Profesor: **Roque Molina Legaz**

Tema 1.5: EL TEOREMA DE LOS RESIDUOS. APLICACIONES

PROGRAMA DETALLADO:

Introducción.
Puntos singulares aislados de una función.
Residuos: **Definición y cálculo**.
El teorema de los residuos.
Aplicación al cálculo de ciertas integrales reales.
Ejercicios resueltos.
Ejercicios propuestos.

Introducción.

Recordemos que el teorema de Cauchy-Goursat afirma que si una función es analítica en todos los puntos de un contorno cerrado simple γ y en todos los puntos de su interior, el valor de la integral de la función a lo largo de ese contorno es cero. Sin embargo, si la función no es analítica en un número finito de puntos interiores a γ, existirá, como veremos en este tema, un número específico, llamado **residuo**, con que cada uno de esos puntos contribuirá al valor de la integral.

Así, en este tema vamos a desarrollar un resultado de los más importantes en el Análisis Complejo, y con diferentes aplicaciones en ciertas áreas de Matemática Aplicada: el teorema de los residuos.

Puntos singulares aislados de una función.

Comenzaremos el tema recordando una definición ya establecida en el tema de funciones analíticas:

Definition *Se dice que un punto z_0 es un **punto singular aislado** de la función $f(z)$ si existe una bola centrada en z_0, $B(z_0,r)$, tal que f es analítica en dicha bola salvo en el punto $z = z_0$.*

Example *Determinar las singularidades de las funciones*

$$f(z) = \frac{1}{z}; \qquad g(z) = \frac{z-2}{2z^3(z^2+2)}; \qquad h(z) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$$

Según sea el comportamiento de la función $f(z)$ cuando z tiende a z_0, pueden distinguirse tres tipos de puntos singulares aislados: *punto singular evitable, polo* y *punto singular esencial*.

Definition *Sea z_0 un punto singular aislado de f. Entonces:*

*a) Si f se puede convertir en analítica en toda la bola $B(z_0,r)$, asignándole a f un valor adecuado en z_0, se dice que z_0 es un **punto singular evitable** de f.*

*b) El punto z_0 es un **polo de orden** n de f, si f se puede expresar en la forma*

$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$, con $n \geq 1$, y siendo g una función analítica en un entorno de z_0 y tal que $g(z_0) \neq 0$. Cuando $n = 1$ se dice que z_0 es un ***polo simple****.*

c) A una singularidad aislada z_0 de una función analítica que no sea evitable ni polo se le llama ***singularidad esencial****.*

Remark *Una forma equivalente de dar la definición anterior sería:*

** Si existe y es finito $\lim_{z \to z_0} f(z)$, la singularidad z_0 es evitable.*

** Si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ es infinito, la singularidad es un polo.*

** Si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe, la singularidad es esencial.*

Una consecuencia inmediata es que los ceros y los polos de orden n se encuentran estrechamente vinculados, ya que se verifica el siguiente resultado:

Proposition *Sea f analítica en $B(z_0, r)$. Entonces, f tiene un cero de orden n en z_0 sí y sólo sí la función $\frac{1}{f}$ tiene un polo de orden n en z_0.*

Los tipos de puntos singulares aislados están estrechamente ligados con el carácter del desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en $B^*(z_0, r)$:

Theorem *Sea z_0 un punto singular aislado de una función analítica f. Sabemos que en $B^*(z_0, r)$ existe el desarrollo de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

Entonces:

a) Si es $b_n = 0\ \forall n \geq 1$, la función $f(z)$ tiene en z_0 una singularidad evitable, y la serie de Laurent coincide con la serie de Taylor. Y recíprocamente.

b) Si solamente hay un número finito de $b_n \neq 0$, entonces f posee un polo en z_0. Si es $b_n \neq 0$ y $b_{n+1} = b_{n+2} = .. = 0$, el polo es de orden n. Y recíprocamente.

c) Si hay un número infinito de $b_n \neq 0$, entonces f posee una singularidad esencial en z_0. Y recíprocamente.

Example *La función*

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

tiene a $z_0 = 0$ como punto singular aislado. Puesto que se verifica que

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

se deduce que $z_0 = 0$ es una singularidad evitable.

Además, si realizamos su desarrollo de Laurent en un entorno de este punto, es decir, como potencias de z, resulta que éste solo contendrá (en virtud del apartado (a) del teorema anterior) la parte regular, como se comprueba fácilmente:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots - 1\right) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots$$

Si hubiésemos obtenido directamente este desarrollo, como el mismo solo tiene parte regular, también se deduce que $z_0 = 0$ *es una singularidad evitable (por el recíproco del apartado (a) del teorema anterior).*

Example *La función*

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^5}$$

tiene a $z_0 = 0$ *como punto singular aislado, que además es un polo, ya que*

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos(z)}{z^5} = \infty$$

Si obtenemos su desarrollo de Laurent en este punto singular, resulta

$$\frac{1 - \cos(z)}{z^5} = \frac{1}{z^5}\left(1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right)\right) = \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{4!z} + \frac{z}{6!} - \frac{z^3}{8!} + \ldots$$

y por lo que al tener el mismo un número finito de términos con potencias negativas, nuevamente confirmamos que el punto $z_0 = 0$ *es un polo, y que además es de orden* 3 *(al ser ésta la mayor potencia de z que aparece dividiendo; hemos aplicado el apartado (b) del teorema anterior).*

Example *La función*

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

tiene a $z_0 = 0$ *como punto singular aislado.*

Al verificarse que

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

tendremos que

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^3}{3!} + \ldots = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \ldots$$

es el desarrollo de Laurent para la función dada.

