\vec{\mathbf{F}} = (2z, x, y^2)$ *sobre la superficie S del paraboloide* $z = 4 - x^2 - y^2$*, siendo* γ *la base de S sobre el plano OXY.*

Teorema de la divergencia.

El teorema de la divergencia, también conocido como **teorema de Gauss-Ostrogradsky** o como **teorema de Green en el espacio**, es otra forma de extensión del teorema de Green en el plano y relaciona una integral tomada sobre una superficie cerrada S, que limita un volumen V, con una integral triple extendida sobre V :

Theorem ***(Divergencia)*** *Sea S una superficie cerrada que encierra una región de volumen V, donde se toma como dirección positiva la de la normal exterior a la superficie. Dadas 3 funciones* A_1, A_2, A_3 *de clase* $\mathcal{C}^{(1)}$ *en dicha región, se verifica que si* α, β *y* γ *son los ángulos de la normal con cada uno de los ejes coordenados (es decir, si* $\vec{\mathbf{n}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$*), entonces*

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_S (A_1 \cos\alpha + A_2 \cos\beta + A_3 \cos\gamma) dS$$

Remark *La igualdad anterior se puede expresar en forma vectorial como*

$$\iiint_V div\left(\vec{\mathbf{F}}\right)\, dxdydz = \iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

lo cual quiere decir que la integral de superficie de la componente normal de un vector $\vec{\mathbf{F}}$ *(es decir, el flujo) en una superficie cerrada coincide con la integral de la divergencia de dicho vector en el volumen que encierra la superficie.*

Example *Sea V la región sólida limitada por los planos coordenados y el plano* $2x + 2y + z = 6$*. Calcular*

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

siendo $\vec{\mathbf{F}} = (x, y^2, z)$.

Remark *Este teorema puede generalizarse a cualquier tipo de superficies cerradas en el espacio (para ello, sólo habremos de dividir estas superficies en otras que sean del tipo que aparecen en el enunciado anterior, y calculamos el flujo a través de cada una de ellas).*

Remark *En caso de que la superficie S sea abierta, para aplicar este teorema, habremos de cerrar ésta mediante superficies elementales, de manera que calculamos, mediante el teorema de Gauss, el flujo total a través de toda la superficie cerrada y posteriormente calculamos el flujo a través de la superficie abierta como diferencia entre el flujo total y los flujos de las superficies elementales (éstos últimos calculados de forma directa).*

Example *Calcular, mediante el teorema de Gauss,* $\iint_{S_1} \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$ *siendo* $\vec{\mathbf{F}} = (xy, 1, z+1)$ *y* S_1 *la superficie de la semiesfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ *con* $z \geq 0$.

Example *Sea* $\vec{\mathbf{F}} = (xz, 3xy, -2z)$. *Calcular* $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$, *aplicando el teorema de Gauss, en los siguientes casos:*

a) S es el cilindro cerrado limitado por $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ *y* $z = 3$.

b) S es la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$, *con* $0 \leq z \leq 3$.

Aplicaciones de la integral de superficie.

Las aplicaciones geométricas se limitan a la evaluación del área de porciones de superficie curvas, y las de carácter físico están relacionadas con el cálculo de masas, centros de masas y momentos de inercia de distribuciones de materia sobre superficies curvas.En todos los casos, son siempre integrales de superficie de campos escalares:

* **Área de una porción de superficie**: Si la función integrando es la unidad, de acuerdo con la definición

$$\acute{A}rea(S) = \iint_S dS$$

* **Masa de una distribución superficial**: Si denotamos por $\rho(x,y,z)$ al campo escalar que nos da densidad puntual de la superficie *S*, su masa viene dada por

$$M = \iint_S \rho(x,y,z) dS$$

* **Centros de masas de una distribución superficial**: Análogamente, las coordenadas del centro de masas de una distribución superficial vienen dadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_S x\rho(x,y,z)dS;\ \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_S y\rho(x,y,z)dS;\ \bar{z} = \frac{1}{M}\iint_S z\rho(x,y,z)dS;$$

De esta forma, si la distribución es homogénea, $\rho(x,y,z) = cte$, se tiene que

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_S xdS; \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\iint_S ydS; \qquad \bar{z} = \frac{1}{A}\iint_S zdS$$

siendo

$$A = \iint_S dS$$

* **Momentos de inercia de una distribución superficial**: Con la anterior notación, se verifican las siguientes expresiones:

- Momento de inercia respecto del origen

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dS$$

- Momento de inercia respecto de los ejes coordenados

$$I_{OX} = \iint_S (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dS$$

$$I_{OY} = \iint_S (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dS$$

$$I_{OZ} = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dS$$

- Momento de inercia respecto de los planos coordenados

$$I_{OXY} = \iint_S z^2\rho(x,y,z)dS$$

$$I_{OYZ} = \iint_S x^2\rho(x,y,z)dS$$

$$I_{OXZ} = \iint_S y^2\rho(x,y,z)dS$$

Example *Se considera la porción de superficie del paraboloide*

$$S = \{(x,y,z)\ :\ x^2 + y^2 = 2 - z,\ 0 \le z \le 2\}$$

Se pide:

a) Suponiendo constante su distribución superficial, obtener su área, su momento de inercia respecto al eje OZ y su centro de gravedad geométrico.

b) Suponiendo que sobre la superficie hay distribuida una materia con una densidad que es proporcional, en cada punto, a la altura z del mismo (es decir, si $\rho(x,y,z) = kz$, con k constante), hallar su masa total.

Example *Dadas las superficies $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y $S_2 : x^2 + y^2 - Ry = 0$, calcular:*

a) El área de S_2 que queda en el interior de S_1.

b) El momento de inercia respecto del eje OZ de la porción de S_1 que queda, en el primer octante, en el interior de S_2.

Resumen: Cálculo de la integral de superficie

Integral de superficie de un campo escalar.

Sea S una superficie S bilátera dada por una parametrización $\Phi(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar definido sobre S. La integral de superficie de f sobre S se define como la integral doble dada por

$$\iint_S f dS := \iint_\Omega f(\Phi(s,t)) \|\vec{\mathbf{n}}\| dudv = \iint_\Omega f(\Phi(u,v)) \|\Phi_s \times \Phi_t\| dsdt$$

siendo Ω el recinto plano donde varía (s,t) y $\vec{\mathbf{n}}$ un vector unitario. Notemos que por dS representamos a $dS = \|\vec{\mathbf{n}}\| dsdt = \|\Phi_s \times \Phi_t\| dsdt$.

Remark *Para el caso particular en que $f(x,y,z) = 1$, con esta definición se tiene que*

$$\iint_S 1 dS = \iint_\Omega \|\Phi_s \times \Phi_t\| dsdt = \acute{A}rea(S)$$

Remark *Según como venga dada la superficie S (por una parametrización o por su ecuación en forma explícita y/o implícita), también podemos aplicar:*

** Si S viene dada por una ecuación de la forma $z = z(x,y)$ (Proyección sobre OXY), y si representamos por D_1 a la proyección de S sobre el plano OXY, se obtiene*

$$\iint_S f\, dS = \iint_{D_1} f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Notemos que, en este caso,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

** Si S viene dada por una ecuación de la forma $y = y(x,z)$ (Proyección sobre OXZ), y si representamos por D_2 a la proyección de S sobre el plano OXZ, se obtiene*

$$\iint_S f\, dS = \iint_{D_2} f(x,y(x,z),z) \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\, dxdz$$

** Si S viene dada por una ecuación de la forma $x = x(y,z)$ (Proyección sobre OYZ), y si representamos por D_3 a la proyección de S sobre el plano OYZ, se obtiene*

$$\iint_S f\, dS = \iint_{D_3} f(x(y,z),y,z) \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\, dydz$$

Remark *En el caso de que la ecuación de S venga dada en forma implícita por $G(x,y,z) = 0$, resultan las siguientes fórmulas de cálculo (según el plano donde se proyecte la superficie):*

$$\iint_S f\,dS = \iint_{D_1} f(x,y,z)\frac{\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}}{|G_z|}dxdy$$

Notemos que en este caso, $dS = \frac{\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}}{|G_z|}dxdy$.

