Profesor: **Roque Molina Legaz**

# Tema 2.1. CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES.

PROGRAMA DETALLADO:

**Introducción**: **Repaso de topología en** $\mathbb{R}^n$.
**Sistemas de coordenadas**:
Sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$.
Sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^3$.
**Campos escalares y vectoriales**. **Operadores diferenciales**:
Definiciones.
Operadores diferenciales.
Teoremas básicos.
**Ejercicios resueltos**.
**Ejercicios propuestos**.

## Introducción: Repaso de topología en $\mathbb{R}^n$.

Es aconsejable que recordemos conceptos topológicos previos introducidos en la asignatura de Matemáticas I (algunos de los cuales ya se han establecido para el caso de $\mathbb{R}^2$ en el Tema 1.1). Entre éstos, podemos destacar:

**Definition** *Se define* $\mathbb{R}^n$ *como el conjunto dado por*

$$\mathbb{R}^n = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

Lo normal es trabajar en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, puesto que son los puntos que podemos representar gráficamente.

**Proposition** *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *dados por*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

*Las operaciones típicas que podemos hacer con estos vectores de* $\mathbb{R}^n$ *son las siguientes:*

*a)* ***Suma de vectores****: Si* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*, se define la* ***suma*** *de ambos como*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

*b)* ***Producto de un escalar por un vector****: Si* $\alpha \in \mathbb{R}$*, se define*

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

*c)* ***Producto escalar de dos vectores****: Lo denotaremos por* $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >$ *o por* $x \bullet y$*, y en la base canónica viene dado por el número real*

$$x \bullet y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \bullet (y_1, y_2, \ldots, y_n) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

*d)* ***Norma (o módulo) de un vector****: Se define la misma como el número real* *dado por*

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

*Algunas propiedades de la norma: Se verifican, entre otras, las siguientes*

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0$$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = \alpha\|\mathbf{x}\|$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

*e)* ***Ángulo entre dos vectores****: Si denotamos por* $\theta$ *al ángulo que forman los vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$*, se tiene que*

$$\cos(\theta) = \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{x \bullet y}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

*f)* ***Producto vectorial de dos vectores****: Esta es una operación que se puede hacer en* $\mathbb{R}^3$*, y que viene dada por el vector*

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

**Definition** *Otras definiciones son:*

*a)* ***Bola centrada en*** $\mathbf{x}_0$ ***y de radio*** $r$ *: Se define como el conjunto*

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\right\}$$

*b)* ***Punto interior*** *-* ***Conjunto abierto****: Un punto* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *es* ***interior*** *a un conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *si existe* $B(\mathbf{a}, r) \subset X$*. Al conjunto de todos los puntos interiores a un conjunto X se le llama* ***interior de*** *X, y se representa por int(X) o* $\overset{o}{X}$*.*

*Se dice que un conjunto X es* ***abierto*** *cuando éste coincide con su interior, es decir, si X = int(X).*

*c)* ***Punto exterior****: Un punto* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *es* ***exterior*** *a un conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *si existe* $B(\mathbf{a}, r) \subset \mathbb{R}^n - X$*. Al conjunto de todos los puntos exteriores a un conjunto X se le llama* ***exterior de*** *X, y se representa por ext(X).*

*d)* ***Frontera****: Un punto* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *es* ***frontera*** *de un conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *si todo entorno de* $\mathbf{a}$ *contiene puntos de X y de* $\mathbb{R}^n - X$*. Al conjunto de todos los puntos frontera de un conjunto X se le llama* ***frontera de*** *X, y se representa por fr(X).*

*e)* ***Conjunto cerrado*** *-* ***Clausura****: Se dice que un conjunto X es* ***cerrado*** *cuando coincide con la unión de su interior y su frontera, es decir,* $X = int(X) \cup fr(X)$*.*

*Se define la* ***clausura*** *de un conjunto como el menor conjunto cerrado que lo contiene. Evidentemente, si un conjunto es cerrado, éste coincide con su clausura.*

*f)* ***Conjunto compacto****: Es todo conjunto de* $\mathbb{R}^n$ *cerrado y acotado.*

**Exercise** *Utilizar la definición de ángulo entre dos vectores de* $\mathbb{R}^3$ *para comprobar la igualdad siguiente, donde* $\theta = ang(\mathbf{x},\mathbf{y})$ :

$$\sin^2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\|x \times y\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2}$$

**Exercise** *Comprobar si los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados. Calcular además su frontera y su clausura:*

$$a)\ A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y \geq 1\right\}$$

$$b)\ B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y > 0,\ x \geq 0\right\}$$

$$c)\ C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + \frac{y^2}{2} < 1\right\}$$

$$d)\ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + \frac{y^2}{2} < 1,\ x + y \geq 0\right\}$$

**Exercise** *Representar gráficamente el conjunto definido por*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ y < x\right\}$$

*Calcular su interior, exterior, clausura y frontera. ¿Es un conjunto compacto?*

# Sistemas de coordenadas.

## Sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$.

Los dos sistemas de coordenadas usados habitualmente en $\mathbb{R}^2$ son las coordenadas *cartesianas* y las coordenadas *polares*. Las recordamos brevemente, puesto que sobre todo las segundas han sido introducidas en el primer tema del Bloque 1:

- **Cartesianas**: Consisten en expresar un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en la forma

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

siendo $\vec{i}$ y $\vec{j}$ los vectores unitarios de los ejes $X$ e $Y$, respectivamente.