De este desarrollo, en virtud del apartado (c) anterior, se deduce que $z_0 = 0$ *es una singularidad esencial.*

Remark *Es posible estudiar el comportamiento de una función* $f(z)$ *en el punto del infinito: Para ello, solo se ha de estudiar el comportamiento de la función* $f(1/z)$ *en el punto* $z = 0$ *(Así, f será continua, derivable o diferenciable en* $z = \infty$*, si* $f(1/z)$ *lo es en* $z = 0$; *si* $f(z)$ *fuese analítica en* $R < |z| < \infty$*, haciendo* $z = 0$ *en* $f(1/z)$ *se observa que* $z = \infty$ *es un punto singular aislado, que podrá ser singularidad evitable, polo o singularidad esencial).*

Residuos: Definición y cálculo.

Ya hemos establecido que si z_0 es un punto singular aislado de f, existirá $r > 0$ tal que f es analítica en $B^*(z_0,r)$. Así, $\forall z \in B^*(z_0,r)$, f admite un desarrollo de Laurent de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. En particular, el coeficiente para $n=-1$ es c_{-1}, cuya expresión hemos visto en el tema anterior que viene dada por

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$$

siendo γ cualquier circunferencia de centro z_0 contenida en $B^*(z_0,r)$ y recorrida en sentido positivo.

Definition *A este coeficiente c_{-1} se le llamará* ***residuo de f en*** *z_0 y se designará por $Resf(z_0)$, por $Res(f,z_0)$, o simplemente por B cuando z_0 y f estén claramente indicados.*

Puesto que $Resf(z_0)$ es el coeficiente del término $\frac{1}{z-z_0}$ en el desarrollo de Laurent de f en z_0, es interesante ver como se puede obtener el mismo sin tener que utilizar la expresión anterior para c_{-1} e incluso sin tener que calcular de forma directa los desarrollos de Laurent (ya que en muchos casos no se podrá recurrir a desarrollos conocidos y no tendremos más remedio que aplicar el teorema de Laurent establecido en el tema anterior). Así pues, destacamos que se verifican los siguientes resultados:

Proposition *Sea z_0 un punto singular aislado de una función f. Entonces:*

a) Si z_0 es una singularidad evitable, se verifica trivialmente que $Resf(z_0)=0$.

b) Si z_0 es un polo simple, entonces

$$Resf(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

c) Si z_0 es un polo de orden n, se tiene que

$$Resf(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$

d) Si z_0 es una singularidad esencial, no hay más remedio que utilizar el desarrollo de Laurent de f en z_0 para calcular $Resf(z_0)$; es decir, solamente en este caso se calculará de forma obligatoria el residuo a través de la definición.

Como consecuencia de los apartados (a) y (b) anteriores, se verifican los siguientes resultados, que son interesantes de conocer por su gran aplicabilidad:

Corollary *Se verifican:*

a) Sea $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, con p y q analíticas en z_0, $p(z_0)\neq 0$, $q(z_0)=0$ y $q'(z_0)\neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 y el residuo de f en dicho punto viene dado por

$$Resf(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

b) Sea $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, con p y q analíticas en z_0, $p(z_0)\neq 0$, $q(z_0)=q'(z_0)=\ldots=q^{(n-1)}(z_0)=0$, pero $q^{(n)}(z_0)\neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo de orden n en z_0. En particular, si $n=2$, f posee un polo de segundo orden en dicho punto y su residuo viene dado por

$$Resf(z_0) = 2\frac{p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{p(z_0)q'''(z_0)}{q''(z_0)^2}$$

Example *Hallar los puntos singulares aislados de las siguientes funciones, clasificar los mismos y obtener sus residuos:*

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2+2}; \qquad g_1(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}; \qquad h_1(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$$

Example *Idem para:*

$$f_2(z) = \frac{z-1}{z^2+4}; \qquad g_2(z) = \frac{z^3}{(z-2i)^2}; \qquad h_2(z) = \frac{\sinh(z)}{z^3}$$

Example *Idem para:*

$$f_3(z) = \frac{1}{z(e^z-1)}; \qquad g_3(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}; \qquad h_3(z) = \frac{z}{z^4+4}$$

A modo de resumen, se incluye la siguiente tabla con la relación entre los puntos singulares aislados de una función $f(z)$, sus desarrollos de Laurent y el cálculo de los residuos en dichos puntos:

Tipo singularidad en z_0 (definición)	**Desarrollos de Laurent** (como potencias de $z - z_0$)	**Cálculo del residuo en z_0**
Evitable: Si f se puede convertir en analítica en z_0; es decir, si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ es finito	Coincide con su desarrollo de Taylor (es decir, solo tiene parte regular)	$\mathrm{Res} f(z_0) = 0$
Polo: Si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Si te tiene que $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^n f(z)$ es finito, con $f(z_0) \neq 0$, es polo de orden n. Caso $n = 1$, se dice que es polo **simple**	Para polo de orden n : la parte principal del DL tiene cantidad finita de términos con $z - z_0$ dividiendo, siendo $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ la mayor potencia	Siempre se puede hacer a través de su DL (elegimos el coef. del tº $\frac{1}{z-z_0}$), pero suele ser más simple como en $(*)$ o $(**)$
Esencial: Si no es evitable ni es polo; es decir, si no existe $\lim_{z\to z_0} f(z)$	La parte principal del DL contiene ∞ términos (es decir, hay ∞ términos donde $z - z_0$ aparece dividiendo)	Solo se puede hacer a través de su DL (elegimos el coef. del tº $\frac{1}{z-z_0}$)

$(*)$ Si z_0 es un polo simple,

$$Res f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0) f(z)$$

Si z_0 es un polo de orden n,

$$Res f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z - z_0)^n f(z)]$$

$(**)$ Para el caso particular que $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, con p y q analíticas en z_0 :

- Si $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 y el residuo de f en dicho punto viene dado por

$$Res f(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

- Si $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = q'(z_0) = \ldots = q^{(n-1)}(z_0) = 0$, pero $q^{(n)}(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo de orden n en z_0. En particular, si $n = 2$, f posee un polo de segundo orden en dicho punto y su residuo viene dado por

$$Res f(z_0) = 2\frac{p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{p(z_0)q'''(z_0)}{q''(z_0)^2}$$

El teorema de los residuos.