Análogamente,

$$\iint_S f\,dS = \iint_{D_2} f(x,y,z)\frac{\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}}{|G_y|}dxdz$$

$$\iint_S f\,dS = \iint_{D_3} f(x,y,z)\frac{\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}}{|G_x|}dydz$$

Integrales de superficie de un campo vectorial.

La integral de superficie para un campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ definido sobre S (**flujo del campo $\vec{\mathbf{F}}$ a través de la superficie** S), se calcula a partir de la integral de superficie de un campo escalar haciendo

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\,dS = \iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}dS$$

donde $\vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}$ representa el producto escalar de ambos vectores. Por tanto, si la superficie S viene dada por la parametrización $\Phi(s,t) = (x(s,t),y(s,t),z(s,t))$, se tiene que

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\,dS := \iint_\Omega \vec{\mathbf{F}}(\Phi(s,t)) \bullet \vec{\mathbf{n}}\,dsdt = \iint_\Omega \vec{\mathbf{F}}(\Phi(s,t)) \bullet (\Phi_s \times \Phi_t)dsdt$$

Teorema de Stokes.

Sea S una superficie orientable limitada por una curva cerrada y simple γ, con un vector normal unitario $\vec{\mathbf{n}}$. Si $\vec{\mathbf{F}}$ es un campo vectorial con derivadas parciales de primer orden continuas sobre S, entonces

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{dr} = \iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\,dS$$

Remark *Esta expresión nos da otra forma de calcular una integral de línea (en* $\mathbb{R}^3$*) a lo largo de una curva cerrada. En el caso en que el campo* $\vec{\mathbf{F}}$ *sea conservativo (es decir, si* $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \vec{\mathbf{0}}$*), se verifica que* $\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{dr} = 0$*, como ya sabemos.*

Este teorema puede generalizarse a superficies que no cumplan las restricciones impuestas, siempre que dicha superficie S pueda dividirse en superficies S_1, S_2, $\ldots, S_k$*, de contornos* γ_1, γ_2, $\ldots,\gamma_k$*, que si cumplan las restricciones. Se aplica entonces el teorema a cada superficie y, sumando las integrales de cada miembro, se obtiene el resultado final.*

Teorema de la divergencia.

El teorema de la divergencia (**de Gauss-Ostrogradsky** o **de Green en el espacio**), relaciona una integral tomada sobre una superficie cerrada S, que limita un volumen V, con una integral triple extendida sobre V :

Sea S una superficie **cerrada** que encierra una región de volumen V. Entonces

$$\iiint_V div\left(\vec{\mathbf{F}}\right)dxdydz = \iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

Remark *La igualdad anterior indica que el flujo de un vector a través de una superficie cerrada coincide con la integral de la divergencia de dicho vector en el volumen que encierra la superficie.*

Este teorema puede generalizarse a cualquier tipo de superficies cerradas en el espacio (para ello, sólo habremos de dividir estas superficies en otras que sean del tipo que aparecen en el enunciado anterior, y calculamos el flujo a través de cada una de ellas).

Remark *En caso de que la superficie S sea* ***abierta****, para aplicar este teorema habremos de cerrar ésta mediante superficies elementales, de manera que calcularemos, mediante el teorema de Gauss, el flujo total a través de toda la superficie cerrada y posteriormente calcularemos el flujo a través de la superficie abierta como diferencia entre el flujo total y los flujos de las superficies elementales (calculando éstos de forma directa).*

Ejercicios resueltos.

1. *Dada la superficie*

$$S = \left\{(x,y,z);\ (x-\pi)^2 + y^2 = (2+\cos(z))^2,\ 0 < z < 2\pi\right\}$$

se pide:

1.a *Calcular su área, es decir, calcular la integral*

$$A(S) = \iint_S dS$$

1.b *Dado el campo vectorial* $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y,0,1)$*, calcular el flujo a través de S.*

1.c *Determinar la masa de S si su densidad viene dada por el campo escalar* $\rho(x,y,z) = \sqrt{1+\sin^2(z)}$*, es decir, calcular la integral*

$$M(S) = \iint_S \rho(x,y,z)dS$$

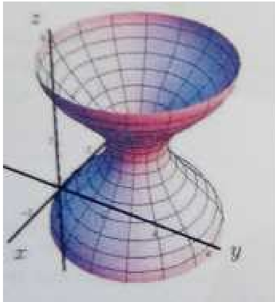
Indicación: Para describir una superficie cuya geometría se asemeja a un cilindro vertical pueden usarse coordenadas cilíndricas. Si el eje del cilindro no coincide con el eje Z y su radio varía en función de la altura z, es decir, si para cada valor de z las secciones transversales son círculos centrados en un punto (x_0,y_0,z_0) *de radio* $r(z)$*, se modifican las coordenadas cilíndricas* (r,θ,z)*, de forma que su relación con las cartesianas* (x,y,z) *viene dada por*

$$x = x_0 + r(z)\cos(\theta); \qquad y = y_0 + r(z)\sin(\theta); \qquad z = z$$

siendo el determinante jacobiano del cambio el dado por $J = r(z)$*. A fin de facilitar los cálculos en este ejercicio, tener en cuenta que se verifica*

$$\int_0^{2\pi} (2+\cos(z))\sqrt{1+\sin^2(z)}\,dz \approx 15.28$$

Solución: La gráfica de superficie es la siguiente



(1.a) Para S, la sección transversal es un círculo de centro $(\pi, 0, z)$ y de radio $r(z) = 2 + \cos(z)$. Por tanto, y según la indicación que se nos da en el enunciado, hemos de realizar el cambio de variable

$$x = \pi + (2 + \cos(z))\cos(\theta); \qquad y = 0 + (2 + \cos(z))\sin(\theta); \qquad z = z$$

siendo $J = 2 + \cos(z)$, y $0 < \theta < 2\pi,\ 0 < z < 2\pi$.

Por tanto, podemos tomar como parametrización de S la dada por

$$\Phi(\theta, z) = (\pi + (2 + \cos(z))\cos(\theta), 0 + (2 + \cos(z))\sin(\theta), z)$$

por lo que

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \|\vec{\mathbf{n}}\| d\theta dz$$

Al ser

$$\vec{\mathbf{n}} = T_\theta \times T_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -(2 + \cos(z))\sin(\theta) & (2 + \cos(z))\cos(\theta) & 0 \\ -\sin(z)\cos(\theta) & -\sin(z)\sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2 + \cos(z))(\cos(\theta), \sin(\theta), \sin(z))$$

se tendrá que

$$\|\vec{\mathbf{n}}\| = (2 + \cos(z))\sqrt{1 + \sin^2(z)}$$

y así

$$A(S) = \iint_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \|\vec{\mathbf{n}}\| d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} (2 + \cos(z))\sqrt{1 + \sin^2(z)}\, dz \approx 2\pi \cdot 15.28$$

(1.b) Se tiene que el flujo viene dado por

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Phi(\theta, z)) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, d\theta dz = \ldots =$$

$$= \int_0^{2\pi} dz \int_0^{2\pi} \big((2 + \cos(z))^2 \cos(\theta)\sin(\theta) + (2 + \cos(z))\sin(z)\big) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} ((2 + \cos(z))\sin(z)) dz = \ldots = 0$$

(1.c) En este caso, tendremos

$$M(S) = \iint_S \rho(x,y,z)dS = \iint_S \sqrt{1+\sin^2(z)}\, dS$$

que es la integral de superficie de un campo escalar. Por tanto, y para calcularla, aplicamos que

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(\Phi(\theta,z))\|\vec{\mathbf{n}}\|\, d\theta dz$$

es decir

$$M(S) = \iint_S \sqrt{1+\sin^2(z)}\, dS = \iint_D \sqrt{1+\sin^2(z)}\,(2+\cos(z))\sqrt{1+\sin^2(z)}\, d\theta dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} (1+\sin^2(z))(2+\cos(z))dz = \ldots = 2\pi \cdot 6\pi = 12\pi$$

