Profesor: **Roque Molina Legaz**

Tema 2.2. LA INTEGRAL DE LÍNEA. APLICACIONES.

PROGRAMA DETALLADO:

Como ya hemos visto, el concepto de integral simple de Riemann se estableció para funciones reales definidas y acotadas en un intervalo compacto $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si se modificaban las condiciones y se considera que, o bien el intervalo o bien la función no están acotados, se obtiene una primera generalización del concepto de integral: las integrales impropias, que también fueron estudiadas en la asignatura de Matemáticas I. Otra forma de modificar las condiciones es considerar funciones reales definidas y acotadas en un intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$, obteniéndose así la integral múltiple de Riemann (especialmente, integrales dobles y triples), ya estudiada también en Matemáticas I.

Un nuevo concepto de integración se introduce al considerar una curva γ en lugar de un intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. De esta forma obtendremos lo que se conocerá por i**ntegral de línea** o **integral curvilínea** a lo largo de una curva γ (que puede ser en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$). Al estudio de esta integral dedicamos este tema, y como veremos, una parte del mismo coincide con lo establecido en un tema anterior para el cálculo de integrales de funciones complejas (en concreto, ésta es similar, como observaremos a continuación, a la integral de línea en el caso de curvas en el plano).

Curvas.

A continuación vamos a introducir unos conceptos para curvas en el plano y en el espacio. Como veremos, estos conceptos coinciden, aunque las curvas suelen venir dadas de forma diferente.

Una curva γ en el espacio suele venir dada de dos formas:

a) Como intersección de dos superficies S_1 y S_2 : Aunque las superficies las estudiaremos en el tema siguiente, si éstas vienen dadas por sus ecuaciones implícitas

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ g_1(x,y,z) = 0\right\}$$

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ g_2(x,y,z) = 0\right\}$$

tendremos que la ecuación de la curva intersección será

$$\gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\right\}$$

b) Por su forma más habitual, es decir, dando una parametrización de la misma, como vemos a continuación.

Definition *Se llama **curva parametrizada** en $\mathbb{R}^3$ a una aplicación*

$$\gamma \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

siendo I un subconjunto de $\mathbb{R}$. Así, como $\gamma(t)$ es un vector, suele ser habitual expresar el mismo en la forma $\overrightarrow{\gamma(t)}$, aunque por comodidad en la notación siempre escribiremos $\gamma(t)$.

*Si la aplicación que define γ es continua (es decir, si sus componentes $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son funciones continuas) se dirá que la **curva** γ es **continua**, si γ es diferenciable, diremos que la **curva** γ es **diferenciable**, etc.*

*En el caso en que $I = [a,b]$ decimos que γ es un **arco de curva de origen** $\gamma(a)$ **y extremo** $\gamma(b)$; y si $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la **curva** es **cerrada**.*

*Si existen dos valores diferentes t_1, t_2 tales que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ se dice que t_1 es un **punto múltiple**.*

Remark *Las mismas consideraciones podemos dar para el caso de una curva en el plano (aunque en este caso no tiene sentido dar la misma como intersección de dos superficies). Así la aplicación*

$$\gamma \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

*nos da una curva parametrizada en $\mathbb{R}^2$, a la que denominaremos **curva plana**.*

Remark *Hemos de observar que la definición que hemos dado de curva es para el caso de una curva parametrizada, es decir, que viene dada en coordenadas paramétricas. Esto suele ser "obligatorio" en el caso de curvas en el espacio $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, para el caso de curvas en el plano, no siempre es necesario utilizar una parametrización de la misma, ya que sabemos que toda expresión de la forma $y = f(x)$, con $x \in [a,b]$, nos define una curva en el plano. Además, dada una curva plana por su expresión explícita $y = f(x)$, es inmediato expresarla en coordenadas paramétricas, puesto que si hacemos*

$$\left\{ \begin{array}{c} x = t \\ y = f(t) \end{array} \right. \quad \text{con } x \in [a,b]$$

tendremos que la curva que viene dada en explícitas por $y = f(x)$ tiene por parametrización

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \big(t,\ f(t)\big)$$

Definition *A una curva continua y sin puntos múltiples se le llama* ***curva simple o de Jordan****. Si la curva es en $\mathbb{R}^3$, a la misma se le llama* ***curva alabeada****.*

Example *Representamos varios ejemplos de curvas:*

a) La parametrización

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

corresponde a la circunferencia unidad (que en cartesianas viene dada por $x^2 + y^2 = 1$). Notemos que se trata de una curva cerrada puesto que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.

b) La parametrización

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \big(\cos(t),\ \sin(t)\big)$$

corresponde a la semicircunferencia unidad (es decir, la parte superior $x^2 + y^2 = 1$). Notemos que para esta curva también podemos dar otra parametrización diferente, puesto que al venir dada su ecuación por $y = \sqrt{1 - x^2}$, siendo $-1 \leq x \leq 1$, podemos considerar

$$\gamma' : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma'(t) = \left(t,\ \sqrt{1 - t^2}\right)$$

c) La parametrización

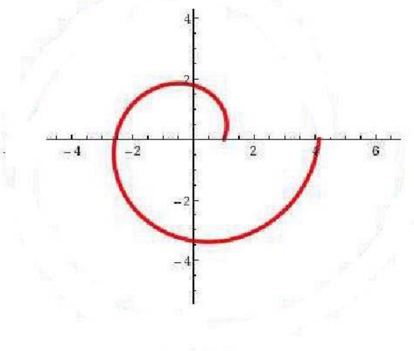
$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \big(a\cos(t),\ b\sin(t)\big)$$

corresponde a una elipse centrada en el origen y de semiejes a y b (que en cartesianas tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$).

d) La parametrización

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \left((1 + \tfrac{t}{2}) \cos(t), \ \sin(t) \right)$$

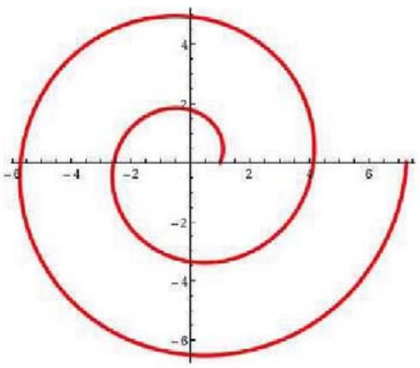
corresponde a la gráfica



mientras que la gráfica de

$$\gamma : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \left((1 + \tfrac{t}{2}) \cos(t), \ \sin(t) \right)$$

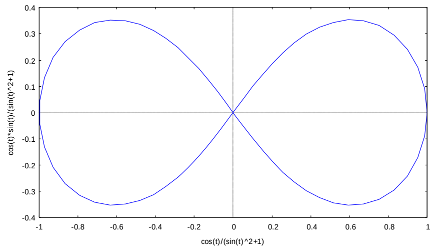
será



e) Un ejemplo de curva que no es simple (por tener puntos múltiples) pero sí cerrada, es la dada por

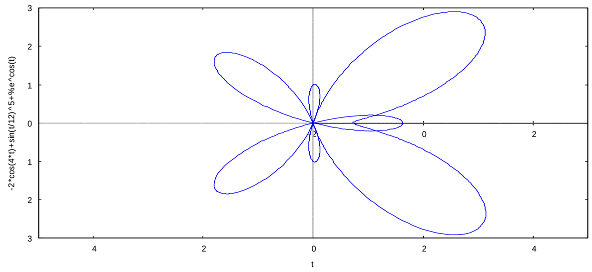
$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)}, \frac{\cos(t)\sin(t)}{1+\sin^2(t)} \right)$$

cuya gráfica es



f) Otra curva con muchos puntos múltiples viene dada por

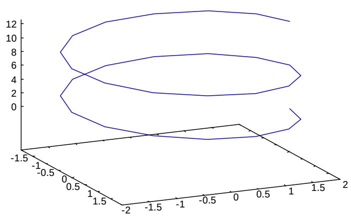
$$\gamma \,:\, [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) \;=\; (t, e^{\cos(t)} - 2\cos(4t) + \sin^5(\tfrac{t}{12}))$$



g) La parametrización

$$\gamma \,:\, [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\gamma(t) \;=\; \big(2\cos(t), 2\sin(t),\; t\big)$$

corresponde a la espiral (que ahora es una curva en $\mathbb{R}^3$*)*



(En los ejercicios de este tema así como en los exámenes de años anteriores, hay otros ejemplos de curvas).

Remark *Dada una curva cerrada plana, ésta puede recorrerse en dos sentidos. En el plano XY consideramos que* ***se recorre en sentido positivo*** *cuando va en sentido contrario a las agujas del reloj. En caso opuesto, se recorrerá en*

sentido negativo.

*En general, puede decirse que una curva es **positiva** cuando en el recorrido de la misma la región encerrada queda a la izquierda de la curva, mientras que es **negativa** cuando la región encerrada queda a la derecha.*

Definition *Se llama **región simplemente conexa** a aquella región de $\mathbb{R}^2$ (lo mismo puede definirse en $\mathbb{R}^3$ aunque entonces diremos que es una **bola conexa**) en la cual puede reducirse a un punto cualquier curva cerrada simple;es, por lo tanto, una región "sin agujeros". Se llama **región múltiplemente conexa** a aquella en la que no es posible lo anterior;es, por lo tanto, una región "con agujeros".*

Definition *Se llama **recta tangente a la curva** $\gamma(t)$ en el punto t_0 a la curva (recta) dada por la expresión*

$$\delta(t) = \overrightarrow{\gamma(t_0)} + \lambda\ \overrightarrow{\gamma'(t_0)}$$

o simplemente

$$\delta(t) = \gamma(t_0) + \lambda\,\gamma'(t_0)$$

Esta ecuación que viene dada en forma vectorial, y en forma paramétrica sus ecuaciones son

$$\begin{cases} x - x(t_0) = \lambda\, x'(t_0) \\ y - y(t_0) = \lambda\, y'(t_0) \\ z - z(t_0) = \lambda\, z'(t_0) \end{cases}$$

En forma continua

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

(Notemos que esta definición es válida tanto para curvas en el espacio como para curvas en el plano (en este último caso no consideraremos la variable z).