Sabemos que si una función *f* tiene sólo un número finito de puntos singulares interiores a un contorno cerrado simple dado γ, éstos han de ser aislados. El teorema de los residuos será un resultado preciso del hecho de que si además *f* es analítica sobre γ, donde ésta está recorrida en sentido positivo, el valor de la integral de *f* a lo largo de γ es $2\pi i$ veces la suma de los residuos en esos puntos singulares:

Theorem ***(Teorema de los residuos)*** *Sea γ una curva cerrada simple y regular a trozos, y f una función analítica sobre γ y en su interior, salvo en un número finito de singularidades $z_1, z_2, ..., z_n$ interiores a γ. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res f(z_k)$$

Example *Calcular*

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z(z-1)}dz$$

siendo γ el círculo $z = 2$ positivamente orientado.

Remark *Para el caso particular en que la función f del enunciado anterior sea además analítica en todo el plano exterior a γ, resultará a veces más eficiente, sobre todo desde el punto de vista práctico, calcular $\int_\gamma f(z)dz$ hallando un solo residuo de una cierta función relacionada. Concretamente, podremos sustituir la expresión que nos da el teorema de los residuos por*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res\left(\frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

Example *Volver a calcular la misma integral anterior utilizando este último resultado.*

Example *Calcular*

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^5}dz$$

siendo γ el círculo $z = 2$ positivamente orientado.

Aplicación al cálculo de ciertas integrales reales.

Finalizaremos este tema estudiando una aplicación que tiene el teorema de los residuos. En concreto veremos la aplicación al cálculo de ciertas integrales reales:

El teorema de los residuos nos proporciona un método sencillo para calcular algunos tipos de integrales reales sin necesidad de conocer una primitiva de la función integrando.

- Integrales de la forma $\int_0^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x))dx$, donde R es una función racional de $\cos(x)$ y $\sin(x)$: Estas integrales pueden resolverse introduciendo la variable compleja $z = e^{ix}$, de manera que a partir de este cambio de variable se deduce que

$$\cos(x) = \frac{z^2+1}{2z}; \qquad \sin(x) = \frac{z^2-1}{2iz}; \qquad dx = \frac{dz}{iz}$$

mientras que el intervalo $[0, 2\pi]$ se transforma en la circunferencia $|z| = 1$ recorrida en sentido positivo. Teniendo en cuenta todo lo anterior, obtenemos

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x))dx = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$$

y esta última integral la resolvemos por medio del teorema de los residuos.

- Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, con $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, donde P y Q son polinomios de grado n y m respectivamente. Si $Q_m(x) \neq 0$ y $m \geq n+2$, entonces se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum Resf(z)$$

en todos los polos del semiplano superior, es decir, en todos los polos para que la componente imaginaria sea estrictamente positiva.

- Integrales de la forma $\int_0^{+\infty} x^{a-1}f(x)dx,\ 0 < a < 1$: Si f es analítica salvo en un número finito de singularidades z_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, y si no tiene polos en el semieje real positivo y además se verifica que $\lim_{z\to\infty} z^a f(z) = \lim_{z\to 0} z^a f(z) = 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}f(x)dx = -\frac{\pi e^{-\pi a i}}{\sin a\pi}\sum_{k=1}^{m} ResF(z_k)$$

siendo $F(z) = z^{a-1}f(z)$.

- Integrales de la forma $\int_0^{+\infty} f(x)\log(x)dx$: Si f es analítica salvo en un número finito de singularidades z_k, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, y no tiene polos en el semieje real positivo y $\lim_{z\to\infty} f(z)\log^2(z) = \lim_{z\to 0} f(z)\log^2(z) = 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} f(x)\log(x)dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{m} ResF(z_k)\right\}$$

siendo $F(z) = f(z)\log^2(z)$. Nota: Re{ } indica la parte real de lo que va entre llaves.

- Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}f(x)dx$: Si f es analítica salvo en un número finito de singularidades, no tiene polos en el eje real y se cumple $\lim_{R\to\infty} \max\{|f(z)|;\ |z| = R\} = 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} ResF(z_k),$$

siendo z_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ los polos de f en el semiplano superior y $F(z) = e^{ipz}f(z)$.

- Integrales de la forma $\int_0^{+\infty} f(x)\cos(ax)dx,\ \int_0^{+\infty} f(x)\sin(ax)dx$: Si f es analítica salvo en un número finito de singularidades, no tiene polos en el eje real y se cumple $\lim_{R\to\infty} \max\{|f(z)|;\ |z| = R\} = 0$, entonces:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\cos(ax)dx = \mathrm{Re}\left\{\pi i \sum_{k=1}^{m} ResF(z_k)\right\}$$

siempre que f sea par, mientras que si es impar,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\sin(ax)dx = \mathrm{Im}\left\{\pi \sum_{k=1}^{m} ResF(z_k)\right\}$$

siendo z_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ los polos de f y $F(z) = e^{ipz}f(z)$. Nota: Re{ } e Im{ } indican, respectivamente, la parte real y parte imaginaria de lo que va entre llaves.