2. *Dada la superficie cilíndrica*

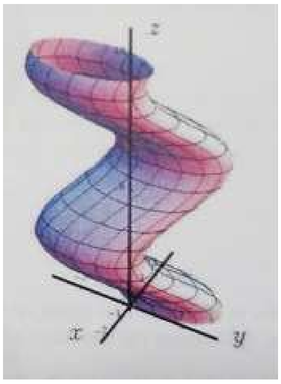
$$S = \left\{(x,y,z);\ \frac{(x-\cos(z))^2}{4} + (y-\cos(z))^2 = 1,\ 0 < z < 10\right\}$$

se pide:

2.a *Calcular el plano tangente en cada punto.*

2.b *Calcular la integral del campo vectorial* $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x^2 - z, 0, 0)$ *sobre S.*

Indicación: La gráfica de la superficie viene dada por



Para describir una región cuya geometría se asemeja a un cilindro de sección elíptica con centro y semiejes variables con la altura, pueden usarse coordenadas cilíndricas de la forma (r,θ,z)*, que se relacionan con las cartesianas mediante las igualdades*

$$x = p(z) + a(z)r\cos(\theta); \qquad y = q(z) + b(z)r\sin(\theta); \qquad z = z$$

siendo $a(z)$*,* $b(z)$ *los semiejes de las secciones elípticas y* $(p(z), q(z))$ *las coordenadas del centro. El rango máximo de los valores que pueden tomar estas coordenadas es* $0 < r < 1$*,* $0 < \theta < 2\pi$*,* $z \in \mathbb{R}$*. El determinante jacobiano es, en este caso, de la forma* $J = a(z)b(z)r$*.*

Solución: Según la indicación del enunciado, la superficie cilíndrica podemos expresarla en las coordenadas (r,θ,z) por medio de

$$x = \cos(z) + 2 \cdot 1 \cdot \cos(\theta) = \cos(z) + \cos(\theta)$$

$$y = \cos(z) + 1 \cdot \sin(\theta) = \cos(z) + \sin(\theta)$$

$$z = z$$

siendo $J = a(z)b(z)r = 2 \cdot 1 = 2 = 2$, con $0 \le \theta \le 2\pi$ y $0 < z < 10$.

(a) Podemos tomar como parametrización de la superficie la dada por

$$\Phi(\theta,z) = (\cos(z) + 2\cos(\theta), \cos(z) + \sin(\theta), z)$$

Sabemos que el plano tangente a la superficie en el punto (x_0,y_0,z_0) viene dado por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \bullet \vec{\mathbf{n}} = 0$$

y como

$$\vec{\mathbf{n}} = T_\theta \times T_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\sin(z) & -\sin(z) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\cos(\theta), 2\sin(\theta), \sin(z)(2\sin(\theta) + \cos(\theta)))$$

dicha ecuación será

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \bullet (\cos(\theta), 2\sin(\theta), \sin(z)(2\sin(\theta) + \cos(\theta))) = 0$$

(b) Se trata de calcular

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Phi(\theta,z)) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, d\theta dz = \ldots =$$

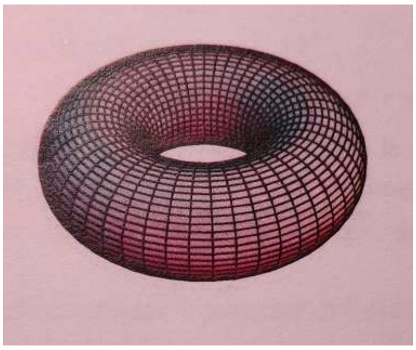
$$= \int_0^{10} dz \int_0^{2\pi} \left((\cos(z) + 2\cos(\theta))^2 \cos(\theta) - z\cos(\theta) \right) d\theta = \ldots$$

$$= 4\pi \sin(10)$$

3. *Sea S el toro de* $\mathbb{R}^3$ *descrito por la parametrización*

$$\Phi(\theta,\varphi) = ((2 + \cos(\varphi))\cos(\theta), (2 + \cos(\varphi))\sin(\theta), \sin(\varphi))$$

con $\theta, \varphi \in [0, 2\pi]$*, y cuya gráfica viene dada por*



Se pide:

3.a *Probar que*

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = Vol(S)$$

siendo $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x,0,0)$.

3.b *Usar el resultado anterior para obtener el volumen del toro.*

Solución:

(3.a) Puesto que se trata de una superficie cerrada, podemos usar el teorema de la divergencia, de manera que

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dxdydz = \ldots = \iiint_V 1 dxdydz = Vol(S)$$

(3.b) Usamos entonces esta indicación para obtener el volumen de dicha figura (Notemos que si intentamos resolver de forma directa esta integral triple, no resulta para nada fácil el cálculo de la misma):

A partir de la parametrización dada se puede obtener que

$$\vec{\mathbf{n}} = T_\theta \times T_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -(2+\cos(\varphi))\sin(\theta) & (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) & 0 \\ -\sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) \end{vmatrix} =$$

$$= (2+\cos(\varphi))(\cos(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

Por tanto

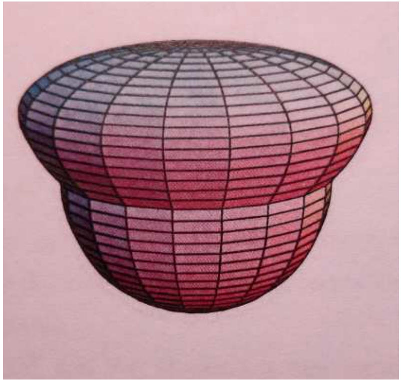
$$Vol(S) = \iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Phi(\theta,\varphi)) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, d\theta d\varphi = \ldots =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (2+\cos(\varphi))^2 \cos^2(\theta)\cos(\varphi) d\theta = \ldots = 4\pi^2$$

4. *Se considera el recinto dado por*

$$S = \left\{ (x,y,z); \left\{ \begin{array}{ll} x^2+y^2+z^2 < 1, & \text{si } z < 0 \\ \frac{x^2}{(1+z)^2} + \frac{y^2}{(1+z)^2} + z^2 < 1, & \text{si } z > 0 \end{array} \right. \right\}$$

y cuya gráfica viene dada por



Si se considera el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \left(x + y^2\sin(z),\ x^2 z + \log(1+z^2),\ xz + \pi\right)$$

calcular el flujo de $\vec{\mathbf{F}}$ *a través de la superficie S.*

Solución: Puesto que se trata de una superficie cerrada, usamos el teorema de la divergencia. Así

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dxdydz = \iiint_V (1+x) dxdydz$$

y por la forma de la superficie, aplicamos que

$$\iiint_V (1+x)dxdydz = \iiint_{V_1}(1+x)dxdydz + \iiint_{V_2}(1+x)dxdydz$$

siendo V_1 la parte inferior de la figura (corresponde al hemisferio inferior de la esfera) y V_2 la parte superior (que corresponde a la parte superior del elipsoide). Hemos de calcular ambas integrales triples por separado:

Para la integral sobre V_1 realizamos un cambio a coordenadas esféricas

$$x(r,\theta,\varphi) = r\cos(\theta)\sin(\varphi); \qquad y(r,\theta,\varphi) = r\sin(\theta)\sin(\varphi); \qquad z(r,\theta,\varphi) = r\cos(\varphi)$$

siendo $J = r^2\sin\varphi,$ con $\theta \in [0,2\pi],$ $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ y $0 \le r \le 1.$ Así

$$\iiint_{V_1}(1+x)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^1 (1+r\cos(\theta)\sin(\varphi))r^2\sin\varphi dr = \ldots = \frac{2}{3}\pi$$