Definition *Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva de clase $\mathcal{C}^{(1)}$, la **longitud** de esta curva viene dada por el nº real*

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t_0)\|dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

donde $\|\quad\|$ representa el módulo de dicho vector.

Una expresión similar obtendremos para una curva en el plano $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sin más que eliminar la componente z de la expresión anterior.

Example *Dada la hélice* $\gamma(t) = \big(5\cos(t), 5\sin(t),\ t\big)$, *con* $t \in [0, 4\pi]$, *calcular su longitud.*

Remark *Notemos que cuando se trata de una curva plana dada por su forma habitual* $y = f(x)$, *la longitud de la misma en el intervalo* $I = [a, b]$ *viene dada por*

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

(hemos considerado para la misma, como hemos indicado anteriormente, la parametrización dada por $x = t,\ y = f(t)$*), que es la fórmula ya establecida en la asignatura de Matemáticas I para obtener la longitud de una curva* $y = f(x)$ *en el intervalo* $[a, b]$.

La integral de línea. Definición y propiedades.

Nos vamos a centrar principalmente en el estudio de la integral de línea para el caso de un campo vectorial, al que vamos a denotar por $\vec{\mathbf{F}} = (P, Q)$ si es en el plano, o por $\vec{\mathbf{F}} = (P, Q, R)$ si es en el espacio, puesto que son para este tipo de campos las integrales de línea que se suelen utilizar habitualmente (ésto es debido a las aplicaciones que tienen las mismas, que sobre todo son aplicaciones físicas, especialmente las relacionadas con el cálculo del trabajo). Sin embargo, también es posible calcular la integral de un campo escalar a lo largo de una curva, como vemos a continuación:

Definition ***(Integral de línea de un campo escalar)*** *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^{2\,o\,3} \to \mathbb{R}$ *un campo escalar y* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^{2\,o\,3}$ *una curva parametrizada. La integral del campo escalar f a lo largo de* γ *se calcula como la integral simple dada por*

$$\int_\gamma f\, dl := \int_a^b f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|\ dt$$

Example *Para calcular la integral del campo* $f(x, y, z) = xy + z^2$ *a lo largo de la curva* $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 2t)$, *con* $t \in [0, 2\pi]$, *y según la anterior definición, hemos de calcular*

$$f(\gamma(t)) = f(\cos(t), \sin(t), 2t) = \cos(t)\sin(t) + (2t)^2$$

y

$$\|\gamma'(t)\| = \|(-\sin(t), \cos(t), 2)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Así, la integral pedida viene dada por

$$\int_\gamma (xy + z^2)\, dl = \int_0^{2\pi} \big(\cos(t)\sin(t) + (2t)^2\big)\sqrt{5}\, dt = \ldots = \frac{32}{3}\pi^3\sqrt{5}$$

Remark *Las propiedades para este tipo de integrales (por ejemplo, linealidad, unión* *de caminos, etc.), son las mismas que las que se verán a continuación para el caso de integrales de campos vectoriales.*

A continuación nos centramos en el estudio de la **integral de línea de un campo vectorial** a lo largo de una curva plana; con posterioridad veremos lo que se hace para el caso del cálculo de una integral a lo largo de una curva en $\mathbb{R}^3$. Como se observará a continuación, el esquema que se va a seguir es muy similar al que se utiliza en Matemáticas I a la hora de introducir la integral simple o múltiple de Riemann, es decir, tomando particiones y límites de sumas de Riemann:

Sea γ una curva en el plano OXY que une los puntos $A(a_1,b_1)$ y $B(a_2,b_2)$ y sea $\vec{\mathbf{F}}$ el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = (P,Q)$, con $P,Q : \gamma \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas en los puntos de la curva. Dividimos γ en n partes, para lo que elegimos $n+1$ puntos sobre la misma,

$$(x_0,y_0) = (a_1,b_1),\ (x_1,y_1),\ ...,\ (x_n,y_n) = (a_2,b_2)$$

De esta forma se obtiene una **partición** $\mathcal{P}$ de la curva γ en n **arcos parciales**. Denotamos por $\triangle\ l_k$ a la longitud del arco de curva entre dos puntos consecutivos (x_{k-1},y_{k-1}) y (x_k,y_k).

Definition *Se llama **norma de la partición** $\mathcal{P}$ al número real dado por*

$$\|\mathcal{P}\| = \max\left\{\triangle\ l_k;\ k = 1,2,\ldots,n\right\}$$

es decir, la longitud del mayor de los arcos parciales en los que se ha didivido la curva γ.

Definition *Dadas dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de γ, se dice que $\mathcal{P}$ es **más fina** que $\mathcal{Q}$ si todos los puntos de $\mathcal{Q}$ están en $\mathcal{P}$ y además $\|\mathcal{P}\| < \left\|\mathcal{Q}\right\|$.*

De esta forma, si denotamos por

$$\triangle\ x_1 = x_1 - x_0,\quad \triangle\ x_2 = x_2 - x_1,\ \ldots,\quad \triangle\ x_n = x_n - x_{n-1}$$

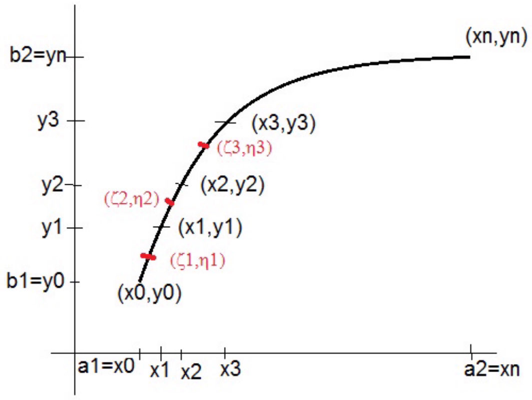
$$\triangle\ y_1 = y_1 - y_0,\quad \triangle\ y_2 = y_2 - y_1,\ \ldots,\quad \triangle\ y_n = y_n - y_{n-1}$$

y si tomamos n puntos sobre la curva

$$(\zeta_1,\eta_1),\ (\zeta_2,\eta_2),\ \ldots,\ (\zeta_n,\eta_n)$$

cada uno de ellos interior a cada uno de los arcos parciales de la partición, podemos calcular la siguiente suma

$$\sum_{k=1}^{n}\{P(\zeta_k,\eta_k)\cdot\triangle\ x_k + Q(\zeta_k,\eta_k)\cdot\triangle\ y_k\}$$



a la que denominamos **suma de Riemann asociada a la partición** $\mathcal{P}$.

Definition *Si consideramos una sucesión de particiones cada vez más finas de γ y con norma tendiendo a cero (es decir, si se divide el arco de curva entre los puntos origen y extremo en infinitos arcos parciales siendo la longitud de cada ellos una cantidad infinitesimal), y si existe el límite de la suma de Riemann*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{P(\zeta_k, \eta_k) \cdot \triangle\, x_k + Q(\zeta_k, \eta_k) \cdot \triangle\, y_k\}$$

siendo éste independiente de los puntos (ζ_k, η_k) y de los valores $\triangle\, x_k$ y $\triangle\, y_k$, al valor del mismo se le denomina ***integral de línea*** *(o* ***integral curvilínea****) del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = (P, Q)$* ***a lo largo de γ entre los puntos*** *$A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2)$, y se denota por*

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$$

o por

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$$

Remark *Notemos que el valor de esta integral depende, inicialmente, de P, Q y γ, así como de los límites de integración (puntos origen y extremo de γ) $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2)$.*

Remark *En el caso en que la curva γ sea cerrada, a la integral a lo largo de γ suele denotarse por*

$$\oint_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$$

De forma análoga, puede darse la definición para el caso de un campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = (P, Q, R)$ sobre una curva en $\mathbb{R}^3$:

Definition *En las anteriores condiciones, si se considera una sucesión de particiones* *cada vez más finas de γ y con norma tendiendo a cero, se define*

$$\int_\gamma \{P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\}$$

como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{P(\zeta_k,\eta_k,\delta_k) \cdot\triangle x_k + Q(\zeta_k,\eta_k,\delta_k) \cdot\triangle y_k + R(\zeta_k,\eta_k,\delta_k) \cdot\triangle z_k\}$$

siempre que este límite exista y sea independiente de los puntos $(\zeta_k,\eta_k,\delta_k)$ elegidos sobre la curva y de los incrementos $\triangle x_k$, $\triangle y_k$, $\triangle z_k$ (y donde estamos suponiendo que las funciones P,Q y R son continuas en todo punto de γ).

Remark ***(Notación vectorial de la integral de línea)**. La representación en forma vectorial para la integral de línea es aconsejable en aplicaciones físicas o geométricas, o simplemente por la brevedad de la notación:*

Podemos denotar

$$\int_\gamma \{Pdx + Qdy + Rdz\} = \int_\gamma (P,Q,R) \bullet (dx,dy,dz) = \int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{dr}$$

donde $\vec{\mathbf{F}} = (P,Q,R)$, $\overrightarrow{dr} = (dx,dy,dz)$ y donde $\vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{dr}$ representa el producto escalar de esos vectores.

Example *Si a cada punto $(x,y,z) \in \gamma$ se le asocia una fuerza $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)$ que actúa sobre un objeto, ésta define un campo de fuerzas, y sabemos que la integral de línea*

$$\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \bullet \overrightarrow{dr}$$

representa físicamente el trabajo efectuado al mover un objeto a lo largo de la curva γ.