- **Polares**: Consisten en representar cualquier punto del plano, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en la forma $(r,\theta)$, o alternativamente $r_\theta$, siendo $r$ el módulo del vector asociado $(x,y)$, y $\theta$ el ángulo que dicho vector forma con la parte positiva del eje $X$, es decir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

o, lo que es equivalente

$$x = r\cos(\theta); \qquad y = r\sin(\theta)$$

(notemos que las primeras expresiones son las que usamos para pasar un punto de coordenadas cartesianas a polares; mientras que las últimas nos permiten el paso inverso).

**Example** *Expresar el punto* $(x,y) = (1,-1)$ *en coordenadas polares. Idem para el punto* $(r,\theta) = \left(\sqrt{2}, -\pi/4\right) \equiv \left(\sqrt{2}\right)_{-\pi/4}$ *en coordenadas cartesianas.*

Ya hemos recordado como se pasa un punto de polares a cartesianas (o al revés). Pero, ¿qué ocurre cuando queremos expresar un vector de unas a otras coordenadas? Recordemos que los vectores unitarios de cada eje en coordenadas cartesianas son los vectores $\overrightarrow{u_1} = (1,0)$ y $\overrightarrow{u_2} = (0,1)$, que normalmente representamos por $\overrightarrow{u_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{u_2} = \vec{j}$. Estos vectores constituyen, como sabemos, una base $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$ ortonormal (con el producto escalar usual). Sin embargo, si estamos trabajando en el sistema de coordenadas polares $(r,\theta)$, tendremos, análogamente, unos vectores unitarios en dichas coordenadas $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_\theta}$, y tal que la base $\{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\}$ también sea ortonormal. Suele tomarse como base que cumple esta condición la dada por

$$\overrightarrow{u_r} = \frac{\partial}{\partial r}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (\cos(\theta),\sin(\theta))$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (-\sin(\theta),\cos(\theta))$$

(se deja al lector que compruebe que, efectivamente ambos vectores son ortogonales y unitarios; en la sección siguiente se verá el cambio a coordenadas cilíndricas -que básicamente es el mismo cambio que a polares- y se verá gráficamente el porqué se toma esta expresión para la base $\{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\}$).

¿Como podemos entonces pasar de un vector en coordenadas cartesianas a polares o viceversa? Lo haremos mediante una matriz de cambio de base, de manera que si $(x,y)$ representan las coordenadas de un vector en cartesianas y $(\alpha,\beta)$ son sus coordenadas en polares, tendremos (por lo ya estudiado en el cambio de base en un espacio vectorial en la asignatura de Matemáticas I) que se verifica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observamos como esta última relación nos permite pasar de un vector expresado en el sistema de coordenadas cartesianas $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$ al sistema de coordenadas polares $\{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\}$:

**Example** *Expresar el vector dado en el sistema de coordenadas cartesianas $\vec{v} = (1,-1) = \vec{i} - \vec{j}$, en el sistema de coordenadas polares:*

*Al ser $\vec{v} = (1,-1) = \left(\sqrt{2}, -\pi/4\right)$, tendremos que, por la relación anterior,*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & \sin(-\pi/4) \\ -\sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

*por lo que*

$$\vec{v} = \alpha\overrightarrow{u_r} + \beta\overrightarrow{u_\theta} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{u_r} + 0\overrightarrow{u_\theta} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{u_r}$$

**Example** *Recíprocamente, si pretendemos expresar el vector dado en el sistema de polares por $\vec{v} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{u_r} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{u_r} + 0\overrightarrow{u_\theta}$ en el sistema de coordenadas cartesianas, aplicamos*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(\theta) \\ \sqrt{2}\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

*de manera que*

$$\vec{v} == x\vec{i} + y\vec{j} = \sqrt{2}\cos(\theta)\vec{i} + \sqrt{2}\sin(\theta)\vec{j}$$

*y si, por ejemplo, consideramos* $\theta = -\frac{\pi}{4}$, *obtenemos*

$$\vec{v} = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} = \vec{i} - \vec{j}$$

*es decir, el recíproco del ejemplo anterior.*

**Remark** *Una extensión de las coordenadas polares son las* ***coordenadas elípticas****, de manera, que para el caso de la elipse de ecuación*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

*el cambio viene dado por*

$$x = a \cdot r\cos(\theta); \qquad y = b \cdot r\sin(\theta)$$

*o recíprocamente*

$$r = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}; \qquad \tan(\theta) = \frac{a}{b}$$

## Sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^3$.

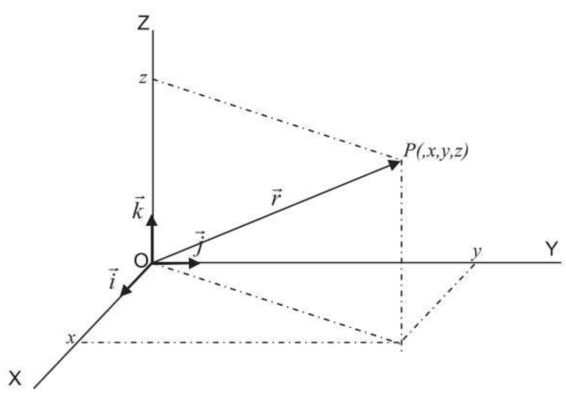
En este caso las variables más utilizadas son las cartesianas, cilíndricas y esféricas. Las recordamos brevemente:

Coordenadas Cartesianas:

Consisten en expresar un punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en la forma

$$(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

siendo $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ los vectores unitarios de los ejes $X$, $Y$ y $Z$, respectivamente.