Para la integral sobre V_2 realizamos un cambio a coordenadas esféricas generalizadas: Para el caso de un elipsoide de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$$

este cambio viene dado por

$$x(r,\theta,\varphi) = ar\cos(\theta)\sin(\varphi); \qquad y(r,\theta,\varphi) = br\sin(\theta)\sin(\varphi); \qquad z(r,\theta,\varphi) = cr\cos(\varphi)$$

siendo $J = abc \cdot r^2\sin(\varphi),$ con $\theta \in [0,2\pi],$ $\varphi \in [0,\pi]$ y $0 \le r \le 1.$ Por tanto, en nuestro caso (notemos que los semiejes del elipsoide son $a = 1+z$ y $b = 1+z,$ por lo que dependen de la variable z), el cambio es

$$\begin{aligned} x(r,\theta,\varphi) &= (1+z)r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(r,\theta,\varphi) &= (1+z)r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(r,\theta,\varphi) &= 1\cdot r\cos(\varphi) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} x(r,\theta,\varphi) &= (1+r\cos(\varphi))r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(r,\theta,\varphi) &= (1+r\cos(\varphi))r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(r,\theta,\varphi) &= 1\cdot r\cos(\varphi) \end{aligned}$$

con $J = (1+r\cos(\varphi))^2r^2\sin(\varphi),$ con $\theta \in [0,2\pi],$ $\varphi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ y $0 \le r \le 1,$ por lo que

$$\iiint_{V_2}(1+x)dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (1+(1+r\cos(\varphi))r\cos(\theta)\sin(\varphi))(1+(1+r\cos(\varphi)))^2r^2\sin(\varphi)dr =$$

$$= \ldots = \frac{19}{5}\pi$$

Por todo lo anterior

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\bullet\vec{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V (1+x)dxdydz = \frac{2}{3}\pi + \frac{19}{5}\pi$$

5. *Sea el campo vectorial*

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \left(\cos(x-2y),\ -2\cos(x-2y),\ y^2+yz\right)$$

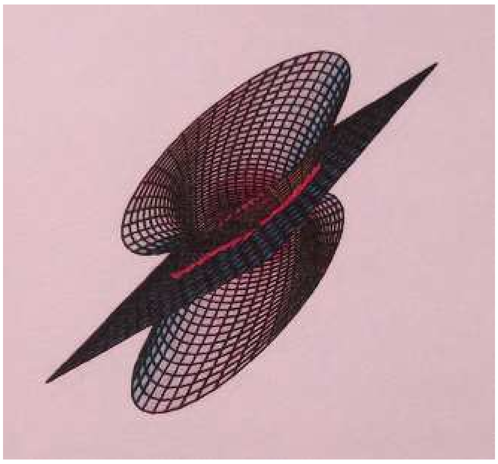
y sea γ la curva obtenida por la intersección de la superficie

$$S' = \left\{(x,y,z);\ x^2 + \frac{y^2}{(1+z)^2} = 1\right\}$$

con el plano

$$P = \{(x,y,z);\ x - z = 0\}$$

y cuya gráfica viene dada por



Calcular la circulación del campo $\vec{\mathbf{F}}$ *alrededor de* γ*, es decir, determinar el valor de la integral de línea*

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Solución: Puesto que se trata de una curva cerrada, usamos el teorema de Stokes. Para ello, y al ser

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos(x-2y) & -2\cos(x-2y) & y^2+yz \end{vmatrix} = (2y+z,0,0)$$

mientras que

$$\overrightarrow{\mathbf{n}_S} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad dS = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dxdy = \sqrt{2}\,dxdy$$

(por comodidad, hemos tomado como superficie S que contiene a la curva cerrada γ, el plano P), tenemos que

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{D_1} (2y+z)dxdy = \iint_{D_1} (2y+x)dxdy =$$

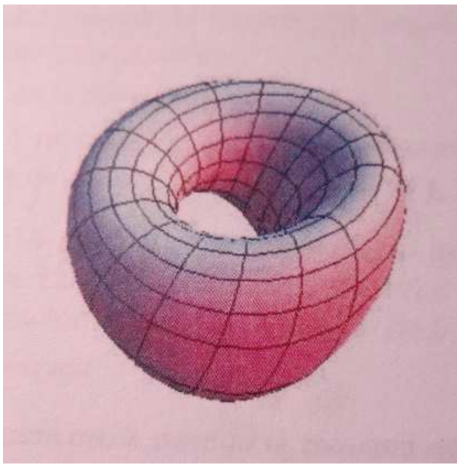
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\cos(\theta) + \frac{2}{3}\sin(\theta)\right)d\theta \int_0^1 (2r\sin(\theta) + r\cos(\theta))rdr = \ldots = 0$$

(Notemos que la proyección de la superficie S' sobre el plano OXY viene dada por $D_1 : x^2+y^2 \leq 1$).

6. *Sea S la superficie tórica descrita mediante la parametrización*

$$\Phi(\theta,\varphi) = ((2+\cos(\varphi))\cos(\theta), (2+\cos(\varphi))\sin(\theta), (2+\cos(\varphi))\sin(\varphi))$$

con $\theta,\varphi \in [0,2\pi]$*, y cuya gráfica viene dada por*



6.a *Calcular el plano tangente a la superficie en el punto* $\Phi\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (2, 0, 3)$.
6.b *Calcular la integral de superficie*

$$\iint_S x\vec{\mathbf{k}}dS$$

Solución:
(6.a) El plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) viene dado por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\bullet\vec{\mathbf{n}} = 0$$

y como

$$\vec{\mathbf{n}} = T_\theta \times T_\varphi =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -(2+\cos(\varphi))\sin(\theta) & (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) & 0 \\ -\sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\sin(\theta) & -\sin^2(\varphi) + (2+\cos(\varphi))\cos(\varphi) \end{vmatrix} =$$

$$= ((2+\cos(\varphi))\cos(\theta)(2\cos(\varphi)+\cos(2\varphi)),$$
$$,(2+\cos(\varphi))\sin(\theta)(2\cos(\varphi)+\cos(2\varphi)), (2+\cos(\varphi))\sin(\varphi))$$

dicha ecuación será

$$(x - 2, y - 0, z - 3)\bullet\vec{\mathbf{n}} = 0$$

(6.b) Siendo $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (0,0,x)$ hemos de calcular

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Phi(\theta, z)) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, d\theta d\varphi =$$
$$= \iint_D (0, 0, (2+\cos(\varphi))\cos(\theta)) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, d\theta d\varphi =$$
$$= \iint_D (2+\cos(\varphi))^2\cos(\theta)\sin(\varphi) d\theta d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} (2+\cos(\varphi))^2\cos(\theta)\sin(\varphi)d\varphi = \ldots = 0$$

7. *Sea*

$$S = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z > 0\right\}$$

la parte superior de la esfera de radio R. Dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y,-x,e^{xz})$$

se pide:

7.a *Calcular la integral del campo rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$, es decir, calcular*

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)\, dS$$

7.b *Comprobar el resultado anterior mediante el teorema de Stokes.*

Solución:

(7.a) Para calcular directamente esta integral de superficie, hemos de obtener

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = (0,-ze^{xz},-2)$$

mientras que

$$\vec{\mathbf{n}}_S = \frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}$$

y

$$dS = \frac{\sqrt{(G_x)^2+(G_y)^2+(G_z)^2}}{|G_z|}dxdy = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}dxdy$$

De esta forma

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = -\iint_{D_1}\left(2+ye^{x\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)dxdy$$

y si realizamos un cambio a polares para calcular esta última integral (teniendo en cuenta que $D_1 : x^2+y^2 \leq R^2$) resulta que obtenenos

$$\int_0^R dr\int_0^{2\pi}\left(2+r\sin(\theta)\cdot e^{r\cos(\theta)\sqrt{R^2-r^2}}\right)rd\theta = \ldots = 2\pi R^2$$

(esta última integral la hemos resuelto primero respecto de θ, y después respecto de r, puesto que si se integra primero respecto de r la misma es imposible de calcular).