Ejercicios resueltos.

1. (Febrero 2012) *Sea $\gamma(t) = \alpha e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, la circunferencia de radio $\alpha > 0$ centrada en el origen. Discute en función de los valores de $\alpha > 0$ el valor de las integrales a lo largo de γ de las funciones*

$$\text{(1.a)}\, f(z) = \frac{z+1}{(z^2+1)(z-2+i)} \qquad \text{(1.b)}\, f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z(z^2+1)}$$

Solución:

(1.a) La función tiene singularidades aisladas en los puntos $z_{1,2} = \pm i$ y $z_3 = 2 - i$, siendo todas polos simples (son ceros simples del denominador y el numerador no se anula en ellos). Como γ es la circunferencia de radio $\alpha > 0$ centrada en el origen, resultará que si $\alpha < 1$ todas las singularidades están fuera de la región, mientras que si $1 < \alpha < \sqrt{5}$ sólo estarán incluidas $z_{1,2} = \pm i$, y si $\alpha > \sqrt{5}$ estarán incluidas todas las singularidades. Aplicando entonces el teorema de los resíduos:

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ 2\pi i(Res(f,i) + Res(f,-i)) & \text{si } 1 < \alpha < \sqrt{5} \\ 2\pi i(Res(f,i) + Res(f,-i) + Res(f,2-i)) & \text{si } \alpha > \sqrt{5} \end{cases}$$

donde, al ser

$$Res(f,i) = \frac{p(i)}{q'(i)} = \frac{i+1}{-4-4i}$$

$$Res(f,-i) = \frac{p(-i)}{q'(-i)} = \frac{-i+1}{4i}$$

$$Res(f,2-i) = \frac{p(2-i)}{q'(2-i)} = \frac{3-i}{4-4i}$$

se tiene

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ \left(\frac{1}{2} - i\right)\pi & \text{si } 1 < \alpha < \sqrt{5} \\ 0 & \text{si } \alpha > \sqrt{5} \end{cases}$$

(1.b) La función tiene singularidades aisladas en los puntos $z_{1,2} = \pm i$, siendo polos simples (son ceros simples del denominador y el numerador no se anula en ellos; por tal motivo el punto $z_0 = 0$ no es un polo, sino que es una singularidad evitable ya que anula el numerador). Como γ es la circunferencia de radio $\alpha > 0$ centrada en el origen, resultará que si $\alpha < 1$ todas las singularidades están fuera de la región, mientras que si $\alpha > 1$ estarán incluidas todas las singularidades. Aplicando entonces el teorema de los resíduos:

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ 2\pi i(Res(f,i) + Res(f,-i)) & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

donde, al ser

$$Res(f,i) = \frac{p(i)}{q'(i)} = \frac{\sin(1)}{2}$$

$$Res(f,-i) = \frac{p(-i)}{q'(-i)} = \frac{\sin(1)}{2}$$

se tiene

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ 2\pi i\sin(1) & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

2. (Junio 2012) *Sea $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, la circunferencia unidad. Discutir en función de los valores de $a > 0$ el resultado de la integral*

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{z(z^2+a^2)}dz$$

Solución: Las singularidades que tiene el denominador son $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm ai$. Por tanto, según los valores de $a > 0$ distinguiremos:

* Si $a > 1$: En este caso, el único punto singular aislado en el interior de γ es $z_1 = 0$, por lo que

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{z(z^2+a^2)}dz = 2\pi i \mathrm{Re}s(f,0) = 0$$

puesto que $\mathrm{Re}s(f,0) = 0$, al ser $z_1 = 0$ una singularidad evitable (es un cero simple del denominador, pero es un cero doble del numerador).

Nota: Este mismo caso la integral también podría haberse calculado usando la primera de las fórmulas integrales de Cauchy, para lo que hacemos

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{z(z^2+a^2)}dz = \int_\gamma \frac{\frac{\sin(z^2)}{(z^2+a^2)}}{z}dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z}dz = 2\pi i \cdot g(0) = 0$$

* Si $a < 1$: En este caso, como las 3 singularidades están en el interior de γ, tendremos

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{z(z^2+a^2)}dz = 2\pi i(\mathrm{Re}s(f,0) + \mathrm{Re}s(f,ai) + \mathrm{Re}s(f,-ai)) =$$

$$= 2\pi i\left(0 + \frac{\sin(a^2)}{2a^2} + \frac{\sin(a^2)}{2a^2}\right) = 2\pi i\frac{\sin(a^2)}{a^2}$$

ya que

$$\mathrm{Re}s(f,ai) = \frac{p(ai)}{q'(ai)} = \frac{\sin((ai)^2)}{3(ai)^2+a^2} = \frac{\sin(a^2)}{2a^2}$$

y el mismo resultado se obtiene para $\mathrm{Re}s(f,-ai)$.

3. (Septiembre 2012) *Discutir, en función del radio $\beta > 0$, los distintos valores de la integral*

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz$$

siendo $\gamma(t) = i + \beta e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, la circunferencia de centro i y radio β.