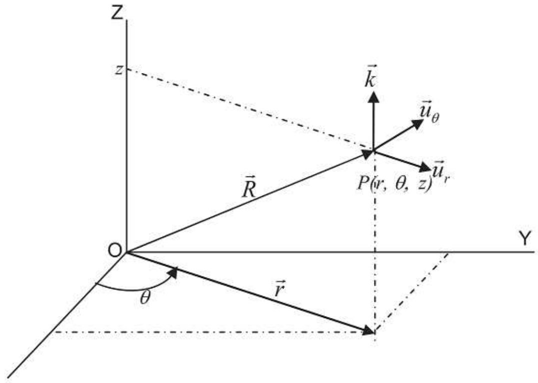



Sistema de coordenadas cartesianas

Coordenadas Cilíndricas:

Consisten en representar cualquier punto del espacio, $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, en la forma $(r,\theta,z)$, siendo $r$ el módulo del vector asociado $(x,y,0)$, $\theta$ el ángulo que dicho vector forma con la parte positiva del eje $X$ y la variable $z$ permanece inalterada; es decir

$$x = r\cos(\theta); \qquad y = r\sin(\theta); \qquad z = z$$

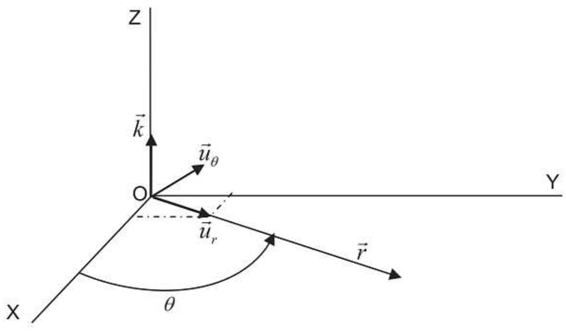



Sistema de coordenadas cilíndricas

**Example** *Si un punto tiene por componentes cartesianas* $P(4,3,2)$*, en coordenadas cilíndricas este punto tendrá por componentes* $P(r,\theta,z) = P(5,\arccos(\frac{4}{5}),2)$*, puesto que* $r = \sqrt{4^2+3^2} = 5$*, mientras que* $\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$.

De igual forma tendremos unos vectores unitarios en estas coordenadas cilíndricas, y que representaremos por $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ y $\overrightarrow{k}$, y tal que la base $\left\{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{k}\right\}$ también sea ortonormal. En la figura anterior observamos que el vector unitario $\overrightarrow{k}$ se aplica en el punto $P$ y es paralelo al eje $Z$; el vector unitario $\overrightarrow{u_r}$ se aplica en $P$ y es paralelo al vector $\overrightarrow{r}$ dibujado en el plano $XY$, y que viene determinado por la proyección de $P$ sobre el citado plano; y el vector unitario $\overrightarrow{u_\theta}$ se aplica en $P$ y es perpendicular a los otros dos, verificando $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\theta}$. De esta forma, el vector de posición de un punto $P$ viene determinado por $\overrightarrow{R} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{k}$, no quedando univocamente determinado.

Vamos a ver como podemos relacionar los vectores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_\theta}$ con los unitarios $\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{j}$, pues el unitario $\overrightarrow{k}$ coincide en ambos sistemas: Trasladando $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_\theta}$ al plano $XY$ resulta la figura siguiente:




Relación entre vectores unitarios

Observamos entonces que

$$\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{u_\theta} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{j} = -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k}$$

Esta relación se puede expresar fácilmente mediante una igualdad matricial, de manera que para pasar un vector de coordenadas cartesianas a cilíndricas o viceversa lo haremos mediante una matriz de cambio de base: Así, si $(x, y, z)$ representan las coordenadas de un vector en cartesianas y $(\alpha, \beta, \gamma)$ son sus coordenadas en la base de coordenadas cilíndricas $\left\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k}\right\}$, tendremos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

que nos permite pasar del sistema de coordenadas cilíndricas al sistema de cartesianas, mientras que el cambio inverso (de cartesianas a cilíndricas) vendrá dado por

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**Example** *Expresar el vector* $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ *en el sistemas de coordenadas cilíndricas* $\left\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k}\right\}$ :

*Se tiene que* $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, *mientras que* $\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$ *y* $\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}$. *De esta forma las nuevas coordenadas serán las dadas por*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

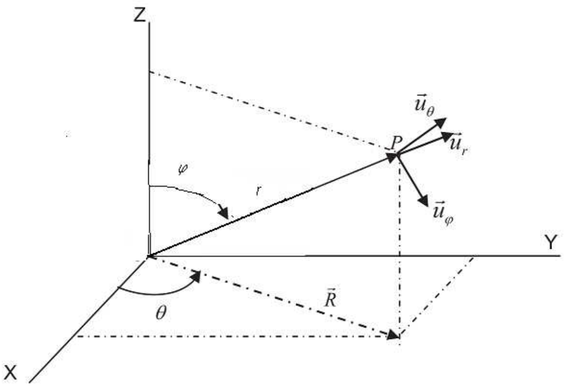
$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

*es decir*

$$\vec{v} = 5\overrightarrow{u_r} + 0\overrightarrow{u_\theta} + 2\vec{k} = 5\overrightarrow{u_r} + 2\vec{k}$$

Coordenadas Esféricas:

Consisten en representar cualquier punto del espacio, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, en la forma $(r,\theta,\varphi)$, siendo $r$ el módulo del vector $(x,y,z)$, y $\theta,\varphi$ dados por la gráfica siguiente