(7.b) Para comprobar el resultado mediante el teorema de Stokes, aplicamos que

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \oint_\gamma \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{dr}$$

siendo γ la curva $x^2+y^2 = R^2$ que está situada en el plano $z = 0$. Por tanto, una parametrización de la misma viene dada por

$$\gamma(t) = (R\cos(t),R\sin(t),0) \qquad \text{con } t \in [0,2\pi]$$

De esta forma

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \oint_\gamma \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{dr} = \oint_\gamma \{-ydx+xdy+e^{xz}dz\} =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-R\sin(t)(-R\sin(t))dt+R\cos(t)(R\cos(t))dt+e^0 0dt) = \int_0^{2\pi}R^2dt = 2\pi R^2$$

8. *Sea*

$$T(x,y,z) = x^2y + z$$

el campo escalar que describe la distribución de temperaturas sobre la bola unidad. Suponiendo una constante de conductividad térmica k y teniendo en cuenta que la difusión térmica viene dada por el campo vectorial $-k\overrightarrow{\nabla T}$, se pide:

8.a *Calcular el flujo a través de la esfera unidad S.*

8.b *Calcular el flujo de calor que atraviesa el casquete esférico de ecuación*

$$S = \left\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z > \frac{1}{2}\right\}$$

Solución:

(8.a) Se tiene que

$$\vec{\mathbf{F}} = -k\overrightarrow{\nabla T} = -k(2xy, x^2, 1)$$

por lo que tenemos que calcular

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_S}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dxdydz = -k\iiint_V (2y+0+0)dxdydz$$

donde hemos aplicado el teorema de la divergencia (tenemos en cuenta que la superficie es cerrada). Solamente hemos de resolver esta integral triple, para lo que aplicamos un cambio a coordenadas esféricas:

$$x = r\cos(\theta)\sin(\varphi);\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi),\ z = r\cos(\varphi)$$

con $0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi$, siendo $J = r^2\sin(\varphi)$.

Entonces

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = -k\iiint_V 2r\sin(\theta)\sin(\varphi)\cdot r^2\sin(\varphi)dxdydz =$$

$$= -2k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{\pi} r\sin(\theta)\sin(\varphi)\, r^2\sin(\varphi)\, d\varphi = \ldots = 0$$

(8.b) En este caso se trata de calcular

$$\iint_{S_1} \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_{S_1}}\, dS_1$$

que podemos resolver directamente o aplicando de nuevo el teorema de la divergencia (siempre que cerremos S_1 por el plano $z = \frac{1}{2}$).

Si lo hacemos de esta última forma, denotamos por S a la superficie cerrada $S = S_1 \cup S_2$, siendo S_2 el plano $z = \frac{1}{2}$. Así

$$\iint_{S_1} \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_{S_1}}\, dS_1 = \iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_S}\, dS - \iint_{S_1} \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_{S_2}}\, dS_2 =$$

$$= \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dxdydz - \iint_{S_2} \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_{S_2}}\, dS_2$$

La integral triple la resolvemos mediante un cambio a coord. cilíndricas (siendo $0 \le r \le \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi,$ puesto que la proyección de este volumen en el plano OXY es $D_1 : x^2 + y^2 \le \frac{3}{4}$, siendo $\frac{1}{2} \le z \le 1$, con $J = r$), de manera que

$$\iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dxdydz = -k\iiint_V 2ydxdydz =$$

$$= -k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dr \int_{1/2}^1 2r\sin\theta \cdot rdz = \ldots = 0$$

y la integral a lo largo de S_2 la obtenemos de forma directa, teniendo en cuenta que

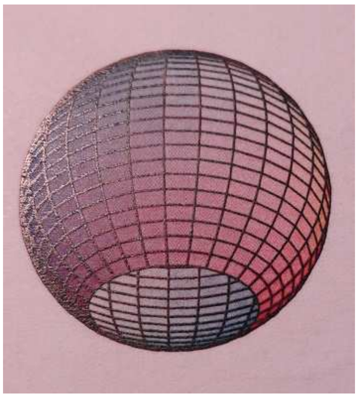
$\overrightarrow{\mathbf{n}_{S_2}} = (0,0,-1)$ y $dS_2 = dxdy$, por lo que

$$\iint_{S_2} \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_{S_2}}\, dS_2 = \iint_{D_1} k\, dxdy = kArea(D_1) = \frac{3}{4}k\pi$$

9. *Supongamos que se tiene un fluido en un recinto cerrado S, que usando coordenadas esféricas viene descrito por las ecuaciones*

$$\left\{(r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\varphi))\ :\ 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$$

y cuya gráfica se incluye a continuación. Si el campo de velocidades (en unidades de volumen por segundo) del fluido es de la forma $rot\left(\vec{\mathbf{H}}\right)$, *siendo* $\vec{\mathbf{H}}(x,y,z) = (-y,x,0)$, *calcular la cantidad de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo.*



Solución: Se trata de calcular

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{H}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

por lo que la misma podremos hacerla de manera directa o aplicando el teorema de Stokes, puesto que podemos considerar como borde de la superficie la curva cerrada

$$\left(R\cos(\theta)\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right), R\sin(\theta)\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right), R\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

Notemos que hemos sustituido φ por $\frac{5\pi}{6}$, obteniendo de esta forma una circunferencia (sería la circunferencia que se observa en la parte inferior de la gráfica) que viene dada por la parametrización

$$\left(R\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos(\theta), R\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\sin(\theta), R\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{R}{2}\cos(\theta), \frac{R}{2}\sin(\theta), -\frac{\sqrt{3}\,R}{2}\right)$$

es decir, se trata de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $R\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}R$, situada en el plano $z = R\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}R$

Si aplicamos entonces el teorema de Stokes, tenemos que

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{H}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \oint_\gamma \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{dr} = \oint_\gamma \{-ydx + xdy + 0dz\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{-\frac{R}{2}\sin(\theta)\left(-\frac{R}{2}\sin(\theta)\right)d\theta + \frac{R}{2}\cos(\theta)\left(\frac{R}{2}\cos(\theta)\right)d\theta\right\} =$$

$$= \left(\frac{R}{2}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi R^2}{2}$$

Si queremos calcular esta integral de superficie de forma directa, al ser

$$rot\left(\vec{\mathbf{H}}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0,0,2); \qquad \vec{\mathbf{n}} = (0,0,1); \qquad dS = dxdy$$

(hemos tomado como superficie S -que contiene al borde- el plano $z = -\frac{\sqrt{3}R}{2}$, ya que es mucho más sencillo obtener el vector normal $\vec{\mathbf{n}}$ y dS que si se toma como superficie S la esfera) se tiene que

$$\iint_S rot\left(\vec{\mathbf{H}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_S 2\, dS = 2\iint_{D_1} dxdy = 2Area(D_1) = 2\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2}$$

ya que $D_1 : x^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$.

10. *Se considera un conducto de ventilación (ver figura a continuación) en cuyo interior (denotado por Ω) se tiene una distribución de temperaturas descrita por el campo escalar*

$$T(x,y,z) = (T_0 - z)(3 - x - y^2)$$

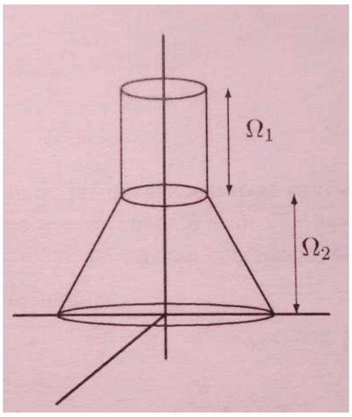
con $T_0 > 2$ constante. Como consecuencia de la ley de Fourier sabemos que el flujo térmico viene dado por el campo vectorial $-k\overrightarrow{\nabla T}$, siendo $k > 0$ la constante de conductividad térmica. Teniendo en cuenta que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, donde

$$\Omega_1 = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 < 1,\ 1 < z < 2\right\}$$

y

$$\Omega_2 = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 < (2 - z)^2,\ 0 < z < 1\right\}$$

se pide calcular el flujo de calor que atraviesa la superficie lateral de Ω, exceptuando las tapas superior ($z = 2$) e inferior ($z = 0$).