Solución: Las singularidades que tiene el denominador son $z_1 = 0$ (que es un polo doble), $z_{2,3} = \pm i$ (ambos son polos simples) y $z_4 = 2, z_5 = \frac{1}{2}$ (también polos simples). Por tanto, según los valores de $\beta > 0$ distinguiremos:

- Si $\beta < 1$: Sólo hay una singularidad dentro de la circunferencia (es su centro $z_2 = i$).
- Si $\beta < \frac{\sqrt{5}}{2}$: Hay dos singularidades dentro de la circunferencia (son $z_2 = i$ y $z_1 = 0$).
- Si $\beta < 2$: Hay tres singularidades dentro de la circunferencia (son $z_2 = i$, $z_1 = 0$ y $z_5 = \frac{1}{2}$).
- Si $\beta < \sqrt{5}$: Hay cuatro singularidades dentro de la circunferencia (son $z_2 = i$, $z_1 = 0$, $z_5 = \frac{1}{2}$ y $z_3 = -i$).
- Si $\beta > \sqrt{5}$: Las cinco singularidades están dentro de la circunferencia.

(Hemos distinguido estos valores en los que varía β ya que la singularidad $z_1 = 0$ está a una distancia de 1 del centro de la circunferencia, mientras que la singularidad $z_2 = i$ es el centro de la circunferencia; el punto $z_3 = -i$ está a una distancia 2 del centro; $z_4 = 2$ está a distancia $\sqrt{5}$ del centro y $z_5 = \frac{1}{2}$ está a $\frac{\sqrt{5}}{2}$ del centro).

Por tanto sólo hemos de calcular los respectivos residuos en cada una de las singularidades y aplicar el teorema de los residuos según los valores de β :

Como se tiene que

$$Resf(0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)} \right) = \ldots = \frac{5}{8}$$

$$Resf(i) = \frac{p(i)}{q'(i)} = \ldots = -\frac{1}{10}$$

$$Resf(i) = \frac{p(-i)}{q'(-i)} = \ldots = -\frac{1}{10}$$

$$Resf(2) = \frac{p(2)}{q'(2)} = \ldots = \frac{17}{120}$$

$$Resf(\frac{1}{2}) = \frac{p(1/2)}{q'(1/2)} = \ldots = -\frac{17}{30}$$

siendo $p(z) = z^4 + 1$ y $q(z) = z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)$, entonces:

- Si $\beta < 1$:

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz = 2\pi i Resf(i) = -\frac{\pi i}{5}$$

- Si $\beta < \frac{\sqrt{5}}{2}$:

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz = 2\pi i(Resf(i) + Resf(0))$$

- Si $\beta < 2$:

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz = 2\pi i(Resf(i)+Resf(0)+Resf(1/2))$$

- Si $\beta < \sqrt{5}$:

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz = 2\pi i(Resf(i)+Resf(0)+Resf(1/2)+Resf(-i))$$

- Si $\beta > \sqrt{5}$:

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)}dz = 2\pi i(Resf(i)+Resf(0)+Resf(1/2)+Resf(-i)+Resf(2))$$

4. (Febrero 2013) *Dada la función*

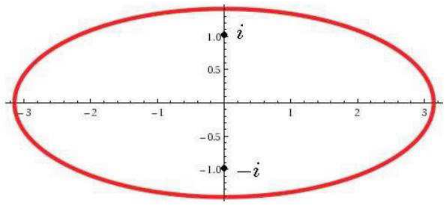
$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2(z+i)}$$

indica si es cierto que se verifica la identidad

$$\int_\gamma f(w)dw = 2\pi i$$

donde γ es la elipse de ecuación (figura siguiente)

$$\gamma(t) = \pi\cos(t) + i\sqrt{2}\,\sin(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



Solución: Se nos pide que calculemos la integral de f, lo que haremos por el teorema de los residuos. Así, como sus puntos singulares son $z_1 = 0$ y $z_2 = -i$, y ambos son polos simples, tendremos

$$\mathrm{Res}f(0) = \lim_{z\to 0} z\cdot f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z(z+i)} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{z(z+i)} = \frac{1}{i} = -i$$

$$\mathrm{Res}f(-i) = \frac{p(-i)}{q'(-i)} = \frac{\sin(-i)}{-1} = \sin(i)$$

Por tanto

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}f(0)+\mathrm{Res}f(-i)\big) = 2\pi i(-i+\sin(i)) \neq 2\pi i$$

Así pues, la afirmación de (2.b) NO es cierta.

5. (Febrero 2013) *Sea el conjunto*

$$D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \alpha,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

con $\alpha > 0$. Discutir en función del parámetro $\alpha > 0$ el valor de la integral

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(w^2)}{w(w-i)(w^2-2)}dw$$

donde ∂D_α^+ denota la frontera del recinto $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ orientada positivamente.

Solución: Las singularidades que tiene la función son $z_1 = 0,$ que es una singularidad evitable (puesto que también anula el numerador; además, se tiene que $\lim_{w\to 0} f(w) = 0$), $z_2 = i$ (polo simple) y $z_{3,4} = \pm\sqrt{2}$ (también polos simples). Pero de estas 4 singularidades, solamente $z_2 = i$ verifica $\text{Im}(z) > 0$ (Notemos que 0 y $\pm\sqrt{2}$ no están en el interior de dicha región, puesto que su parte imaginaria vale 0). Por tanto, según los valores de $\alpha > 0$ distinguiremos:

- Si $0 < \alpha < 1$: No hay niguna una singularidad dentro de la región. Así

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(w^2)}{w(w-i)(w^2-2)} dw = 0$$

- Si $\alpha > 1$: Hay una única singularidad dentro de la región (es $z_2 = i$), y como se tiene que

$$Resf(i) = \frac{p(i)}{q'(i)} = \frac{\sin(-1)}{-3i} = -\frac{\sin(1)}{-3i}$$

entonces:

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(w^2)}{w(w-i)(w^2-2)} dw = 2\pi i \cdot Resf(i) = 2\pi i \frac{\sin(1)}{3i} = \frac{2\pi}{3}\sin(1)$$

6. (Junio 2013) *Sea el conjunto*

$$D_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \alpha,\ \frac{1}{2} + \text{Im}(z) > 0 \right\}$$

con $\alpha > 0$. *Discutir en función del parámetro* $\alpha > 0$ *el valor de la integral*

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)(z^2-2z+2)} dz$$

donde ∂D_α^+ denota la frontera del recinto $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ orientada positivamente.