Coordenadas esféricas

es decir,

$$\cos(\varphi) = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos(\varphi)$$
$$\sin(\varphi) = \frac{p}{r} \Rightarrow p = r\sin(\varphi)$$
$$\cos(\theta) = \frac{x}{p} \Rightarrow x = p\cos(\theta)$$
$$\sin(\theta) = \frac{y}{p} \Rightarrow y = p\sin(\theta)$$

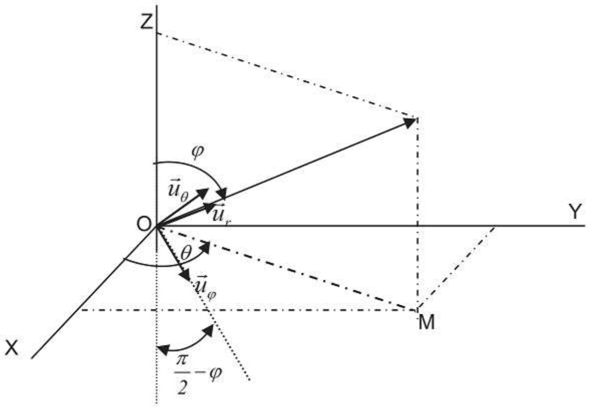
donde por $p$ hemos denotado a la distancia del vector proyección de $(x,y,z)$ sobre el plano $XY$ (es decir, el módulo del vector $\vec{R}$). De esta forma se tiene que la relación entre estas coordenadas viene dada por

$$\begin{cases} x = r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases}$$

con $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ .

De igual forma, también podemos relacionar los vectores unitarios en cartesianas $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ con unos vectores unitarios en coordenadas esféricas, y que representaremos por $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ y $\overrightarrow{u_\varphi}$, de manera que la base $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\}$ también sea ortonormal:

A partir de la figura




Relación entre vectores unitarios

se llega a

$$\overrightarrow{u_r} = \sin(\varphi)\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\varphi)\sin(\theta)\overrightarrow{j} + \cos(\varphi)\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta)\overrightarrow{i}\cos(\theta)\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{u_\varphi} = \cos(\varphi)\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\varphi)\sin(\theta)\overrightarrow{j} - \sin(\varphi)\overrightarrow{k}$$

¿Como podemos entonces pasar de un vector en coordenadas cartesianas a esféricas o viceversa? Lo haremos mediante una matriz de cambio de base, de manera que si $(x,y,z)$ representan las coordenadas de un vector en cartesianas, es decir en la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$, y $(\alpha,\beta,\gamma)$ son sus coordenadas en la base $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\}$, tendremos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

o al revés

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

de donde operando resulta

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**Example** *Expresar el vector* $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ *en el sistemas de coordenadas esféricas* $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\}$ :

*Se tiene que*

$$r = \sqrt{4^2+3^2+2^2} = \sqrt{29}; \qquad p = \left|\overrightarrow{R}\right| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

$$\cos(\theta) = \frac{4}{5};\ \sin(\theta) = \frac{3}{5};\ \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{29}};\ \sin(\varphi) = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

*de manera que*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{29}}\frac{4}{5} & \frac{5}{\sqrt{29}}\frac{3}{5} & \frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{29}}\frac{4}{5} & \frac{2}{\sqrt{29}}\frac{3}{5} & -\frac{5}{\sqrt{29}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{29} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*por lo que*

$$\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} = \sqrt{29}\,\overrightarrow{u_r} + 0\overrightarrow{u_\theta} + 0\overrightarrow{u_\varphi} = \sqrt{29}\,\overrightarrow{u_r}$$

# Campos escalares y vectoriales. Operadores diferenciales.

## Definiciones.

En esta parte del tema vamos a considerar el concepto de campo, tanto escalar como vectorial, así como de las diversas maneras de transformar uno en otro. Pasamos directamente a ver las definiciones:

**Definition** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (si $\Omega$ fuese un conjunto en el plano supondríamos entonces siempre que $z = 0$). Se llama **campo escalar** a toda función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, mientras que un campo vectorial es toda función $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$. En lo que resta de tema, intentaremos representar (para que no haya lugar a dudas) a las funciones escalares por $f(x,y,z)$, mientras que a los campos vectoriales los denotaremos por $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z)$.*

**Example** *Conocemos de la Física ejemplos de estos campos. Así, el campo gravitatorio o el campo eléctrico son campos vectoriales dados, respectivamente por*

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = -G\frac{mM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

*y*

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(x,y,z) = -K\frac{qQ}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

*mientras que las funciones potencial gravitatorio y eléctrico de estos campos son campos escalares dados por*

$$f(x,y,z) = G\frac{mM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

*y*

$$e(x,y,z) = K\frac{qQ}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

**Example** *(Cambios de coordenadas en campos escalares) Dados los siguientes campos escalres expresados en coordenadas cartesianas o polares, expresarlos en el otro tipo de coordenadas:*

*a)* $f(x,y) = x^2 + y^2$*: Este campo viene en cartesianas, por lo que se expresa en polares sin más que realizar la correspondiente sustitución. Así obtenemos*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$$

*por lo que el campo en polares será*

$$f(r,\theta) = r^2$$

*b)* $g(x,y) = x^2\cos y + \log(x+y)$ *: También viene dado en cartesianas, por lo que para pasar a polares hacemos*

$$g(x,y) = x^2\cos y + \log(x+y) = (r\cos\theta)^2\cos(r\sin\theta) + \log(r\cos\theta + r\sin\theta)$$