Solución: Se tiene que

$$\vec{\mathbf{F}} = -k\overrightarrow{\nabla T} = -k\left(z - T_0,\ 2(z - T_0),\ x + y^2 - 3\right)$$

por lo que el flujo de calor que atraviesa la superficie lateral de Ω, viene dado por la integral de superficie

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_S}\, dS$$

La mejor forma de calcular esta integral es aplicando el teorema de la divergencia, aunque para ello hemos de cerrar la misma por los planos $S_1 : z = 2$ y $S_2 : z = 0$. Así, considerando la superficie cerrada $S' = S \cup S_1 \cup S_2$, se tiene que

$$\Phi_S = \Phi_{S'} - \Phi_{S_1} - \Phi_{S_2}$$

donde

$$\Phi_{S'} = \iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_S}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dxdydz = -k \iiint_V 0 dxdydz = 0$$

$$\Phi_{S_1} = \iint_{S_1} \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_{S_1}}\, dS_1 = \iint_{D_1} -k\left(z - T_0,\ 2(z - T_0),\ x + y^2 - 3\right) \bullet (0,0,1) dxdy =$$

$$= -k \iint_{D_1: x^2+y^2 \le 2} (x + y^2 - 3) dxdy =$$

$$= -k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (r\cos(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) - 3) r dr = \ldots = 5k\pi$$

$$\Phi_{S_2} = \iint_{S_2} \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_{S_2}}\, dS_2 = \iint_{D_2} -k\left(z - T_0,\ 2(z - T_0),\ x + y^2 - 3\right) \bullet (0,0,-1) dxdy =$$

$$= k \iint_{D_2: x^2+y^2 \le 4} (x + y^2 - 3) dxdy =$$

$$= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2} (r\cos(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) - 3) r dr = \ldots = -8k\pi$$

Por lo anterior

$$\Phi_S = \Phi_{S'} - \Phi_{S_1} - \Phi_{S_2} = 0 - 5k\pi - (-8k\pi) = 3k\pi$$

11. *Sea un sólido S (ver figura a continuación) sobre el que se tiene una distribución de temperaturas dada por un campo escalar*

$$T(x,y,z) = x^4 + yz^2$$

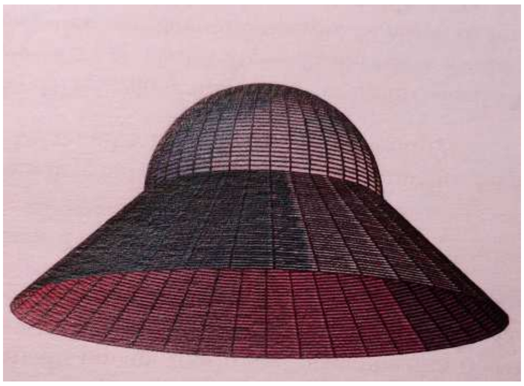
Como consecuencia de la ley de Fourier sabemos que el flujo térmico viene dado por el campo vectorial $-k\overrightarrow{\nabla T}$, *siendo* $k > 0$ *la constante de conductividad térmica. Teniendo en cuenta que S puede describirse como unión de los conjuntos*

$$S_1 = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 \le (2 - z)^2,\ 0 \le z \le 1\right\}$$

y

$$S_2 = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \le 1,\ z > 1\right\}$$

calcular el flujo de calor a través de la superfice S.



Solución: Se tiene que

$$\vec{\mathbf{F}} = -k\overrightarrow{\nabla T} = -k\left(4x^3,\ z^2,\ 2yz\right)$$

por lo que el flujo de calor que atraviesa la superficie lateral de Ω, viene dado por la integral de superficie

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_S}\, dS$$

La mejor forma de calcular esta integral es aplicando el teorema de la divergencia, aunque para ello hemos de cerrar la misma por el plano $S_3 : z = 0$. Así, considerando la superficie cerrada $S' = S \cup S_3 = (S_1 \cup S_2) \cup S_3$, se tiene que

$$\Phi_{S'} = \Phi_S + \Phi_{S_3} \Rightarrow \Phi_S = \Phi_{S'} - \Phi_{S_3}$$

donde

$$\Phi_{S'} = \iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_{S'}}\, dS' = \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dxdydz = -k\iiint_V (12x^2 + 0 + 2y)dxdydz$$

Para calcular esta integral realizamos un cambio a coordenadas cilíndricas, para lo que hemos de descomponer el volumen V en dos regiones ($V_{1:}$ la formada por el tronco de cono S_1; y V_2 : la formada por la semiesfera S_2) puesto que la variable z varía de forma diferente según el valor de r. Así, tenemos que en V_2 se verifica que

$$\text{si } 0 < r < 1, \text{ entonces } 1 < z < 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

(ya que si $0 < r < 1$, z varía entre el plano $z = 1$ y la semiesfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$), mientras que en V_1 se tiene que

$$V_{1:} \text{ si } 1 < r < 2, \text{ entonces } 0 < z < 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

(ya que si $1 < r < 2$, z varía entre el plano $z = 0$ y la hoja del cono $x^2 + y^2 \leq (2-z)^2$), y siempre con $0 < \theta < 2\pi$.

Por todo lo anterior tenemos que

$$\Phi_{S'} = -k\iiint_V (12x^2 + 0 + 2y)dxdydz =$$

$$= -k\left(\iiint_{V_2} (12x^2 + 0 + 2y)dxdydz + \iiint_{V_1} (12x^2 + 0 + 2y)dxdydz\right) =$$

$$= -k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_1^{1+\sqrt{1-r^2}} (12r^2\cos^2(\theta) + 2r\sin(\theta))rdz -$$

$$- k\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 dr \int_0^{2-r} (12r^2\cos^2(\theta) + 2r\sin(\theta))rdz = \ldots$$

$$= -\frac{8}{5}\pi k - \frac{78}{5}\pi k$$

mientras que

$$\Phi_{S_3} = \iint_{S_3} \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_{S_3}}\, dS_3 = \iint_{D_1} -k\left(4x^3,\ z^2,\ 2yz\right) \bullet (0,0,-1)dxdy =$$

$$= k\iint_{D_1:x^2+y^2\leq 4} 2yzdxdy = k\iint_{D_1:x^2+y^2\leq 4} 2y \cdot 0 \cdot dxdy = 0$$

En definitiva,

$$\Phi_S = \Phi_{S'} - \Phi_{S_3} = -\frac{8}{5}\pi k - \frac{78}{5}\pi k - 0 = -\frac{8}{5}\pi k - \frac{78}{5}\pi k$$

12. *Calcular la circulación del campo vectorial*

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (2yz, 0, xy)$$

a lo largo de la curva obtenida a intersectar los paraboloides

$$P_1 = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 = z\right\} \text{ y } P_2 = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 = 4 - z\right\}$$

Solución: La curva intersección de ambos paraboloides es la curva $x^2 + y^2 = 2$ situada en el plano $z = 2$, cuya parametrización viene dada por

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 2\right), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Por tanto, se trata de calcular

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{dr} = \oint_\gamma \{2yzdx + 0dy + xydz\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{2 \cdot \sqrt{2}\sin(t) \cdot 2\left(-\sqrt{2}\sin(t)dt\right) + \sqrt{2}\cos(t) \cdot \sqrt{2}\sin(t) \cdot 0dt\right\} =$$

$$= -8\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \ldots = -8\pi$$

Podemos comprobar este resultado por medio del teorema de Stokes, tomando, por comodidad como superficie S que contiene a la curva intersección, el propio plano $z = 2$ (así, tenemos que $\vec{\mathbf{n}}_S = (0,0,1)$, mientras que $dS = dxdy$):

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr} = \iint_S rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS = \ldots =$$

$$= \iint_{D_1: x^2+y^2 \le 2} -2zdxdy = -4Area(D_1) = -4 \cdot 2\pi = -8\pi$$

13. *Dada la superficie S descrita por la unión de las superficies*

$$S_1 = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 = z - 1,\ 1 < z < 3\right\}$$

y

$$S_2 = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 2,\ z > 3\right\}$$

y el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (-y, xy^2, 1 + z)$$

se pide calcular el flujo saliente del campo $\vec{\mathbf{F}}$ *a través de* S, *es decir, el valor de la integral de superficie*

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

mediante los siguientes procedimientos:

13.a *Directamente, parametrizando la superficie.*

13.b *Usando el teorema de la divergencia.*

Solución: La superficie S está formada por la unión de un paraboloide S_1 y de una semiesfera

S_2, formando entre ellas una superficie cerrada.