Las propiedades de la integral de línea son similares a las de las integrales definidas. Entre estas propiedades destacamos las siguientes (que enunciamos en $\mathbb{R}^2$; de forma análoga son válidas en $\mathbb{R}^3$):

Proposition *En las anteriores condiciones, se verifican:*

a) $\int_\gamma \{Pdx + Qdy\} = \int_\gamma Pdx + \int_\gamma Qdy.$

*(A la primera integral del segundo miembro se le denomina **integral de línea de** $P(x,y)$ **a lo largo de** γ **respecto de** x; y a segunda, **integral de línea de** $Q(x,y)$ **a lo largo de** γ **con respecto de** y).*

b) Al invertir el sentido del recorrido del camino, la integral de línea cambia de signo, es decir

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} \{Pdx + Qdy\} = -\int_{(a_2,b_2)}^{(a_1,b_1)} \{Pdx + Qdy\}$$

c) Si (a_3,b_3) es un punto intermedio entre (a_1,b_1) y (a_2,b_2) se tiene

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} \{Pdx + Qdy\} = \int_{(a_1,b_1)}^{(a_3,b_3)} \{Pdx + Qdy\} + \int_{(a_3,b_3)}^{(a_2,b_2)} \{Pdx + Qdy\}$$

Cálculo de la integral de línea.

A efectos prácticos, para el cálculo de este tipo de integrales podemos distinguir los siguientes casos:

* Si la curva γ viene dada en forma paramétrica, siendo sus ecuaciones

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

tendremos

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t))dt$$

donde t_1 y t_2 son los valores de t correspondientes a los puntos $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2)$, origen y extremo de γ.

* Si la curva γ viene en la forma $y = f(x)$, la integral de línea se reduce a una integral simple, sin más que tener en cuenta que $dy = f'(x)dx$:

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{a_1}^{a_2} (P(x,f(x)) + Q(x,f(x)) \cdot f'(x))dx$$

* De forma análoga, si la curva viene en la forma $x = g(y)$, tenemos que $dx = g'(y)dy$, con lo que

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{b_1}^{b_2} (P(g(y),y) \cdot g'(y) + Q(g(y),y))dy$$

Remark *Lo mismo puede realizarse para el caso de integrales en $\mathbb{R}^3$, aunque en general, y como ya hemos comentado anteriormente, la curva γ suele venir expresada en coordenadas paramétricas.*

Example *Calcular*

$$\int_\gamma \{y^2 dx + xdy\}$$

siendo γ la curva $y = x^2$ desde $(2,4)$ a $(0,0)$.

Example *Calcular*

$$\int_{(1,1)}^{(4,2)} \{(x-y)dx + (x+y)dy\}$$

a lo largo de las curvas siguientes:

a) $y^2 = x$.

b) $x(t) = 2t^2 + t + 1,\ y(t) = t^2 + 1$.

Example *Hallar el trabajo realizado por la fuerza*

$$\vec{\mathbf{F}} = (2xz^3 + 6y, 6x - 2yz, 3x^2z^2 - y^2)$$

para desplazar una partícula desde $(0,0,0)$ *a* $(1,1,1)$ *a través de la curva* $x(t) = t,\ y(t) = t^2,\ z(t) = t^3$.

Hacer lo mismo pero suponiendo que la partícula se desplaza en línea recta.

Remark *A partir de este último ejemplo, podemos observar que para una misma integral se obtiene el mismo resultado a pesar de que se han considerado dos caminos diferentes para ir desde* $(0,0,0)$ *a* $(1,1,1)$. *Sin embargo, en el penúltimo ejemplohemos visto que la misma integral de línea, y entre los dos mismos puntos origen y extremo, da dos resultados diferentes si se cambia el camino de integración. Así, podemos plantearnos la cuestión siguiente: ¿Cuando la integral de línea es independiente del camino de integración?. Observamos que si así fuese, siempre tenemos la posibilidad de sustituir un camino dado por otro más sencillo (lo que nos lleva a que la integral a resolver sea más simple). Para responder a esta cuestión es preciso estudiar el siguiente resultado.*

El teorema de Green en el plano.

En esta sección vamos a enunciar un importante resultado que permite escribir una integral de línea a lo largo de la frontera de cierto tipo de regiones como una integral doble sobre la región que encierra dicha línea; y recíprocamente.

Inicialmente vamos a considerar regiones planas limitadas por curvas cerradas y simples, es decir, regiones conexas, para después ver como este resultado puede generalizarse a regiones múltiplemente conexas.

Antes de pasar a enunciar dicho teorema, vemos el siguiente ejemplo:

Example *Calcular la integral de línea*

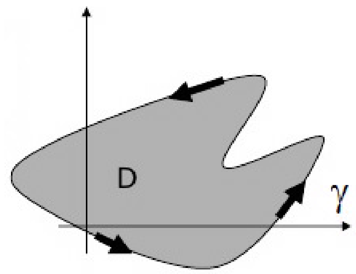
$$\int_\gamma \{(2x - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy\}$$

siendo γ *la circunferencia* $x^2 + y^2 = 16$.

Theorem *(**Teorema de Green en el plano**). Sea D una región simplemente conexa (es decir, una región "sin agujeros"), cuya frontera o contorno es una curva cerrada y simple* γ. *Sean* $P(x,y),\ Q(x,y),\ \frac{\partial P}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *continuas sobre D. Entonces se verifica que*

$$\oint_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

donde $\oint_\gamma$ *indica que* γ *es una curva cerrada y que se recorre en sentido positivo.*



Example *Volver a realizar el ejemplo anterior, aunque aplicando ahora el teorema de Green.*

Example *Comprobar el teorema de Green para*

$$\oint_{\gamma} \{(xy + x^2)dx + (x + y^2)dy\}$$

siendo γ la curva cerrada formada por $\gamma_1 : y = x^2$ y por $\gamma_2 : x = y^2$.

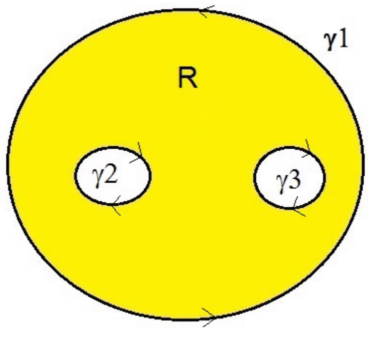
Una consecuencia inmediata del teorema de Green es la siguiente:

Corollary *El área limitada por una curva cerrada y simple γ viene dada por*

$$Area = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \{-ydx + xdy\}$$

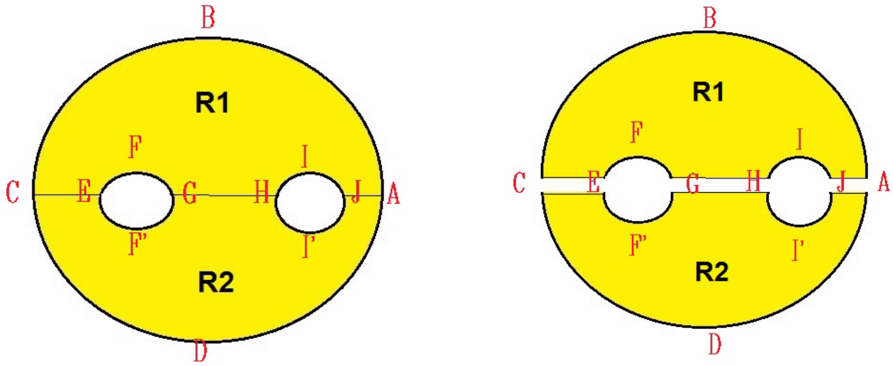
Example *Calcular el área de la región S limitada por la recta $y = 2x + 1$ y la parábola $y = 4 - x^2$.*

Remark *El teorema de Green puede generalizarse a regiones múltiplemente conexas (regiones "con agujeros”) mediante segmentos que unen las distintas curvas o contornos que delimitan la región, aunque se prueba que la parte que aporta la zona interior de la curva siempre aparece restando.*



Por ejemplo, si intentamos calcular la integral de línea de un campo a través de la curva dada por la gráfica anterior, es decir, a través de la curva

$\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, *con origen y final en el punto A, y recorridas como indican las flechas (es decir, recorridas en sentido positivo; notemos que la curva exterior* γ_1 *se recorre en sentido antihorario, mientras que las curvas interiores se recorren en sentido horario -que para ellas es el sentido positivo, puesto que la región considerada queda a la izquierda de su recorrido-), lo que se hace (al menos teóricamente) para poder reducir esta región R múltiplemente conexa a una nueva región conexa (y así poder aplicar el teorema de Green) es dividir la misma por la línea que aparece en el gráfico siguiente (hemos resaltado unos puntos de la frontera, para ayudarnos a describir como vamos a recorrer la misma):*



De esta forma, tenemos dos regiones simplemente conexas: R_1, *cuya frontera es la curva* $ABCEFGHIJA$, *y la región* R_2, *cuya frontera es* $AJI'HGF'ECDA$ *(nuevamente las recorremos en el orden que nos indican las letras, para que así ambas estén recorridas en sentido positivo). Así, por un lado se tiene que al ser* $R = R_1 \cup R_2$, *entonces*

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

y aplicando por separado el teorema de Green a cada una de estas dos integrales dobles, se verifica que

$$\iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{ABCEFGHIJA} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$$

mientras que

$$\iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{AJI'HGF'ECDA} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$$

De esta forma, tenemos que

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{AA'BCDEFA} \{\quad\} + \oint_{AFEDCBA''A} \{\quad\}$$

(donde hemos obviado los integrandos). Pero

$$\oint_{ABCEFGHIJA} = \oint_{ABC} + \oint_{CE} + \oint_{EFG} + \oint_{GH} + \oint_{HIJ} + \oint_{JA}$$

mientras que

$$\oint_{AJI'HGF'ECDA} = \oint_{AJ} + \oint_{JI'H} + \oint_{HG} + \oint_{GF'E} + \oint_{EC} + \oint_{CDA}$$

y al ser, por ejemplo, $\oint_{CE} = -\oint_{EC}$ *(y lo mismo para el resto), se tiene que*

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{ABC} + \oint_{EFG} + \oint_{HIJ} + \oint_{JI'H} + \oint_{GF'E} + \oint_{CDA}$$

que podemos poner

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \left(\oint_{ABC} + \oint_{CDA} \right) + \left(\oint_{EFG} + \oint_{GF'E} \right) + \left(\oint_{HIJ} + \oint_{JI'H} \right)$$

es decir

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\gamma_1} - \oint_{\gamma_2} - \oint_{\gamma_3}$$

donde consideramos que todas las curvas están recorridas en sentido antihorario.