Solución: Las singularidades de la función (que coinciden con los ceros del denominador) son $z_1 = 0,$ que es una singularidad evitable (puesto que también anula el numerador; además, se tiene que $\lim_{w\to 0} f(w) = 0$), $z_{2,3} = 1$ (polo doble), $z_{4,5} = \pm i$ (polos simple) y $z_{6,7} = 1 \pm i$ (también polos simples).

Pero de estas 7 singularidades, solamente $z_1 = 0,\ z_{2,3} = 1,\ z_4 = i$ y $z_6 = 1 + i$ verifican $\frac{1}{2} + \text{Im}(z) > 0$ (Notemos que $z_5 = -i$ y $z_7 = 1 - i$ no están en el interior de dicha región, puesto que $\frac{1}{2} + \text{Im}(z) < 0$). Por tanto, según los valores de $\alpha > 0$ distinguiremos:

- Si $0 < \alpha < 1$: Solo hay una singularidad dentro de la región, que es $z_1 = 0$. Así

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)(z^2-2z+2)} dz = 2\pi i Resf(0) = 0$$

- Si $1 < \alpha < \sqrt{2}$: Hay 3 singularidades dentro de la región: $z_1 = 0,\ z_{2,3} = 1$ y $z_4 = i$, por lo que

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)(z^2-2z+2)} dz = 2\pi i(Resf(0) + Resf(1) + Resf(i))$$

- Si $\alpha > \sqrt{2}$: Hay 4 singularidades dentro de la región: $z_1 = 0,\ z_{2,3} = 1,\ z_4 = i$ y $z_6 = 1 + i,$

por lo que

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)(z^2-2z+2)} dz = 2\pi i(Resf(0) + Resf(1) + Resf(i) + Resf(1+i))$$

Para finalizar, solo nos faltan por calcular cada uno de los respectivos residuos para sustituir en las expresiones anteriores:

$$Resf(0) = 0$$

$$Resf(1) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 1}[\ldots] = \cos(1) - \sin(1)$$

$$Resf(i) = \frac{p(i)}{q'(i)} = \frac{-\sin(1)}{8+4i}$$

$$Resf(1+i) = \frac{p(1+i)}{q'(1+i)} = \frac{\sin\left((1+i)^2\right)}{}$$

7. (Septiembre 2013) *Sea la región circular*

$$D_\alpha = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \alpha\right\}$$

con $\alpha > 0$. *Discutir en función del parámetro* $\alpha > 0$ *el valor de la integral*

$$\int_{\partial D_\alpha^+} f(z)\, dz$$

donde ∂D_α^+ *denota la frontera del recinto* $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ *orientada positivamente y f es la función dada por*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)}, \text{ si } |z| < 2 \\ \operatorname{Im}(z) + 2i\operatorname{Re}(z), \text{ si } |z| \geq 2 \end{cases}$$

Solución: Si $|z| < 2$, la función tiene por singularidades los puntos $z_0 = 0$ (que es evitable, al ser también cero del numerador), $z_1 = 1$ y $z_{2,3} = \pm i$ (que son polos simples, al ser ceros simples del denominador). Por tanto, distinguiremos los casos:

- Si $0 < \alpha < 1$:

$$\int_{\partial D_\alpha^+} f(z)\, dz = 2\pi i Resf(0) = 0$$

- Si $1 < \alpha < 2$:

$$\int_{\partial D_\alpha^+} f(z)\, dz = 2\pi i(Resf(0) + Resf(1) + Resf(i) + Resf(-i))$$

donde cada uno de estos residuos se puede calcular usando $Resf(z) = \frac{P(z)}{Q'(z)}$.

- Si $|z| \geq 2$, la función es

$$f(z) = \operatorname{Im}(z) + 2i\operatorname{Re}(z) = y + i2x$$

pero esta función no tiene singularidades aisladas, sino que no es analítica en ningún punto (puede verse facilmente que no cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ningún punto). Por tanto, la integral pedida no puede calcularse usando el teorema de los residuos, sino que habría que calcularla de manera directa (tomando una parametrización del camino $|z| = \alpha$:

$\gamma(t) = (\alpha\cos(t), \alpha\sin(t)))$. Así,

$$\int_{\partial D_\alpha^+} f(z)\, dz = \int_{|z|=\alpha} (y + i2x)(dx + idy) =$$
$$= \int_0^{2\pi} (\alpha\sin(t) + i2\alpha\cos(t))(-\alpha\sin(t) + i\alpha\cos(t))dt = \ldots = -3\pi\alpha^2$$

8. (Febrero 2014) *Determinar el valor de la integral*

$$\int_\gamma \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1} dz$$

en los siguientes casos:

8.a) *γ es la circunferencia de centro 0 y radio $\frac{1}{4}$.*

8.b) *γ es la circunferencia de centro 0 y radio 1.*

8.c) *γ es el rectángulo de vértices $-i,\ -2-i,\ -2+i,\ i$.*

8.d) *γ es el rectángulo de vértices $2+i,\ -2+i,\ -2-i, 2-i$.*

Solución: La función tiene por puntos singulares $\left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$, siendo $z_1 = 1$ una singularidad evitable (ya que también anula al numerador), mientras que $z_2 = -\frac{1}{2}$ es un polo simple.