(13.a) Directamente: Aplicamos que

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2}$$

Para la primera de ellas,

$$\Phi_{S_1} = \iint_{S_1} \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_{S_1}}\, dS_1$$

con

$$\overrightarrow{\mathbf{n}_{S_1}} = \frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; \qquad dS_1 = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

Así

$$\Phi_{S_1} = \iint_{D_1: x^2+y^2 \leq 2} (-y, xy^2, 1 + z) \bullet \frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_{D_1: x^2+y^2 \leq 2} (-2xy + 2xy^3 - 1 - z) dxdy =$$

$$= \iint_{D_1: x^2+y^2 \leq 2} (-2xy + 2xy^3 - 2 - x^2 - y^2) dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (-2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + 2r^4 \cos(\theta) \sin^3(\theta) - 2 - r^2) r dr = \ldots = -6\pi$$

De igual forma, para Φ_{S_2} tenemos

$$\overrightarrow{\mathbf{n}_{S_2}} = \frac{(2x, 2y, 2(z-3))}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4(z-3)^2}}; \qquad dS_2 = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4(z-3)^2}}{2(z-3)} dxdy$$

por lo que

$$\Phi_{S_1} = \iint_{D_1: x^2+y^2 \leq 2} \frac{-2xy + 2xy^3 + 2(z-3)(1+z)}{2(z-3)} dxdy =$$

$$= \iint_{D_1: x^2+y^2 \leq 2} \frac{-2xy + 2xy^3 + 2\sqrt{2 - x^2 - y^2}\left(4 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}\right)}{2\sqrt{2 - x^2 - y^2}} dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{-2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + 2r^4 \cos(\theta) \sin^3(\theta) + 2\sqrt{2 - r^2}\left(4 + \sqrt{2 - r^2}\right)}{2\sqrt{2 - r^2}} r dr =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2} + 6\right)$$

Por tanto

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = -6\pi + \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2} + 6\right) = \frac{2}{3}\pi\left(2\sqrt{2} + 3\right)$$

(b) Por el teorema de la divergencia, se tiene que

$$\Phi_S = \iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{\mathbf{n}_S}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dxdydz = \iiint_V (2xy + 1) dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{1+r^2}^{3+\sqrt{2-r^2}} (2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + 1) r dz = \ldots = \frac{2}{3}\pi\left(2\sqrt{2} + 3\right)$$

como queremos comprobar.

Ejercicios propuestos.

1. Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie total del cilindro $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h.$ (**Solución** $= 3\pi R^2 h$)

2. Por el teorema de Stokes, calcular la circulación del vector $\vec{\mathbf{F}} = (x^2y^3, 1, z)$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2, z = 0,$ tomando la superficie esférica $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. (**Solución** $= -\frac{\pi R^6}{6}$)

3. Calcular $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}} dS$, siendo $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x,y,z)$ y S una superficie cerrada arbitraria que determina un sólido V. (**Solución** $= 3\,Volumen(S)$)

4. Hallar el centro de gravedad de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ contenida en el cono $z\tan\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. (**Solución** $= \left(0, 0, \frac{a}{2}(1 + \cos(\alpha))\right)$)

5. Hallar el flujo del rotacional de $\vec{\mathbf{F}} = (y,z,x)$ a través de la superficie $z = 2(1 - x^2 - y^2)$ interceptada por el plano $z = 0.$ (**Solución** $= -\pi$)

6. Hallar el centro de gravedad de la porción de superficie esférica homogénea $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, situada sobre el primer cuadrante del plano OXY. (**Solución** $= x = y = z = \frac{a}{3}$)

7. Usar el teorema de Gauss para calcular la integral de superficie
$$\iint_S (x^2\cos(\alpha) + y^2\cos(\beta) + z^2\cos(\gamma))dS,$$
siendo S la superficie exterior total del cono $x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 1.$ (**Solución** $= \frac{\pi}{2}$)

8. Dada la superficie cilíndrica $z = y^2$ delimitada por los planos $x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = a,$ comprobar que se cumple el teorema de Stokes, siendo
$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (\cos(y) + y\cos(x), \sin(x) - x\sin(y), -xyz)$$
(**Solución** $= -\frac{2a^6}{5}$)

9. (Febrero 2012) Sea la superficie S definida por
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\right\}$$
y sea $\vec{\mathbf{F}}$ el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (-y, yz^2, x^2z)$. Calcular la integral del rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo de la curva obtenida al intersectar la superficie S con el plano $z = 1$. Justificar el procedimiento utilizado.

10. (Junio 2012) Sea S la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$, situado en el primer octante y limitada por el plano $z = 1$. Sea $\vec{\mathbf{F}}$ el campo vectorial dado por

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$$

Se pide:

10.a. Calcular $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS$, siendo $\vec{\mathbf{n}}$ la normal interior al paraboloide.

10.b. Calcular directamente $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr}$, siendo C la curva frontera de S.

10.c. Comprobar el resultado anterior usando el teorema de Stokes.

11. (Septiembre 2012) Dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \left((y-1)^2 + \sin^2(\pi x^2 + 1),\ z + \cos(y^2),\ y + \log(1+x^2)\right)$$

calcular el flujo saliente de su rotacional a través de la superficie

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 - z = 0,\ 0 < z < \pi\right\}$$

es decir la integral

$$\iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS$$

Justificar el procedimiento utilizado.

12. (Febrero 2013) Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas

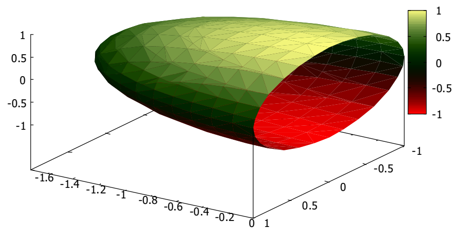
$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\vec{\mathbf{e}_r} - r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}_\theta} + (r\sin(\theta) + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}_r}, \vec{\mathbf{e}_\theta}, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas:

12.a Escribe el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ en coordenadas cartesianas.

12.b Determina el valor de la integral del campo vectorial $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ sobre el semielipsoide S (figura siguiente) descrito por las ecuaciones

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + \frac{y^2}{3} + z^2 = 1,\ y < 0\right\}$$

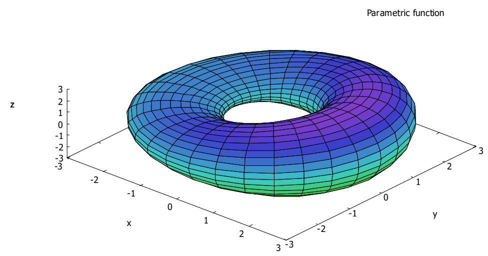


13. (Febrero 2013) Sea la superficie A descrita mediante la parametrización

$$\Psi(\theta,\varphi) = ((2+\cos(\varphi))\cos(\theta), (2+\cos(\varphi))\sin(\theta), (2+\cos(\theta))\sin(\varphi))$$

con $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < 2\pi$. Calcular la integral de superficie

$$\iint_{\mathcal{A}^+} (x+z)\vec{\mathbf{k}} \cdot dS$$



14. (Junio 2013) Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas

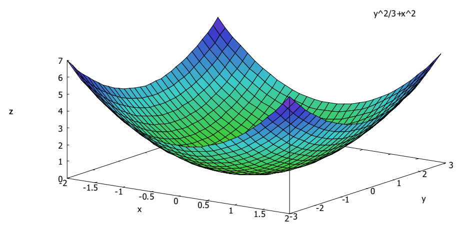
$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\vec{\mathbf{e}_r} - r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}_\theta} + (r\sin(\theta) + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}_r}, \vec{\mathbf{e}_\theta}, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas, se pide:

14.a Escribe el campo vectorial $div\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ en coordenadas cartesianas.