Example *Comprobar el teorema de Green para*

$$\oint_\Gamma \{(2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy\}$$

siendo R el domino comprendido entre $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 1$, *y* Γ *su frontera (recorrida en sentido positivo).*

Solución: Denotamos por γ_1 *a la frontera exterior, y por* γ_2 *a la interior.*

Así, por un lado se tiene que

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_R (3x^2 + 3y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 3r^2 r dr = \ldots = \frac{45}{2}\pi$$

mientras que, por otro lado, vamos a utilizar que según lo establecido anteriormente, se tiene

$$\oint_\Gamma \{(2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy\} = \oint_{\gamma_1} \{\quad\} - \oint_{\gamma_2} \{\quad\}$$

de manera que si resolvemos ambas integrales por separado, al ser

$$\oint_{\gamma_1} \{(2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2(2\cos(\theta))^3 - (2\sin(\theta))^3\right)(-2\sin(\theta))d\theta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left((2\cos(\theta))^3 + (2\sin(\theta))^3\right)(2\cos(\theta))d\theta = 12\pi + 12\pi = 24\pi$$

y

$$\oint_{\gamma_2} \{(2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2(\cos(\theta))^3 - (\sin(\theta))^3\right)(-\sin(\theta))d\theta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left((\cos(\theta))^3 + (\sin(\theta))^3\right)(\cos(\theta))d\theta = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

(hemos considerado la parametrizaciones $\gamma_1(t) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta))$, $\gamma_2(t) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, *se verifica que*

$$\oint_\Gamma \{(2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy\} = \oint_{\gamma_1} \{\quad\} - \oint_{\gamma_2} \{\quad\} = 24\pi - \frac{3}{2}\pi = \frac{45}{2}\pi$$

por lo que observamos que efectivamente se cumple el teorema de Green aunque la región sea múltiplemente conexa.

Example *Comprobar el teorema de Green para*

$$\oint_{\gamma} \{ydx + xdy\}$$

siendo γ el contorno del dominio comprendido entre las curvas $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 1$.

Independencia del camino de integración.

Sea entonces S un conjunto abierto y $\vec{\mathbf{F}}$ un campo vectorial continuo definido sobre S. Sean A y B dos puntos de S. Si se pretende calcular la integral de línea entre los puntos A y B a lo largo de un camino de S, γ, regular a trozos, puede ocurrir que:

a) El valor de la integral dependa del camino que une los puntos A y B.

b) Para ciertos campos vectoriales la integral depende únicamente de los puntos extremos A y B, y no del camino que los une.

Definition *En el caso* (b) *anterior, se dice que la integral de línea es* ***independiente del camino*** *que une A y B.*

En este sentido, debido a que la independencia del camino en la integración puede simplificar considerablemente los cálculos a desarrollar (ya que si hubiese independencia del camino, siempre se puede sustituir el mismo por otro más sencillo, con lo que también será más sencilla la integral a resolver), resulta de interés conocer qué campos vectoriales tienen integrales de línea independientes del camino de integración. El siguiente resultado nos da una primera respuesta:

Proposition *Sea Φ un campo escalar (función real de varias variables) diferenciable, con gradiente $\overrightarrow{\nabla\Phi}$ continuo en un conjunto conexo abierto $S \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, para dos puntos cualesquiera de S, A y B, unidos por un camino γ, regular o regular a trozos, situado en S, se verifica*

$$\int_A^B \overrightarrow{\nabla\Phi} \cdot \overrightarrow{dr} = \Phi(B) - \Phi(A).$$

A raíz de esta propiedad puede observarse que el caso particular de la integral de línea de un gradiente, en cualquier conjunto conexo S en el que dicho gradiente sea continuo, es independiente del camino seguido para ir de A a B en S. Por tanto, se verifica de forma inmediata el siguiente resultado:

Corollary *En las anteriores condiciones, la integral de línea $\int_{\gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{dr}$ es independiente de γ siempre que el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ sea el gradiente de un campo escalar, es decir, siempre que exista $\Phi : S \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\nabla\Phi}$.*

Definition *Al campo escalar $\Phi : S \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\nabla\Phi}$ se le denomina **función potencial**.*

Remark *Si $A = B$, es decir, si el camino es cerrado, en las anteriores condiciones se verifica que $\Phi(B) - \Phi(A) = 0$. Por tanto, la integral de línea de un gradiente continuo es cero a lo largo de todo camino cerrado regular a trozos situado en S. Puede probarse además, que los gradientes son los únicos campos que cumplen esta propiedad.*

Veamos a continuación qué condiciones se han de verificar desde el punto de vista práctico para que la integral de línea sea independiente del camino de integración (éstos resultados se basarán en los establecidos anteriormente):

Proposition *Suponiendo que $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ existen y son continuas en su dominio, se verifica que*

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} \text{es independiente de } \gamma \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Además, en tal caso se verifica que existe una función $\Phi(x,y)$ tal que $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q(x,y)$, y la integral anterior puede calcularse como

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

siendo A y B los puntos origen y extremo de γ.

Remark *Cuando existe una función $\Phi(x,y)$ tal que $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q(x,y)$, se dice que la expresión $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ es la **diferencial exacta** del campo escalar $\Phi(x,y)$.*

Remark *Notemos que la fórmula anterior constituye una generalización de la Regla de Barrow: la integral curvilínea es igual a la diferencia de los valores de la función potencial en los puntos extremo y origen de la integración, con independencia del camino seguido.*

El resultado anterior puede extenderse sin dificultad a $\mathbb{R}^3$, como vemos a continuación:

Proposition *La expresión $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ es la diferencial exacta de un campo escalar $\Phi(x,y,z)$ si y sólo si se verifican las igualdades*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \; \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

suponiendo que estas derivadas parciales existen y son continuas. Además, en este caso se tiene que

$$\int_\gamma \{P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

siendo A y B los puntos origen y extremo de γ.

Remark *La condición*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

suele expresarse de forma equivalente diciendo que es nulo el rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = (P, Q, R)$, es decir

$$\overrightarrow{rot(\mathbf{F})} = \vec{\mathbf{0}}$$

*y se dice que el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ es **conservativo**.*

Por tanto, se verifica que

$$\int_\gamma \{P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\}$$

es independiente de γ sí y sólo si

$$\overrightarrow{rot(\mathbf{F})} = \vec{\mathbf{0}}$$

siendo $\vec{\mathbf{F}} = (P, Q, R)$.

Corollary *En las condiciones anteriores, si existe independencia del camino y γ es cerrado, entonces*

$$\oint_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = 0$$

y lo mismo se verifica para integrales curvilíneas en $\mathbb{R}^3$.

Example *Calcular*

$$\oint_\gamma \{(x^2 y \cos(x) + 2xy \sin(x) - y^2 e^x)dx + (x^2 \sin(x) - 2ye^x)dy\}$$

siendo γ la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Example *Calcular*

$$\int_{(-1,1)}^{(1,1)} \{(x+y)dx + (x-y)dy\}$$

a lo largo de $y = x^2$.

Example *Probar que*

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)} \{2(x^2 + xy)dx + (x^2 + y^2)dy\}$$

es independiente del camino de integración y calcular su valor.

Example *Dada la integral*

$$\int_\gamma \left\{ \frac{1-y^2}{(1+x)^3} dx + \frac{y}{(1+x)^2} dy \right\}$$

siendo γ cualquier camino que une $(0,0)$ y $(1,1)$, probar que es independiente de γ y calcular su valor. Comprobar el resultado mediante la función potencial.

Example *Calcular, mediante la función potencial, el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (\cos(x)\sin(y), \sin(x)\cos(y))$ para trasladar una partícula desde el punto $(0,-\pi)$ al punto $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Example *Dado el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = (2y+z, 2x-z, x-y)$, hallar el trabajo realizado para desplazar un objeto desde $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$.*

Aplicaciones de la integral de línea.

Además de calcular el trabajo de una fuerza (que es la integral de línea de un campo vectorial), podemos destacar otras aplicaciones geométricas del concepto de integral de línea (todas serán integrales de línea de campos escalares):

Longitud de un arco de curva.

Por la propia definición de integral de línea que hemos establecido, la longitud de un arco de curva γ entre los puntos A y B viene dada por

$$L = \int_\gamma \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

expresión a la que denotaremos por

$$L = \int_\gamma dl$$

Así, si la curva viene dada por sus ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, la longitud de arco entre dos puntos A y B se calculará mediante

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

siendo a y b los valores de t que se corresponden a los puntos extremos A y B.

Masas y centros de masas de distribuciones lineales.

* De acuerdo con la interpretación física, si $\rho(x,y,z)$ designa la densidad puntual (unidades de masa/unidades de longitud) de una distribución lineal γ, la **masa** de dicha distribución se calcula mediante

$$M = \int_\gamma \rho(x,y,z) dl$$

* En caso particular de que la distribución sea homogénea (es decir, con densidad constante, $\rho(x,y,z) = C$) la masa será

$$M = C \cdot L$$

siendo L la longitud de dicha distribución.