*de manera que*

$$g(r,\theta) = (r\cos\theta)^2\cos(r\sin\theta) + \log(r\cos\theta + r\sin\theta)$$

*c)* $h(r,\theta) = r^2\cos\theta$ *: En este caso el campo está en polares, por lo que si lo pasamos a cartesianas tendremos*

$$h(r,\theta) = r^2\cos\theta = r \cdot r\cos\theta = \sqrt{x^2+y^2}\,x$$

*es decir*

$$h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,x$$

Más complicados son los cambios cuando se trata de campos vectoriales:

**Example** *Dado el campo vectorial en coordenadas cartesianas*

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (-y,x) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

*expresarlo en polares:*

*Tenemos que sustituir sus componentes por sus expresiones en polares, pero también hemos de sustituir los vectores directores* $\vec{i}$ *y* $\vec{j}$ *por sus expresiones en función de los vectores directores de la nueva base* $\{\vec{u_r}, \vec{u_\theta}\}$*. Por tanto, y como el cambio entre las coordenadas se puede expresar a través de la matriz de cambio vista anteriormente, y que viene dada por*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

*(recordamos que por* $(x,y)$ *representamos las coordenadas en la base* $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$*, mientras que* $(\alpha,\beta)$ *son las coordenadas en la base* $\{\vec{u_r}, \vec{u_\theta}\}$*) o, equivalentemente*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

*Así, obtendremos*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

*es decir, la expresión del campo en la base $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\}$ de polares viene dada por*

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(r,\theta) = 0\overrightarrow{u_r} + r\overrightarrow{u_\theta} = r\overrightarrow{u_\theta}$$

**Exercise** *Idem para el campo dado por*

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = (x^2 + 2y)\overrightarrow{i} + \sin(xy)\overrightarrow{j}$$

**Example** *Pasar a cartesianas el campo vectorial que, en la base $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\}$ de coordenadas polares, viene dado por*

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(r,\theta) = (1, r^2) = \overrightarrow{u_r} + r^2\cos(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$$

*En este caso hemos de aplicar*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r^2\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - r^2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) + r^2\cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

*y puesto que* $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *obtendremos*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ x^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

*es decir*

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = \left(-xy + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\overrightarrow{i} + \left(x^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\overrightarrow{j}$$

**Exercise** *Comprobar que si el campo obtenido en el ejemplo anterior se expresa en coordenadas polares se obtiene el campo original $\overrightarrow{\mathbf{F}}(r,\theta) = \overrightarrow{u_r} + r^2\cos(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$.*

Lo mismo podemos hacer si se trata de campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ :

**Example** *Pasar a cilíndricas y esféricas el campo vectorial*

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\overrightarrow{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\overrightarrow{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\overrightarrow{k}$$

*Para pasarlo a cilíndricas solo hemos de aplicar*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ \frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ 0 \\ \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \end{pmatrix}$$

*es decir*

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\vec{e_r} + 0 \cdot \vec{e_\theta} + \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\vec{k}$$

*Para el cambio a esféricas aplicaremos*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{r\sin(\varphi)\cos(\theta)}{r} \\ \frac{r\sin(\varphi)\sin(\theta)}{r} \\ \frac{r\cos(\varphi)}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*obteniendo entonces*

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,\varphi) = 1 \cdot \vec{e_r} + 0 \cdot \vec{e_\theta} + 0 \cdot \vec{e_\varphi} = \vec{e_r}$$

**Exercise** *Comprobar que si los campos obtenidos en el ejemplo anterior (en cilíndricas y esféricas) se expresan en coordenadas cartesianas se obtiene el campo original* $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)$.

Vamos a estudiar qué tipo de operaciones podemos hacer entre campos escalares y vectoriales. En lo que resta de tema, y salvo que se diga lo contrario, supondremos que todos los campos o funciones son lo suficientemente derivables.

## Operadores diferenciales.

**Definition** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$. Se define el* ***gradiente*** *de $f$ como el campo vectorial, que representamos por $\overrightarrow{grad(f)}$ o por $\overrightarrow{\nabla} f$, dado por*

$$\overrightarrow{grad(f)} \equiv \overrightarrow{\nabla} f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right)$$

**Example** *Hallar $\overrightarrow{\nabla} f$, siendo $f(x,y,z) = xye^x + \log(z)$.*

**Remark** *(Interpretación geométrica del gradiente) El vector $\overrightarrow{\nabla} f$ en un punto nos da la máxima rapidez de variación del campo que podemos conseguir al desplazarnos desde ese punto; esta máxima variación se produce en la dirección del vector gradiente, más concretamente, el máximo aumento se consigue en el sentido del vector gradiente y la máxima disminución en sentido opuesto. Para ello, hemos de recordar (según lo establecido en la asignatura de Matemáticas I) que para un vector unitario $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ se tiene que la derivada direccional de $f$ en un punto $\mathbf{a}$ y en la dirección dada por el vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ (y que nos mide la rapidez de la variación de $f$ al desplazarnos desde el punto $\mathbf{a}$ en la dirección del vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$)*

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} f(\mathbf{a}) = \overrightarrow{\nabla} f(\mathbf{a}) \bullet \overrightarrow{\mathbf{v}}$$

*y que tiene valor máximo cuando $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ es paralelo a $\overrightarrow{\nabla} f$, es decir, si $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \frac{\overrightarrow{\nabla} f(\mathbf{a})}{\left\| \overrightarrow{\nabla} f(\mathbf{a}) \right\|}$, y para este vector se obtiene que*