(8.a) Como ninguno de los puntos singulares es interior a la curva, por el teorema de Cauchy-Goursat se tiene que

$$\int_\gamma \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1} dz = 0$$

(8.b) Como el punto $z_1 = 1$ está en el recorrido de la integral, ésta no está definida (al existir un punto en el recorrido donde la función no está definida).

(8.c) En la trayectoria del rectángulo, el único punto singular incluido es $z_2 = -\frac{1}{2}$, por lo que

$$\int_\gamma \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1} dz = 2\pi i Res(f, -\frac{1}{2}) = -i\pi\frac{\sqrt{2}}{3}$$

ya que

$$Res(f, -\frac{1}{2}) = \frac{P\left(-\frac{1}{2}\right)}{Q'\left(-\frac{1}{2}\right)} = \ldots = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{-3} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

(8.d) En este caso, ambos puntos singulares aislados están en el interior del rectángulo, por lo que

$$\int_\gamma \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1} dz = 2\pi i\left(Res(f, 1) + Res(f, -\frac{1}{2})\right) = 2\pi i\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = -\pi i\frac{\sqrt{2}}{3}$$

ya que, al ser $z_1 = 1$ una singularidad evitable,

$$Res(f, 1) = 0$$

9. (Junio 2014) *Aplicar el Teorema de los residuos para calcular las siguientes integrales:*

9.a) *La integral*

$$\oint_{C_\alpha} \frac{g(z)}{(z-a_1)(z-a_2)}dz$$

donde $g(z)$ es una función entera, a_1 y a_2 son dos puntos de $\mathbb{C}$ distintos, y $\alpha(t) = (1+|a_1|+|a_2|)e^{-it}$, con $t \in [0,2\pi]$.

9.b) *La integral*

$$\oint_{C_\beta} \frac{(z+1)e^z}{z^7(z^7-\pi i)}dz$$

donde $\beta(t) = e^{it}$, con $t \in [0,2\pi]$.

Solución:

(9.a) La curva $\alpha(t)$ es la circunferencia centrada en el origen y de radio $1+|a_1|+|a_2|$ (aunque recorrida en sentido inverso). Por tanto, como $g(z)$ es una función entera (analítica), el cociente $\frac{g(z)}{(z-a_1)(z-a_2)}$ tiene, en la región encerrada por $\alpha(t)$, dos puntos singulares aislados, que son a_1 y a_2, que sabemos que son polos simples. De esta forma

$$\oint_{C_\alpha} \frac{g(z)}{(z-a_1)(z-a_2)}dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,a_1)+\mathrm{Res}(f,a_2)\big)$$

y puesto que

$$\mathrm{Res}(f,a_1) = \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} = \frac{g(a_1)}{a_1-a_2} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Res}(f,a_2) = \frac{P(a_2)}{Q'(a_2)} = \frac{g(a_2)}{a_2-a_1}$$

se tendrá que

$$\oint_{C_\alpha} \frac{g(z)}{(z-a_1)(z-a_2)}dz = 2\pi i\left(\frac{g(a_1)}{a_1-a_2}+\frac{g(a_2)}{a_2-a_1}\right)$$

(9.b) En el círculo unidad la función $f(z) = \frac{(z+1)e^z}{z^7(z^7-\pi i)}$ tiene un único punto singular aislado $z_0 = 0$, que es un polo de orden 7 (ya que anula 7 veces al denominador y ninguna vez al numerador; además las 7 raíces séptimas de πi están fuera del círculo unidad). Por lo tanto

$$\oint_{C_\beta} \frac{(z+1)e^z}{z^7(z^7-\pi i)}dz = 2\pi i\mathrm{Res}(f,0)$$

¿Cómo calcularemos entonces $\mathrm{Res}(f,0)$?: No lo vamos a realizar con la fórmula de las derivadas (recordamos que, como hemos visto en teoría, se tiene que, para un polo de orden n, $Res(f,z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$), puesto que habríamos de derivar 6 veces antes de calcular el límite. Por tanto, lo mejor es obtener dicho residuo calculando el coeficiente del término que lleva $\frac{1}{z}$ en el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$:

Puesto que se tiene que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z+1)e^z}{z^7(z^7-\pi i)} = (z+1)e^z\frac{1}{z^7(z^7-\pi i)} = \\ &= (z+1)e^z\left(\frac{A}{z^7}+\frac{B}{(z^7-\pi i)}\right) =\ldots= \\ &= (z+1)e^z\left(\frac{i/\pi}{z^7}+\frac{-i/\pi}{(z^7-\pi i)}\right) = \\ &= (z+1)e^z\frac{i/\pi}{z^7}+(z+1)e^z\frac{-i/\pi}{(z^7-\pi i)} \end{aligned}$$

y el segundo de los sumandos es analítico en $z_0 = 0$, se verificará que

$$\operatorname{Res}(f,0) = \operatorname{Res}\left((z+1)e^z\frac{i/\pi}{z^7},0\right) = \frac{7}{720}\frac{i}{\pi}$$

donde el residuo de esta función lo hemos calculado obteniendo el coeficiente de $\frac{1}{z}$ en el desarrollo de la misma: Notemos que solo hemos de poner el desarrollo de McLaurin para la función e^z y observar cual es el término que lleva $\frac{1}{z}$ en todo el desarrollo:

$$(z+1)e^z\frac{i/\pi}{z^7} = (z+1)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)\frac{i/\pi}{z^7}$$

y si desarrollamos este producto y observamos el coeficiente del término $\frac{1}{z}$, resulta que $\operatorname{Res}(f,0) = \frac{7}{720}\frac{i}{\pi}$.