* El **centro de gravedad** de la distribución lineal tiene por coordenadas

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_\gamma x \cdot \rho(x,y,z)dl,\ \bar{y} = \frac{1}{M}\int_\gamma y \cdot \rho(x,y,z)dl,\ \bar{z} = \frac{1}{M}\int_\gamma z \cdot \rho(x,y,z)dl$$

y si la distribución es homogénea, las fórmulas se simplifican, resultando

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_\gamma xdl,\ \bar{y} = \frac{1}{L}\int_\gamma ydl,\ \bar{z} = \frac{1}{L}\int_\gamma zdl$$

Momentos de inercia de una distribución lineal.

En general, el **momento de inercia** de una distribución lineal γ respecto de cualquier punto, eje o plano se calcula mediante

$$I = \int_\gamma \delta^2(x,y,z) \cdot \rho(x,y,z)dl$$

siendo $\delta(x,y,z)$ la distancia desde un punto cualquiera $P(x,y,z)$ al punto, eje o plano correspondiente.

De esta forma, obtenemos:

* **Momento de inercia respecto del origen**:

$$I_O = \int_\gamma (x^2+y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)dl$$

* **Momento de inercia respecto a los ejes coordenados**:

$$I_X = \int_\gamma (y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)dl$$

$$I_Y = \int_\gamma (x^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)dl$$

$$I_Z = \int_\gamma (x^2+y^2) \cdot \rho(x,y,z)dl$$

* **Momento de inercia respecto a los planos coordenados**:

$$I_{OXY} = \int_\gamma z^2 \cdot \rho(x,y,z)dl$$

$$I_{OYZ} = \int_\gamma x^2 \cdot \rho(x,y,z)dl$$

$$I_{OXZ} = \int_\gamma y^2 \cdot \rho(x,y,z)dl$$

Example *Una espiral de un muelle tiene la forma de hélice de ecuación $r(t) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), bt)$, $0 \le t \le 2\pi$. Hallar las coordenadas de su centro de masas y los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados.*

Resumen: Cálculo de la integral de línea.

Integral de línea de un campo escalar (2 ó 3 variables):

Si la curva viene dada por la parametrización $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, y f es una función con 2 ó 3 variables, la integral de línea se calcula aplicando

$$\int_\gamma f(x,y,z)\, dl \;:= \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Remark *Para el caso particular en que* $f(x,y,z) = 1$, *se tiene que*

$$\int_\gamma dl \;:= \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt = longitud(\gamma(t))$$

Integral de línea de un campo vectorial (2 ó 3 variables):

Si la curva viene dada por la parametrización $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, y $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ es una función vectorial (con 2 ó 3 variables), la integral de línea se calcula transformando la misma en la integral de línea de un campo escalar, para lo que aplicamos

$$\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \int_\gamma (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \cdot (dx, dy, dz) =$$

$$= \int_\gamma \{P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\}$$

Remark *(2 variables) A efectos prácticos, para el cálculo de este tipo de integrales podemos distinguir los siguientes casos:*

* *Si la curva* γ *viene dada en forma paramétrica por sus ecuaciones* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, *entonces*

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t))dt$$

donde t_1 *y* t_2 *son los valores de t correspondientes a los puntos* $A(a_1, b_1)$ *y* $B(a_2, b_2)$, *origen y extremo de* γ.

* *Si la curva* γ *viene en la forma* $y = f(x)$, *entonces*

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{a_1}^{a_2} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x))dx$$

* *Si la curva viene en la forma* $x = g(y)$,

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{b_1}^{b_2} (P(g(y),y) \cdot g'(y) + Q(g(y),y))dy$$

Remark *Lo mismo puede realizarse para el caso de integrales curvilíneas en $\mathbb{R}^3$, aunque en general, la curva γ suele venir expresada en coordenadas paramétricas.*

Independencia del camino de integración para 2 variables. El teorema de Green en el plano:

Se verifica que

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} \text{ es independiente de } \gamma \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Remark *Cuando hay independencia del camino, la integral de línea se puede calcular de forma directa, o escogiendo otro camino γ' (más sencillo que el inicial) o calculando la función potencial (es decir, hallando $\Phi(x,y)$ tal que verifica $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y)$; en este caso la integral anterior puede calcularse mediante*

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

siendo A y B los puntos origen y extremo de γ).

** Si el camino γ es cerrado y hubiese independencia del camino, se tiene que*

$$\oint_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = 0$$

** Si el camino γ es cerrado y la integral fuese **dependiente** del camino, además de utilizando la definición, la integral puede calcularse mediante*

$$\oint_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

*(**teorema de Green en el plano**).*

Corollary *El área limitada por una curva cerrada y simple γ viene dada por*

$$Area = \frac{1}{2}\oint_\gamma \{-ydx + xdy\}$$

Independencia del camino para el caso de 3 variables:

Para un campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, se verifica que

$$\int_\gamma \{P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\} \text{ es independiente de } \gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{rot(\mathbf{F})} = \vec{\mathbf{0}}$$

Remark *Cuando hay independencia del camino, la integral de línea se puede calcular de forma directa, o escogiendo otro camino γ' (más sencillo que el inicial) o calculando la función potencial (es decir, hallando $\Phi(x,y,z)$ tal que verifica $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P(x,y,z)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q(x,y,z)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = R(x,y,z)$; en este caso aplicamos que*

$$\int_\gamma \{P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

siendo A y B los puntos origen y extremo de γ).

** Si el camino γ es cerrado y hubiese independencia del camino, se tendría que*

$$\oint_\gamma \{P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\} = 0$$

** Si el camino γ es cerrado y la integral fuese dependiente del camino, además de por la definición, la integral también puede calcularse mediante el* ***teorema de Stokes****, como veremos en el tema siguiente (Integral de superficie).*

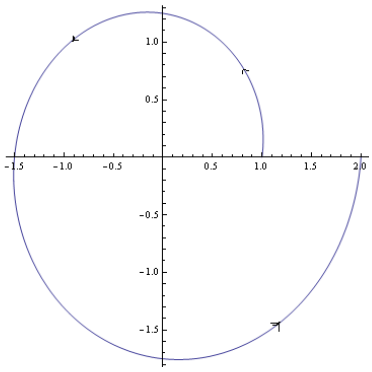
Ejercicios resueltos.

1. (Febrero 2012) *Dado el campo vectorial*

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (e^x\sin(y) - y, e^x\cos(y) - x - 2)$$

calcular la integral de $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo de la espiral de ecuación

$$\gamma(t) = \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right)(\cos(t), \sin(t)), \text{ con } 0 \le t \le 2\pi$$



Solución: Se trata de calcular $\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$, cosa que podemos hacer de forma directa usando la parametrización dada para la curva γ. Sin embargo, antes de hacerlo de esta forma, vemos si dicha integral de línea es independiente del camino de integración:

Si tomamos $P(x,y) = e^x\sin(y) - y$; $Q(x,y) = e^x\cos(y) - x - 2$; como se verifica que

$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x\cos(y) - 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, resulta que efectivamente es independiente del camino.

Por tanto, en lugar de hacerlo de forma directa con las ecuaciones de γ, tomaremos cualquier otro camino que una los puntos origen y extremo de nuestra curva (que son $(1,0)$ y $(2,0)$). Así, por ejemplo, podemos tomar como camino la recta que une ambos puntos, es decir, el eje X, y su parametrización viene dada por $\delta(t) = (t,0)$ con $1 \leq t \leq 2$.

Por ello,

$$\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \int_\delta \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \int\{(e^x\sin(y) - y)dx + (e^x\cos(y) - x - 2)dy\} = \ldots = \int_1^2 0dt = 0$$

NOTA: Este último apartado también podría haberse resuelto usando la función potencial, ya que la integral es independiente del camino. Si se hace de esta forma, resultará que la función potencial Φ viene dada (hacer las operaciones) por

$$\Phi(x,y) = e^x\sin(y) - xy - 2y + cte$$

por lo que

$$\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \Phi(2,0) - \Phi(1,0) = 0$$

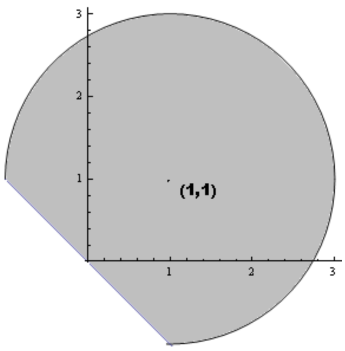
2. (Febrero 2012) *Calcula la integral del campo vectorial*

$$\vec{\mathbf{G}}(x,y) = ((1+x)y^2, \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y))$$

a lo largo de la frontera del conjunto (figura siguiente)

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 < 4, y+x > 0\right\}$$

orientada positivamente. Justifica el procedimiento que uses.



Solución: Se trata de calcular la integral de línea

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$$

siendo γ la curva frontera de D. Esta integral de línea es dependiente del camino de integración, ya que si $P(x,y) = (1+x)y^2$ y $Q(x,y) = \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y)$, se verifica que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Por tanto, esta integral tendremos que calcularla directamente (no lo haremos ya que el campo vectorial tiene funciones cuyas integrales son complicadas) o por el teorema de Green en el plano, como haremos a continuación:

Así tenemos que

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \oint_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (\pi - 2(1+x)y)dxdy$$

y solamente hemos de resolver esta integral doble.

Para ello, realizamos el cambio a coordenadas polares generalizadas

$$x = 1 + r\cos(\theta); \qquad y = 1 + r\sin(\theta)$$

(con esto se consigue trabajar con la figura anterior, pero como si la circunferencia estuviese centrada en el origen), de manera que la circunferencia $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ se transforma en $r = 2$, mientras que la recta $y + x = 0$ se convierte en $r = \frac{-2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}$; además, para los límites de integración de las nuevas variables (r, θ) se tiene que si $-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ entonces $0 < r < 2$, mientras que si $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ entonces $0 < r < \frac{-2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}$.