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} f(\mathbf{a}) = \left\| \overrightarrow{\nabla} f(\mathbf{a}) \right\|$$

**Definition** *Un campo vectorial $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ se dice* ***conservativo*** *si existe un campo escalar $f$ de manera que $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{\mathbf{F}}$. A $f$ se le llama* ***función potencia****l.*

**Definition** *Dado un campo vectorial $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$, se define la* ***divergencia*** *de $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ como el campo escalar dado por*

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\mathbf{F}}\right) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z)\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)$$

**Example** *Hallar $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\mathbf{F}}\right)$, siendo $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = (e^{xyz}, \cos(xy), y^2)$.*

**Remark** *La divergencia de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente en una superficie que encierra un elemento de volumen $dV$. Si el volumen elegido solamente contiene fuentes o sumideros de un campo, entonces su divergencia es siempre distinta de cero.*

*La divergencia de un campo vectorial en un punto es un campo escalar, y que también se define como el flujo del campo vectorial por unidad de volumen conforme el volumen alrededor del punto tiende a cero.*

*Por tanto, la divergencia de un campo es un valor escalar con signo. Si este signo es positivo, quiere decir que el campo emana hacia el exterior de dicho punto y, por tanto, es una **fuente** o **manantial**. Si el signo es negativo, el campo converge hacia un punto del interior del volumen, por lo que constituiría un **sumidero**. Si la divergencia fuese cero, el campo neto (diferencia entre las líneas entrantes y salientes) sería nulo.*

*Los campos cuya divergencia es cero se denominan campos **solenoidales**, y se caracterizan porque sus líneas de campo son cerradas sobre sí mismas, es decir, no tienen extremos donde nacen o mueren. De tener dichos extremos, el flujo neto alrededor de uno de ellos no sería nulo, lo cual denotaría la existencia de una fuente o sumidero del campo.*

**Definition** *Dado un campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^{(1)}$, se define el **rotacional** de $\vec{\mathbf{F}}$ como el campo vectorial dado por*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)}(x,y,z) = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

*que puede deducirse a través de la regla nemotécnica*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x,y,z) & F_2(x,y,z) & F_3(x,y,z) \end{vmatrix}$$

*Por esta razón, suele ponerse*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)}(x,y,z) \equiv \nabla \times \vec{\mathbf{F}}$$

*donde $\nabla$ indica el operador **nabla**, que viene dado por*

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

**Example** *Calcular el rotacional del campo vectorial del último ejemplo anterior.*

**Remark** *El rotacional de un campo vectorial nos da información sobre la circulación del campo por unidad de área en cada punto de la superficie.*

## Teoremas básicos.

Vamos a enumerar en este apartado algunos resultados que relacionan los conceptos anteriores:

**Proposition** *Dado el campo escalar $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^{(2)}$, se verifica que*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\left(\vec{\nabla} f\right)}(x,y,z) = (0,0,0)$$

*es decir, se verifica que el rotacional de un gradiente siempre es el vector nulo.*

**Proposition** *Dado el campo vectorial* $\vec{\mathbf{F}} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de clase* $\mathcal{C}^{(2)}$*, se verifica que*

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)}(x,y,z)\right) = 0$$

*es decir, que la divergencia de un rotacional siempre da el valor* 0.

**Proposition** *Dado el campo vectorial* $\vec{\mathbf{F}} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de clase* $\mathcal{C}^{(1)}$ *definido sobre un conjunto convexo* $\Omega$ *(conjunto que tiene la propiedad de que dados dos puntos cualesquiera suyos, el segmento que une ambos puntos está íntegramente en* $\Omega$*), se verifica que existe una función potencial f de* $\vec{\mathbf{F}}$ *(es decir, el campo* $\vec{\mathbf{F}}$ *es conservativo) si y sólo si* $\overrightarrow{\mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)}(x,y,z) = (0,0,0)$.

**Exercise** *Dado el campo vectorial* $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$*, probar que este campo es conservativo y hallar su función potencial.*

**Remark** *Más propiedades relacionadas con estos operadores diferenciales pueden verse enunciadas en la sección de Ejercicios propuestos que se incluye a continuación (en concreto, ejercicios propuestos 1 y 2).*

# Ejercicios resueltos.

1. (Febrero 2012) *Dado el campo vectorial*

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (e^x \sin(y) - y, e^x \cos(y) - x - 2)$$

*calcular su divergencia en coordenadas polares.*

**Solución**: Se tiene que

$$\mathrm{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = e^x \sin(y) - e^x \sin(y) = 0$$

por lo que en coordenadas polares también será 0.

2. (Junio 2012) *Dado el campo vectorial*

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = xy\,\vec{\mathbf{i}} + (y + \cos(z^2))\,\vec{\mathbf{k}} + \nabla\Phi(x,y,z)$$

*donde*

$$\Phi(x,y,z) = \log(2 + x^2\cos(y-z)) + \sin\left(e^{x-y+z^2}\right) + \pi x\sqrt{y^2 + 4z^2}$$

*calcular la expresión del rotacional de* $\vec{\mathbf{F}}$ *en coordenadas cilíndricas.*