14.b Determina el valor de la integral del campo vectorial $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ a lo largo de la curva borde de la superficie S (figura siguiente)

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + \frac{y^2}{3} = z, \ 0 < z < 3\right\}$$



15. (Junio 2013) Dada la superficie cilíndrica (figura siguiente)

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{(x-\cos(z))^2}{4} + (y-\cos(z))^2 = 1, \ 0 < z < 10\right\}$$

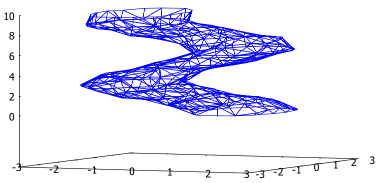
calcular el flujo de calor a través de la misma que genera el campo de temperaturas

$$T(x,y,z) = z\left(x^2 + (y-1)^2\right)$$

suponiendo por simplicidad que la conductividad térmica es constante e igual a uno, es decir, calcular la integral de superficie

$$\iint_{\mathcal{A}} \nabla T \cdot dS$$

Justificar el procedimiento utilizado.



Ayuda: *Para describir una región cuya geometría se asemeja a un cilindro de sección elíptica con centro y semiejes variables con la altura pueden usarse coordenadas cilíndricas de la forma* (r,θ,z), *que se relacionan con las cartesianas mediante las igualdades*

$$x = p(z) + a(z) r\cos(\theta); \qquad y = q(z) + b(z) r\sin(\theta); \qquad z = z$$

siendo $a(z)$, $b(z)$ *los semiejes de las secciones elípticas y* $(p(z),q(z))$ *las coordenadas del centro. El rango máximo de los valores que pueden tomar estas coordenadas es* $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. *El determinante jacobiano es en este caso de la forma* $J = a(z)b(z)r$.

16. (Septiembre 2013) Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas

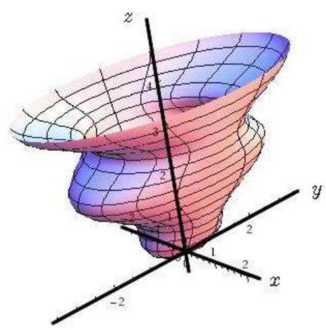
$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = (r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + z^2\sin(\theta))\vec{\mathbf{e}_r} - (r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) - z^2\cos(\theta))\vec{\mathbf{e}_\theta} + r\cos(z)\vec{\mathbf{k}}$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}_r}, \vec{\mathbf{e}_\theta}, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas, se pide:

16.a Escribe la expresión del campo rotacional $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ en coordenadas cartesianas.

16.b Determina el valor de la integral del $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ sobre la superficie S (figura siguiente)

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{2+\cos(\pi z)} = z,\ 0 < z < 4\right\}$$



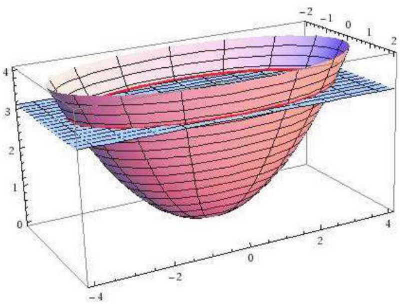
17. (Septiembre 2013) Calcular la integral del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2 + \sin^2(\pi x^2 + 1), z + \cos(y^2), y + \log(1 + x^2))$$

a lo largo de la curva obtenida al intersectar el paraboloide de sección elíptica

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{4} = z\right\}$$

con el plano $z = \pi$ (figura siguiente). Justificar el procedimiento utilizado.



18. (Septiembre 2013) Dada la superficie (figura siguiente)

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(2+x)^2} = 1\right\}$$

y el campo de temperaturas

$$T(x,y,z) = z\left(x^2 + (y-1)^2\right)$$

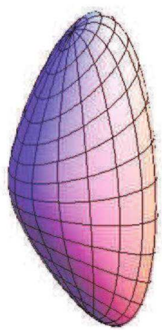
determinar:

18.a La temperatura de la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitada por A mediante el cálculo de la integral de volumen

$$\iiint_\Omega T(x,y,z)\; dxdydz$$

18.b El flujo de calor a través de la superficie A, suponiendo por simplicidad que la conductividad térmica es constante e igual a 1, es decir, se trata de calcular la integral de superficie

$$\iint_{\mathcal{A}} \nabla T \cdot dS$$



19. Dada la superficie (representada en la figura siguiente)

$$S = \left\{(x,y,z);\; x^2 + \frac{y^2}{3} = z,\; 0 < z < 4\right\}$$

y dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (-y, x, x^2 - z)$$

calcular su circulación a lo largo del borde γ de la superficie S, es decir

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Sugerencia: Para describir regiones del espacio similares a conos o paraboloides con secciones elípticas, puede usarse el cambio de variable

$$x = ar\cos\theta; \qquad y = br\sin\theta; \qquad z = z$$

con $a,b > 0$ *los semiejes de la elipse. El rango máximo de variación de las nuevas variables es* $0 < r < 1,\ 0 < \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}$.

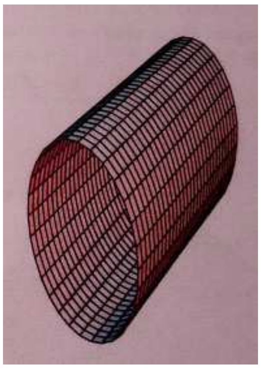
20. La región

$$S = \left\{(x,y,z);\ x^2 + \frac{z^2}{4} < z,\ -2 < y < 2\right\}$$

(ver figura siguiente) está ocupada por un fluido que presenta una distribución de temperatura dada por el campo escalar

$$T(x,y,z) = (2\pi - z)(2 - 3x^2 - y^2)$$

Como consecuencia de la ley de Fourier sabemos que el flujo térmico viene dado por el campo vectorial $-k\overrightarrow{\nabla T}$, siendo $k > 0$ la constante de conductividad térmica. Se pide calcular el flujo de calor que atraviesa las paredes laterales de la región S.



21. Sea Q la región del espacio descrita por las ecuaciones (figura siguiente)

$$Q = \left\{(x,y,z);\ x^2 + \frac{z^2}{4} < 3 - y,\ -2 < y < 2\right\}$$

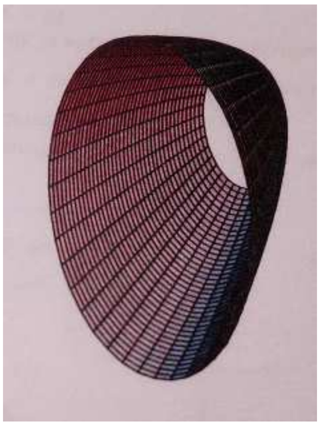
sobre la que se tiene un fluido en movimiento cuyo campo de velocidades es de la forma

$$\vec{\mathbf{V}}(x,y,z) = (\log(1 + y^2), xy^2, x + z^2\sin y)$$

medido en metros por segundo. Determinar la cantidad de fluido que atraviesa en un segundo la pared lateral de S, es decir, calcular la integral

$$\iint_S \vec{\mathbf{V}}\, dS$$

con S el borde de Q: $S = \left\{(x,y,z);\ x^2 + \frac{z^2}{4} = 3 - y,\ -2 < y < 2\right\}$. Justificar el procedimiento usado para resolver este problema.



Nota: Para describir regiones del espacio similares a conos o paraboloides con secciones elípticas, puede usarse el cambio de variable

$$x = ar\cos\theta; \qquad y = br\sin\theta; \qquad z = z$$

con $a, b > 0$ *los semiejes de la elipse. El rango máximo de variación de las nuevas variables es* $0 < r < 1,\ 0 < \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}$.

22. Sea S la región del espacio limitada por las superficies cilíndricas (ver figuras siguientes)

$$S_1 = \left\{(x,y,z);\ x^2 + \frac{y^2}{1+z^2} = 1,\ -2 < z < 2\right\}$$

y

$$S_2 = \left\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4},\ -2 < z < 2\right\}$$

Dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \left((x-1)^2 y, \sin(x^2) + z, \pi z\right)$$

se pide obtener el flujo del campo vectorial a través de las caras laterales de S.