Como el jacobiano de la transformación vale r, se sigue que

$$\iint_D (\pi - 2(1+x)y)dxdy = \iint_{D'} (\pi - 2(2 + r\cos(\theta))(1 + r\sin(\theta)))rdrd\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^2 (\pi - 2(2 + r\cos(\theta))(1 + r\sin(\theta)))rdr +$$

$$+ \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{-2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}} (\pi - 2(2 + r\cos(\theta))(1 + r\sin(\theta)))rdr$$

La primera de estas integrales es sencilla de calcular y la misma viene dada por

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^2 (\pi - 2(2 + r\cos(\theta))(1 + r\sin(\theta)))rdr =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi - \frac{16}{3}\cos(\theta) - \frac{32}{3}\sin(\theta) - 4\sin(2\theta) - 8 \right) d\theta = 2\pi^2 - 16\pi$$

mientras que la segunda es mucho más complicada (por ser complicada la ecuación de una recta en coordenadas polares). Por tal motivo, en la parte de D' que corresponde a esta segunda integral (es decir, en la parte de la región D' que queda en el 4º cuadrante) resolvemos la integral en coordenadas cartesianas x, y (notemos en la gráfica que si $-1 < x < 1$ entonces $-x < y < 1$) y su resultado se lo sumaremos al resultado obtenido en la anterior integral (en definitiva, lo que hacemos es calcular, por un lado, la integral en la región constituída por los cuadrantes 4º, 1º y 2º -que, en este caso, su frontera es la circunferencia- y, por otro lado, la integral en el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 0$):

Como

$$\iint_{\text{parte } D' \text{ en 4º cuadrante}} (\pi - 2(1+x)y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-x}^{1} (\pi - 2(1+x)y)dy =$$

$$= \int_{-2}^{0} (x+1)(x^2 + \pi - 1)dx = -\frac{4}{3}$$

entonces

$$\oint_\gamma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = 2\pi^2 - 16\pi - \frac{4}{3}$$

3. (Febrero 2012) *Sea la superficie S definida por*

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\right\}$$

y sea $\vec{\mathbf{F}}$ *el campo vectorial* $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (-y, yz^2, x^2z)$. *Calcular (directamente) la integral del rotacional de* $\vec{\mathbf{F}}$ *a lo largo de la curva obtenida al intersectar la superficie S con el plano* $z = 1$.

Solución: Se trata de calcular la integral de línea dada por

$$\oint_\gamma \operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \oint_\gamma \{-2yzdx - 2xzdy + dz\}$$

Como una parametrización de dicha circunferencia viene dada por

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{3}\cos(t), \sqrt{3}\sin(t), 1\right), \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

tendremos

$$\oint_\gamma \{-2yzdx - 2xzdy + dz\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\sqrt{3}\sin(t) \cdot 1 \cdot \left(-\sqrt{3}\sin(t)\right)dt - \right.$$
$$\left. -2\sqrt{3}\sin(t) \cdot 1^2 \cdot \left(\sqrt{3}\cos(t)\right)dt - \left(\sqrt{3}\cos(t)\right)^2 1 \cdot 0dt\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (6\sin^2(t) - 6\cos^2(t))dt = -6\int_0^{2\pi} \cos(2t)dt = -3[\sin(2t)]_0^{2\pi} = 0$$

(Nota: Como veremos en el tema siguiente, esta integral también se puede calcular aplicando el teorema de Stokes y/o usando el teorema de la divergencia, aunque en este caso, y al no ser *S* una superficie cerrada, habríamos de cerrarla por superficies elementales).

4. (Junio 2012) *Calcula la integral del campo vectorial*

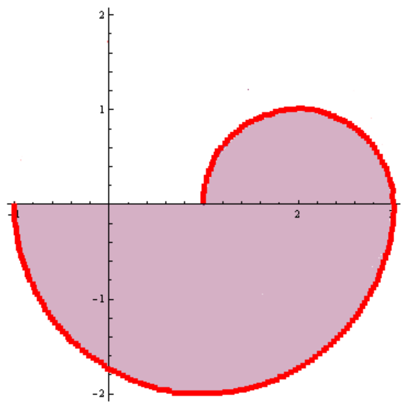
$$\vec{\mathbf{G}}(x,y) = ((1+x)y^2, \pi x - log(1+y^2)\cos(y^4+3y))$$

a lo largo de la curva dibujada en rojo en la figura siguiente, positivamente orientada. Tener en cuenta que el conjunto coloreado en gris es de la forma

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < 3;\ -\sqrt{4-(x-1)^2} < y < \phi(x)\right\}$$

donde

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \sqrt{1-(x-2)^2} & \text{si } 1 \leq x < 3 \end{cases}$$



Solución: Sea γ la curva dibujada en rojo en la figura. Observemos que la curva no es cerrada, y que además, la integral de línea $\int_\gamma \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$ es dependiente del camino de integración, ya que si llamamos $P(x,y) = (1+x)y^2$ y $Q(x,y) = \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y)$, se verifica que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Por tanto, esta integral tendremos que calcularla directamente (no lo haremos ya que el campo vectorial tiene funciones cuyas integrales son complicadas) o, si conseguimos cerrar el camino, podremos aplicar el teorema de Green en el plano.

Así, sea σ la curva cerrada dada por $\sigma = \gamma \cup \delta$, siendo δ el trozo de eje OX que va desde $x = 1$ a $x = -1$. Así, sabemos que

$$\oint_\sigma \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \int_\gamma \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} + \int_\delta \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$$

por lo que la integral que queremos calcular será

$$\int_\gamma \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \oint_\sigma \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} - \int_\delta \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$$

donde la 1ª de estas integrales la obtendremos por el teorema de Green en el plano, mientras que la segunda la calcularemos directamente (al ser muy fácil la parametrización del camino $\delta : \delta(t) = (t,0)$ con $t \in [1,-1]$). Si realizamos los oportunos cálculos:

* Aplicando el teorema de Green a la integral cerrada:

$$\oint_\sigma \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (\pi - 2(1+x)y)dxdy =$$

$$= \pi \iint_D dxdy - 2\iint_D (1+x)ydxdy = \pi Area(D) - 2\iint_D (1+x)ydxdy$$

Esta última integral la resolveremos por separado, y como la región D es la unión de dos semicírculos, pondremos $D = D_1 \cup D_2$, siendo D_1 la mitad inferior del círculo de centro $(1,0)$ y radio 2; mientras que D_2 es la mitad superior del círculo de centro $(2,0)$ y radio 1.

Así

$$\iint_D (1+x)ydxdy = \iint_{D_1} (1+x)ydxdy + \iint_{D_2} (1+x)ydxdy =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^2 (1 + 1 + r\cos(\theta)) r\sin(\theta) \cdot r \cdot dr +$$

$$+ \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 (1 + 2 + r\cos(\theta)) r\sin(\theta) \cdot r \cdot dr = -\frac{32}{3} + 2 = -\frac{26}{3}$$

donde en D_1 hemos realizado el cambio a polares $x = 1 + r\cos(\theta);\ y = r\sin(\theta);$ con $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 2;$ y en D_2 hemos realizado el cambio a polares $x = 2 + r\cos(\theta);$ $y = r\sin(\theta);$ con $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq r \leq 1$.

Por todo ello,

$$\oint_{\sigma} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \pi \cdot \frac{5\pi}{2} - 2\left(-\frac{26}{3}\right)$$

* Calculando de manera directa la segunda de las integrales

$$\int_{\delta} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \int_1^{-1} \{(1 + t)0^2 \cdot dt + (\pi t - \log(1 + 0^2)\cos(0^4 + 3 \cdot 0))0 \cdot dt\} = 0$$

Por tanto

$$\int_{\gamma} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \oint_{\sigma} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} - \int_{\delta} \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \pi \cdot \frac{5\pi}{2} - 2\left(-\frac{26}{3}\right) - 0$$

5. (Septiembre 2012) *Calcula las integrales de los campos vectoriales a lo largo de las curvas que se indican (orientadas positivamente). Justifica el procedimiento que uses en cada caso.*

5.a *Campo*

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = \left(2x - y\sin(xy), -x\sin(xy) + (y-1)^2\right)$$

Curva

$$\gamma(t) = \left(\left(1 + \frac{t}{2}\right)\cos(t), \sin(t)\right),\ 0 < t < 4\pi$$

5.b *Campo*

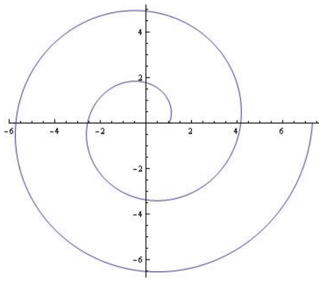
$$\vec{\mathbf{G}}(x,y) = ((1 + x)y^2, \pi x - \log(1 + y^2)\cos(y^4 + 3y))$$

Curva

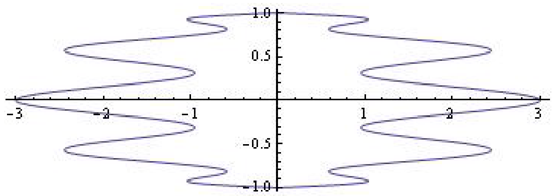
$$\sigma(t) = ((2 + 10\cos(t))\cos(t), \sin(t)),\ 0 < t < 2\pi$$

AYUDA: Cualquier curva de la forma $\sigma(\theta) = (\alpha(\theta)\cos(\theta), \beta(\theta)\sin(\theta))$, con α, β funciones continuas y $2\pi -$ periódicas (es decir, $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ y $\beta(0) = \beta(2\pi)$) es frontera de un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ que puede describirse en coordenadas elípticas como

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow x = r \cdot \alpha(\theta)\cos(\theta),\ y = r \cdot \beta(\theta)\sin(\theta),\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < r < 1$$



(5.a)



(5.b)

Solución: Para el apartado (5.a): La curva γ no es cerrada, pero la integral de línea $\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}}$ es independiente del camino de integración (ya que si llamamos $P(x,y) = 2x - y\sin(xy)$ y $Q(x,y) = -x\sin(xy) + (y-1)^2$, se verifica que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$). Por tanto, en lugar de considerar el camino propuesto, tomaremos la recta (eje X) que une los puntos $(1,0)$ y $(1+2\pi,0)$, sabiendo que una parametrización de este camino viene dada por

$$\gamma_1(t) = (t,0),\ 1 < t < 1+2\pi$$

Entonces

$$\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \int_{\gamma_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \ldots = \int_1^{1+2\pi} 2t\,dt = 4\pi(\pi+1)$$

Para (5.b), si hacemos $P(x,y) = (1+x)y^2$ y $Q(x,y) = \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y)$, se verifica que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, por lo que la integral que queremos calcular es dependiente del camino de integración. Al ser éste cerrado, aplicamos el teorema de Green en el plano, por lo que

$$\int_\sigma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (\pi - 2(1+x)y)\,dxdy$$

siendo D la región que encierra la curva.