**Solución**: El campo $\vec{\mathbf{F}}$ se puede escribir como

$$\vec{\mathbf{F}} = (xy, 0, y + \cos(z^2)) + \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) = \left( xy + \frac{\partial\Phi}{\partial x},\ \frac{\partial\Phi}{\partial y},\ y + \cos(z^2) + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)$$

por lo que su rotacional será

$$\mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy + \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & y + \cos(z^2) + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{vmatrix} =\ldots= (1, 0, -x)$$

por lo que en coordenadas cilíndricas, será

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ -r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

es decir

$$\mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \cos(\theta)\vec{\mathbf{u}_r} - \sin(\theta)\vec{\mathbf{u}_\theta} - r\cos(\theta)\vec{\mathbf{k}}$$

NOTA: Otra forma de realizar más rápido este mismo apartado es tener en cuenta que

$$\mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \mathrm{rot}\left(xy\vec{\mathbf{i}} + (y + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}} + \nabla\Phi\right) = \mathrm{rot}\left(xy\vec{\mathbf{i}} + (y + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}\right) + \mathrm{rot}(\nabla\Phi)$$

y como conocemos que $\mathrm{rot}(\nabla\Phi) = \vec{0}$, entonces

$$\mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \mathrm{rot}\left(xy\vec{\mathbf{i}} + (y + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}\right) =\ldots= (1, 0, -r\cos\theta)$$

y solo nos quedaría expresar los vectores unitarios $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ en función de $\vec{\mathbf{u}_r}$, $\vec{\mathbf{u}_\theta}$, $\vec{\mathbf{k}}$.

3. (Septiembre 2012) *Dado el campo vectorial escrito en polares*

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta) = \cos(\theta)\vec{\mathbf{u}_r} + r\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{u}_\theta}$$

*donde* $\left\{\vec{\mathbf{u}_r}, \vec{\mathbf{u}_\theta}\right\}$ *es la base de vectores móviles de* $R^2$ *asociada a dichas coordenadas:*

3.a *Escribe el campo vectorial en coordenadas cartesianas.*

3.b *¿Es el campo* $\vec{\mathbf{F}}$ *conservativo? ¿Por qué?*

**Solución**:

(3.a) Para pasar a coordenadas cartesianas, hay que aplicar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ r\sin^2(\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - r\sin^3(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) + r\cos(\theta)\sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + r\sin(\theta))\cos^2(\theta) - r\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) + r\cos(\theta)\sin^2(\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1 + y)\cos^2(\theta) - y \\ (1 + r\sin(\theta))\cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2}(1 + y) - y \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(1 + y) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -y + \frac{x+xy}{x^2+y^2} \\ \frac{xy+xy^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

ya que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Por todo lo anterior, el campo se transforma en

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = \left(-y + \frac{x + xy}{x^2 + y^2}\right)\vec{\mathbf{i}} + \frac{xy + xy^2}{x^2 + y^2}\vec{\mathbf{j}}$$

(3.b) Puesto que su rotacional es

$$\mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(-y + \frac{x+xy}{x^2+y^2}\right) & \frac{xy+xy^2}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \neq 0)$$

el campo no es conservativo.

4. (Febrero 2013) *Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas*

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\vec{\mathbf{e}_r} - r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}_\theta} + (r\sin(\theta) + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}$$

*donde* $\left\{\vec{\mathbf{e}_r}, \vec{\mathbf{e}_\theta}, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ *es la base de vectores móviles de* $\mathbb{R}^3$ *asociada a dichas coordenadas, escribe el campo vectorial* $\vec{\mathbf{F}}$ *en coordenadas cartesianas.*

**Solución**: Hemos de aplicar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) \\ -r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) \\ (r\sin(\theta) + \cos(z^2)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ r\sin\theta + \cos z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ y + \cos z^2 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = xy\,\vec{\mathbf{i}} + 0\,\vec{\mathbf{j}} + (y + \cos(z^2))\,\vec{\mathbf{k}}$$

5. (Junio 2013) *Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas*

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\vec{\mathbf{e}_r} - r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}_\theta} + (r\sin(\theta) + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}$$

*donde* $\left\{\vec{\mathbf{e}_r},\vec{\mathbf{e}_\theta},\vec{\mathbf{k}}\right\}$ *es la base de vectores móviles de* $\mathbb{R}^3$ *asociada a dichas coordenadas, escribe el campo escalar* $\operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ *en coordenadas cartesianas.*

**Solución**: En el examen de Febrero 2013 (ejercicio resuelto anterior) está pasado el campo $\vec{\mathbf{F}}$ a coordenadas cartesianas, obteniéndose

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (xy, 0, y + \cos(z^2))$$

Por tanto

$$\operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = y + 0 - 2z\sin(z^2)$$

6. (Septiembre 2013) *Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas*

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = (r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + z^2\sin(\theta))\vec{\mathbf{e}_r} - (r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) - z^2\cos(\theta))\vec{\mathbf{e}_\theta} + r\cos(z)\vec{\mathbf{k}}$$

*donde* $\left\{\vec{\mathbf{e}_r},\vec{\mathbf{e}_\theta},\vec{\mathbf{k}}\right\}$ *es la base de vectores móviles de* $\mathbb{R}^3$ *asociada a dichas coordenadas, escribe el campo vectorial* $\operatorname{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ *en coordenadas cartesianas.*

**Solución**: Si pasamos el campo $\vec{\mathbf{F}}$ a coordenadas cartesianas, obtendremos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + z^2\sin(\theta)) \\ -(r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) - z^2\cos(\theta)) \\ r\cos(z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r^2\sin\theta\cos\theta \\ z^2 \\ r\cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ z^2 \\ \sqrt{x^2+y^2}\,\cos z \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = xy\,\vec{i} + z^2\vec{j} + \sqrt{x^2+y^2}\,\cos z\,\vec{k}$$

Por tanto

$$\operatorname{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & z^2 & \sqrt{x^2+y^2}\,\cos z \end{vmatrix} = \left(\frac{y\cos z}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2z, -\frac{x\cos z}{\sqrt{x^2+y^2}}, -x\right)$$

# Ejercicios propuestos.

En los siguientes ejercicios, la expresión $< \vec{u},\vec{v} >$ representa el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, mientras que $f \cdot g$ representa el producto de dos funciones escalares (es decir, de dos números) y $f \cdot \vec{\mathbf{F}}$ el producto de un número por un vector.

1. Sean $f$ y $g$ campos escalares. Probar que se verifican las relaciones:
   a. $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$
   b. $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$
   c. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}$

2. Sea $f$ un campo escalar y $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{G}}$ campos vectoriales. Probar que se verifican las siguientes relaciones:
   a. $\mathrm{div}(\alpha\vec{\mathbf{F}} + \beta\vec{\mathbf{G}}) = \alpha \cdot \mathrm{div}(\vec{\mathbf{F}}) + \beta \cdot \mathrm{div}(\vec{\mathbf{G}})$
   b. $\mathrm{rot}(\alpha\vec{\mathbf{F}} + \beta\vec{\mathbf{G}}) = \alpha \cdot \mathrm{rot}(\vec{\mathbf{F}}) + \beta \cdot \mathrm{rot}(\vec{\mathbf{G}})$
   c. $\mathrm{div}(f \cdot \vec{\mathbf{F}}) = f \cdot \mathrm{div}(\vec{\mathbf{F}}) + < \vec{\nabla f}, \vec{\mathbf{F}} >$
   d. $\mathrm{rot}(f \cdot \vec{\mathbf{F}}) = f \cdot \mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) + \vec{\nabla f} \times \vec{\mathbf{F}}$
   e. $\mathrm{div}\left(\vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{G}}\right) = < \vec{\mathbf{G}}, \mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{F}}\right) > - < \vec{\mathbf{F}}, \mathrm{rot}\left(\vec{\mathbf{G}}\right) >$

3. Dado el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (x\sin(y), -x)$, determina su expresión en coordenadas polares, es decir, encuentra $F_r$ y $F_\theta$ tal que
$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta) = F_r\vec{u_r} + F_\theta\vec{u_\theta}$$

4. Dado el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (y - x, \sin(x^2 + y^2))$ :
   a. Encuentra su expresión en coordenadas polares.
   b. Determina su gradiente y su divergencia en coordenadas cartesianas y polares.

5. Calcula la expresión en coordenadas cilíndricas del siguiente campo vectorial dado en cartesianas:
$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (xy, x^2 + y^2 + z, \cos(z))$$

6. Dado el campo escalar $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ :
   a. Encuentra su expresión en coordenadas polares.
   b. Calcula su gradiente y su laplaciano en coordenadas polares. (Nota: El **laplaciano** de un campo escalar se define como la divergencia de su gradiente, es decir, $\mathrm{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Por tal motivo, suele representarse como el operador $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, y al laplaciano de una función $f$ se le representa por $\nabla^2 f$).

7. Determina la expresión en coordenadas cartesianas del siguiente campo dado en cilíndricas:
$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = (r + z)\vec{u_r} + r^2\cos(r)\vec{u_\theta} + r^3\cos(\theta)\vec{k}$$

8. Dado un campo escalar $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$, comprueba que el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = u \cdot \vec{\nabla u}$ es **irrotacional**, es decir, que $\mathrm{rot}(u \cdot \vec{\nabla u}) = \vec{\mathbf{0}}$.

9. Un campo vectorial $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ se dice que es **incompresible** si su divergencia es idénticamente nula, es decir si $\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathbf{F}}) = 0$. ¿Existe algún campo bidimensional $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ incompresible y de forma que $F_1(x,y) = xy$? Razona la respuesta.

10. Si $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ verificando $\nabla^2 u = 0$ (donde $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$; esta clase de campos se denominan **armónicos**), comprueba que el campo vectorial gradiente asociado $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\nabla u}$ es irrotacional e incompresible.

11. Calcula la expresión en coordenadas cilíndricas de la divergencia del campo vectorial

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = x^2 y \overrightarrow{i} + \sin(x + z^2)\overrightarrow{j} + \operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\mathbf{G}}\right)$$

siendo

$$\overrightarrow{\mathbf{G}}(x,y,z) = \sin(y + z^2)\overrightarrow{i} + (x^2 y - \pi z)\overrightarrow{j} + \left(3x - 2yze^{x^2-1}\right)\overrightarrow{k}$$

12. Sea el campo vectorial

$$\overrightarrow{\mathbf{G}}(x,y,z) = x^2 y \overrightarrow{i} + z\overrightarrow{j} + \nabla\phi(x,y,z)$$

con

$$\nabla\phi(x,y,z) = \cos(x + y\log(z+1)) - y^3 e^{xy} + \frac{x - \pi y}{\sqrt{1 + x^2 + z^2}}$$

Calcula la expresión en coordenadas cilíndricas del campo $\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\mathbf{G}}\right)$.

13. Dado el campo escalar

$$f(x,y,z) = \log(1 + x^2 + y^2) + xz$$

calcula la expresión de su gradiente en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

14. Comprueba que si $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{G}}$ son dos campos irrotacionales, entonces $\overrightarrow{\mathbf{F}} \times \overrightarrow{\mathbf{G}}$ es incompresible.