Usando la indicación del enunciado, esta integral doble la calculamos haciendo un cambio a coordenadas elípticas

$$x = r \cdot \alpha(\theta)\cos(\theta),\ y = r \cdot \beta(\theta)\sin(\theta),\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < r < 1$$

donde en nuestro caso

$$\alpha(\theta) = 2 + \cos(10\theta),\ \beta(\theta) = 1$$

por lo que el cambio ha de ser

$$x = r \cdot (2+\cos(10\theta))\cos(\theta),\ y = r \cdot \sin(\theta),\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < r < 1$$

siendo además el jacobiano del cambio, el dado por

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

es decir

$$J = \begin{vmatrix} (2+\cos(10\theta))\cos(\theta) & r(-10\sin(10\theta)\cos(\theta) - (2+\cos(10\theta))\sin(\theta)) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} =$$

$$= 2r + 10r\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(10\theta) + r\cos(10\theta)$$

De esta forma

$$\int_\sigma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \iint_D (\pi - 2(1+x)y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 ((\pi - 2(1 + r(2+\cos(10\theta))\cos(\theta))r\sin(\theta))$$

$$(2r + 10r\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(10\theta) + r\cos(10\theta)))dr$$

y realizando los cálculos, resulta ser

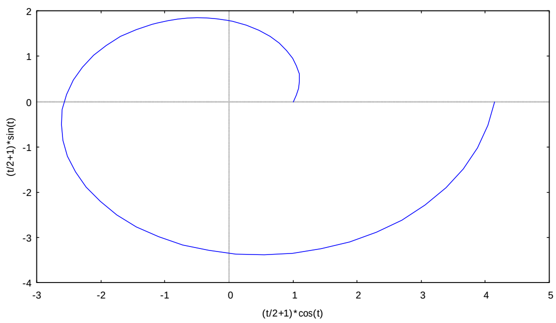
$$\int_\sigma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = 2\pi^2$$

6. (Febrero 2013) *Calcula la integral del campo vectorial*

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = ((1+x)y^2 + \cos(x), \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y))$$

a lo largo de la curva parametrizada por la ecuación

$$\gamma(t) = \left(1 + \frac{t}{2}\right)(\cos(t), \sin(t)),\ 0 \le t \le 2\pi$$



Solución: Se trata de calcular una integral de línea a través de una curva que no es cerrada. Además dicha integral de línea depende del camino (puesto que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$). Por ello, lo que vamos a hacer es cerrar el camino γ añadiéndole γ_1, segmento de eje X que une los puntos extremo y origen de γ, de manera que tendremos el camino cerrado $\Gamma = \gamma \cup \gamma_1$.Así, tendremos

$$\oint_\Gamma = \int_\gamma + \int_{\gamma_1}$$

de forma que

$$\int_\gamma = \oint_\Gamma - \int_{\gamma_1}$$

donde la integral a lo largo de Γ la calculamos por el teorema de Green y la integral a lo largo de γ_1 la hacemos directamente.

Calculamos ambas por separado:

* A lo largo de γ_1 : Tomamos como parametrización la dada por

$$\gamma_1(t) = (t,0), \text{ con } t \in [1+\pi, 1]$$

(el punto origen de γ_1 es el resultado de sustituir t por $1+\pi$, ya que es en este punto donde finaliza Γ) por lo que

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \int_{1+\pi}^{1} ((1+t)0^2 + \cos(t), (\pi t - \log(1)\cos(0))) \cdot (dt, 0dt) =$$

$$= \int_{1+\pi}^{1} \cos(t)dt = \ldots = 2\sin(1)$$

* A lo largo de Γ : Aplicamos el teorema de Green, por lo que

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D (\pi - 2(1+x)y)dxdy$$

siendo D la región encerrada por la curva Γ y recorrida en sentido positivo. Vamos a realizar un cambio a coordenadas polares en esta integral doble, teniendo en cuenta que

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta);\ J = r;\ \text{siendo } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ mientras que } 0 \leq r \leq 1 + \frac{\theta}{2}$$

Así,

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \iint_D (\pi - 2(1+x)y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1+\frac{\theta}{2}} ((\pi - 2(1+r\cos(\theta))r\sin(\theta))r)dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\theta}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(1+\frac{\theta}{2}\right)^3 \cos(\theta)\sin(\theta) - \frac{1}{2}\left(1+\frac{\theta}{2}\right)^4 \sin(\theta) \right] d\theta =$$

$$= \ldots = -\frac{(44\pi^4 + 144\pi^3 - 33\pi^2 - 354\pi}{96}$$

Por todo lo anterior

$$\int_{\gamma} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} - \int_{\gamma_1} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = -\frac{(44\pi^4 + 144\pi^3 - 33\pi^2 - 354\pi}{96} - 2\sin(1)$$

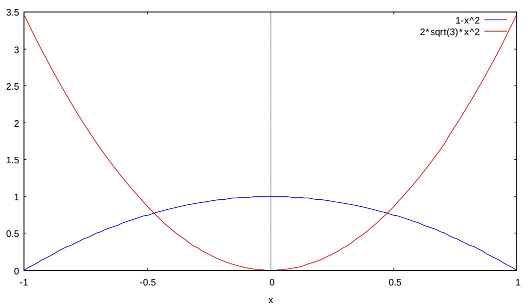
7. (Junio 2013) *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el recinto limitado por la circunferencia unidad y la parábola $y = 2\sqrt{3}x^2$ (figura siguiente). Calcular la integral*

$$\int_{\gamma} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot dr$$

donde

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = (-(x-\pi)y^2 + \cos(x^2), \log(1+y^2))$$

y γ es la frontera de recinto D (recorrida en sentido positivo).



Solución: Se trata de calcular una integral de línea, en una línea cerrada que encierra un área. Por tanto, en lugar de realizar la integral de forma directa como suma de dos integrales de línea (una a través del trozo de parábola y otra a través del trozo de circunferencia), será más rápido aplicar el teorema de Green en el plano (ya que, evidentemente, la integral de línea es dependiente del camino de integración -comprobarlo- y éste es cerrado).

Así, aplicando dicho teorema, tendremos

$$\int_{\gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot dr = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_{D} (0 - 2y(\pi - x))dxdy$$

y si resolvemos esta integral doble poniendo sus respectivos límites de integración

$$\int_{\gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot dr = -2\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{2\sqrt{3}x^2}^{\sqrt{1-x^2}} y(\pi - x)dy =$$

$$= -2\int_{-1/2}^{1/2} \left(x^4(6x - 6\pi) + (1 - x^2)\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x \right) \right) dx = -\frac{23}{30}\pi$$

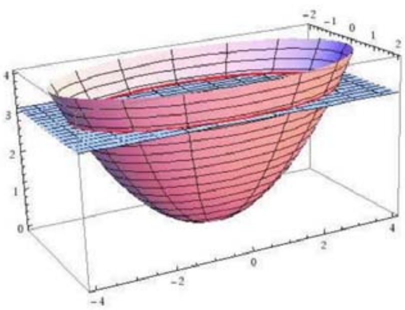
8. (Septiembre 2013) *Calcular la integral del campo vectorial*

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y^2 + \sin^2(\pi x^2 + 1), z + \cos(y^2), y + \log(1 + x^2))$$

a lo largo de la curva obtenida al intersectar el paraboloide de sección elíptica

$$\mathcal{P} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + \frac{y^2}{4} = z \right\}$$

con el plano $z = \pi$ (figura siguiente). Justificar el procedimiento utilizado.



Ayuda: *Para describir una región cuya geometría se asemeja a un cilindro de sección elíptica, pueden usarse coordenadas cilíndricas de la forma (r,θ,z), que se relacionan con las cartesianas mediante las igualdades*

$$x = a(z)r\cos(\theta); \qquad y = b(z)r\sin(\theta); \qquad z = z$$

siendo $a(z)$, $b(z)$ los semiejes de las secciones elípticas que pueden variar con la altura z. El rango máximo de los valores que pueden tomar estas coordenadas es $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. El determinante jacobiano es en este caso de la forma $J = a(z)b(z)r$.

Solución: (Nota: Este ejercicio, aunque puede resolverse de forma directa, es mejor hacerlo utilizando el Teorema de Stokes, el cual será desarrollado en el ver tema siguiente).

Para no tener que calcular de forma directa la integral que nos piden, usaremos el teorema de Stokes, puesto que se verifica

$$\oint_{\gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{S} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}_S} dS$$

siendo S una superficie que tiene a γ como borde. Así, podemos tomar como S el plano $z = \pi$, por lo que $\overrightarrow{\mathbf{n}_S} = (0,0,1)$.

Si efectuamos los oportunos cálculos, resulta

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \ldots = \left(0, \frac{-2x}{1+x^2}, 2y\right)$$

de manera que

$$rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}_S} = \left(0, \frac{-2x}{1+x^2}, 2y\right) \cdot (0,0,1) = 2y$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{1+0^2+0^2}\, dxdy = dxdy$$

Así

$$\oint_{\gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{S} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}_S} dS = \iint_{D} 2ydxdy$$

con $D : \frac{x^2}{\pi} + \frac{y^2}{4\pi} = 1$, por lo que en la integral doble anterior realizamos (según la indicación del enunciado) el cambio de variables dado por

$$x = a(z) r\cos(\theta) = \sqrt{\pi}\, r\cos(\theta);\ y = b(z) r\sin(\theta) = 2\sqrt{\pi}\, r\sin(\theta);\ J = a(z)b(z)r = 2\pi r$$

De esta forma

$$\oint_{\gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{D} 2ydxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2 \cdot 2\sqrt{\pi}\, r\sin(\theta) \cdot 2\pi r dr = \ldots = 0$$

9. (Febrero 2014) *Calcular*

$$\int_{C_\alpha} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{dr}$$

donde

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = \left(x^2+y^2,\ 3xy + \log(y^2+1)\right)$$

y C_α es la frontera de la región compacta

$$D = \left\{(x,y);\ 4x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$$

recorrida en sentido positivo.

Solución: Se trata de calcular una integral de línea a lo largo de un camino cerrado. Puesto que se verifica que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y$$

la integral depende del camino de integración, y al ser éste cerrado, podemos resolverla mediante el teorema de Green:

Por tanto

$$\oint \{(x^2+y^2)dx + (3xy + \log(y^2+1))dy\} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \iint_D (3y - 2y) dxdy = \iint_D ydxdy$$

Como el recinto de integración viene dado por la ecuación

$$4x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + (y-1)^2 = 1$$

resulta que se trata de una elipse centrada en $(0,1)$ y de semiejes $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$, por lo que hacemos el cambio de variable

$$x = \frac{1}{2} r\cos(\theta); \qquad y = 1 + r\sin(\theta)$$

siendo el jacobiano

$$J = \ldots = \frac{1}{2} r$$

Por tanto

$$\iint y\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + r\sin(\theta))\frac{1}{2} r\,dr = \ldots = \frac{\pi}{2}$$

10. (Febrero 2015) *Calcular las siguientes integrales de línea*

$$I_1 = \int_{C_\alpha} \{3x^2dx + y^2dy\}$$

$$I_2 = \int_{C_\alpha} \left\{\frac{2}{3}y^3dx + 8xdy\right\}$$

donde C_α *es la circunferencia de centro* $(0,1)$ *y radio* 1, *recorrida en sentido positivo.*

Solución: Se trata de calcular integrales de línea a lo largo de un camino cerrado.

Para la primera de ellas, y puesto que se verifica que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

la misma es independiente del camino de integración, por lo que

$$I_1 = \oint_{C_\alpha} \{3x^2dx + y^2dy\} = 0$$

Para I_2, al ser

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 8$$

la integral depende del camino de integración, por lo que la resolvemos mediante el teorema de Green: Así,

$$I_2 = \oint_{C_\alpha} \left\{\frac{2}{3}y^3dx + 8xdy\right\} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D (8 - 2y^2)dxdy$$

Como el recinto de integración viene dado por la ecuación $x^2 + (y-1)^2 = 1$, realizamos el cambio de variable

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = 1 + r\sin(\theta) \end{cases}$$

siendo el jacobiano $J = r$, con $r \in [0,1]$ y $\theta \in [0,2\pi]$.

Por tanto

$$\iint_D (8-2y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(8-2(1+r\sin(\theta))^2\right) rdr = \ldots = \frac{11\pi}{2}$$

Nota: Esta segunda integral también podríamos resolverla de forma directa, tomando una parametrización $\gamma(t) = (\cos(t), 1+\sin(t))$, con $\in [0,2\pi]$, por lo que

$$I_2 = \int_{C_\alpha} \left\{\frac{2}{3}y^3dx + 8xdy\right\} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}(1+\sin(t))^3(-\sin(t)) + 8\cos(t)\cos(t)\right)dt$$

aunque es más complicada que resolver el problema mediante el teorema de Green.

11. (Febrero 2016) *Dado el campo*

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \sin(yz)\vec{i} + xz\cos(yz)\vec{j} + (xy\cos(yz) + e^z)\vec{k}$$

se pide:

a) Determinar si $\vec{\mathbf{F}}$ *es conservativo.*

b) Encontrar una función potencial para $\vec{\mathbf{F}}$.

c) Calcular la integral $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$, *siendo C una curva que une los puntos* $(0,0,0)$ *y* $(2, \frac{1}{2}, \pi)$.

d) Calcular $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$, *siendo C la curva resultado de intersectar la esfera* $x^2+y^2+z^2 = 4$ *con el plano* $y+z = 2$.

Solución:

(11.a) Puesto que

$$\overrightarrow{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin(yz) & xz\cos(yz) & xy\cos(yz)+e^z \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

efectivamente el campo es conservativo.

(11.b) Queremos hallar $\Phi(x,y,z)$ tal que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sin(yz); \frac{\partial \Phi}{\partial y} = xz\cos(yz); \frac{\partial \Phi}{\partial z} = xy\cos(yz) + e^z$$

De la primera de las igualdades, se tiene que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sin(yz) \Rightarrow \Phi(x,y,z) = \int \sin(yz)dx = x\sin(yz) + cte = x\sin(yz) + g(y,z)$$

Usando la segunda de las igualdades, se tiene que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = xz\cos(yz) \Leftrightarrow x\cos(yz)z + \frac{\partial g}{\partial y} = xz\cos(yz)$$

por lo que

$$\frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y,z) = cte = h(z)$$

y

$$\Phi(x,y,z) = x\sin(yz) + h(z)$$

Usando entonces la 3ra igualdad,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = xy\cos(yz) + e^z \Leftrightarrow x\cos(yz)y + h'(z) = xy\cos(yz) + e^z$$

de donde

$$h'(z) = e^z \Rightarrow h(z) = e^z + cte$$

Por todo lo anterior, la función potencial será

$$\Phi(x,y,z) = x\sin(yz) + e^z + cte$$

(11.c) Como existe función potencial, el valor de la integral será

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \Phi\left(2, \frac{1}{2}, \pi\right) - \Phi(0,0,0) = (2 + e^{\pi}) - 1 = 1 + e^{\pi}$$

(11.d) La intersección de la esfera y el plano es la elipse $x^2 + 2y^2 - 4y = 0$, que es una curva cerrada, por lo que

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = 0$$

Ejercicios propuestos.

1. Dada

$$\int_\gamma \left\{ \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} dx + \frac{1-x^2}{(1+xy)^2} dy \right\}$$

siendo γ cualquier camino que une $(0,0)$ y $(1,1)$:

a. Probar que es independiente del camino, y calcular dicha integral. (**Solución** = **1**)
b. Comprobar el resultado mediante la función potencial.

2. Dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{2xyz}{1+z^2}, \frac{x^2z}{1+z^2}, \frac{x^2y(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \right)$$

a. Probar que $\vec{\mathbf{F}}$ es conservativo.
b. Calcular el trabajo necesario para desplazar un objeto desde $(0,0,1)$ a $(1,1,2)$. (**Solución** = **2/5**)

3. Idem para los puntos $(1,-1,1)$ y $(2,1,-1)$, siendo el campo

$$\vec{\mathbf{F}} = (2xz^3 + 6y, 6x - 2yz, 3x^2z^2 - y^2)$$

(**Solución** = **107/5**)

4. Verificar el teorema de Green para

$$\oint_\gamma \{(x^2+y^2)dx + (x^2-4)dy\}$$

siendo γ la curva, recorrida en sentido positivo, que delimita al dominio dado por la intersección, en el primer cuadrante, de las curvas $y = x,\ x+y = 2,\ x+y = 4,$ $x^2 - y^2 = 4.$ (**Solución** = **123/24**)

5. Calcular, mediante una integral de línea, el área del dominio cerrado limitado por las parábolas $y^2 + 4x - 4 = 0,\ y^2 + 16x - 64 = 0,\ y^2 - 4x - 4 = 0,\ y^2 - 36x - 324 = 0.$ (**Solución** = **106/3**)

6. Idem para el dominio limitado por $y = x^2, y = 2x^2,\ x = y^2,\ x = 2y^2.$ (**Solución** = **1/12**)

7. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la curva $y = \cosh(x)$ comprendido entre $A(0,1)$ y $B(\log(2), 5/4).$ (**Solución** = **log(2) - 3/2,5/8 + log(2/3)**)

8. Hallar el momento de inercia de una circunferencia de centro el origen y radio R respecto a uno de sus diámetros. (**Solución** = πR^2)

9. Empleando el teorema de Green transformar la integral de línea

$$\oint_\gamma \left\{\sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left(xy + \log\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy\right\}$$

siendo γ el contorno que limita a un recinto arbitrario $D.$ (**Solución** = $\iint_D y^2 dxdy$)

10. Averiguar si existe una función potencial Φ para cada una de las siguientes funciones:
    a. $f = (xz - y, x^2y + z^3, 3xz^2 - xy).$ (**Solución** = No existe)
    b. $f = (2xe^{-y}, \cos z - x^2e^{-y}, -y\sin z).$ (**Solución** = Si existe)

11. Siendo γ el contorno del cuadrado de lado $2a$ determinado por las desigualdades $|x| \le a,\ |y| \le a,$ calcular

$$\int_\gamma \left\{xe^{-y^2}dx + \left(-x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}\right)dy\right\}$$

(**Solución** = **No existe función potencial**, **por lo que hay que calcular la integral directamente**. **Se obtiene 0**)