De esta manera,

$$\oint_{C_\beta}\frac{(z+1)e^z}{z^7(z^7-\pi i)}dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f,0) = 2\pi i\frac{7}{720}\frac{i}{\pi} = -\frac{7}{360}$$

10. (Septiembre 2014) *Se pide:*

10.a) *Calcular*

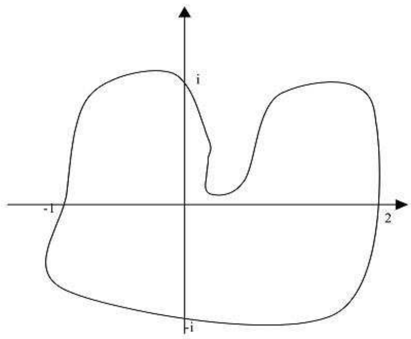
$$\int_\gamma \frac{\exp\left(\frac{\pi i z}{2}\right)}{z^4-z^3-9z^2-11z-4}dz$$

donde $\gamma(t) = -1+2e^{2\pi i t}$, *con* $t \in [0,1]$.

10.b) *Calcular la integral*

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)+e^{1/z}}{zi+z}dz$$

donde γ es la curva de Jordan (positivamente orientada) cuya trayectoria se representa en la siguiente figura:



Solución:

(10.a) Notemos que la curva γ es la circunferencia de centro $(-1,0)$ y radio 2. Si tomamos

$$f(z) = \frac{\exp\left(\frac{\pi i z}{2}\right)}{z^4-z^3-9z^2-11z-4}$$

el denominador se puede factorizar en la forma

$$z^4-z^3-9z^2-11z-4 = (z-4)(z+1)^3$$

por lo que $f(z)$ tiene por puntos singulares aislados: $z_1 = 4$ (polo simple) y $z_2 = -1$ (polo triple); de éstos dos, solamente $z_2 = -1$ está en el círculo formado por $\gamma(t)$, de manera que

$$\int_\gamma \frac{\exp\left(\frac{\pi i z}{2}\right)}{z^4-z^3-9z^2-11z-4}dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f,-1) =$$

$$= 2\pi i \frac{(8 - 25\pi^2)i - 20\pi}{1000} = \frac{\pi^3}{20} - \frac{2\pi}{125} - \frac{\pi^2}{25} i$$

donde $\operatorname{Res}(f, -1)$ se ha calculado a través de

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \to -1} \left[(z+1)^3 f(z) \right]'' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \left[\frac{\exp\left(\frac{\pi i z}{2}\right)}{z - 4} \right]'' = \ldots = \frac{(8 - 25\pi^2)i - 20\pi}{1000}$$

(10.b) Vamos a calcular la integral usando el teorema de los residuos, pero como suma de otras dos integrales, ya que:

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2) + e^{1/z}}{zi + z} dz = \int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{(1+i)z} dz + \int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(1+i)z} dz$$

Para la primera de ellas, la función $f(z) = \frac{\sin(z^2)}{(1+i)z}$ tiene por punto singular aislado $z_1 = 0$, siendo éste una singularidad evitable: notemos que este punto anula una vez al denominador, pero anula dos veces al numerador; o, lo que es equivalente, se tiene que

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin(z^2)}{(1+i)z} = 0$$

(basta con aplicar equivalencias en el numerador, o resolver dos veces por L'Hôpital). Por lo tanto

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{(1+i)z} dz = 0$$

Para la segunda de las integrales, la función $g(z) = \frac{e^{1/z}}{(1+i)z}$ tiene por punto singular aislado $z_2 = 0$, siendo éste una singularidad esencial: notemos que el desarrollo de Laurent, como potencias de z, de esta función viene dado por

$$\frac{e^{1/z}}{(1+i)z} = \frac{1}{1+i} \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{(1/z)^2}{2!} + \frac{(1/z)^3}{3!} + \ldots \right)$$

por lo que la singularidad es esencial ya que hay infinitos términos en su parte singular (esto es, términos con potencias negativas de z). También observando este desarrollo vemos que $\operatorname{Res}(g, 0) = \frac{1}{1+i}$, puesto que éste es el coeficiente del término $\frac{1}{z}$ en el mismo.

Por todo lo anterior

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(1+i)z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g, 0) = 2\pi i \frac{1}{1+i} = \pi(1+i)$$

Así,

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2) + e^{1/z}}{zi + z} dz = \int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{(1+i)z} dz + \int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(1+i)z} dz = 0 + \pi(1+i)$$

11. (Febrero 2015) *Se pide:*

11.a) *Calcular las siguientes integrales distinguiendo entre los posibles valores de $r > 0$:*

$$1)\ \int_{C_\alpha} 2(\bar{z}-2)dz, \text{ donde } \alpha(t) = 2+re^{it} \text{ para } t\in[0,2\pi]$$

$$2)\ \int_{C_\alpha} (3z^n+4z^{n-1}-16z^{15}+z^3-1)dz, \text{ donde } \alpha(t) = re^{it} \text{ para } t\in[0,2\pi] \text{ y } n\in\mathbb{N}$$

$$3)\ \int_{C_\alpha} z^5\cos\frac{1}{z}dz, \text{ donde } \alpha(t) = 1+re^{it} \text{ para } t\in[0,2\pi]$$

11.b) *Sea* $0<\theta<1$ *y sea* $t\in\mathbb{R}$. *Demostrar que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\theta^2}{1-2\theta\cos(t)+\theta^2}dt = 1$$

Solución:

SOLUCIÓN:

(11.a.1) La función a integrar es $f(z) = 2(\bar{z}-2)$, que no es analítica en ningún punto (podemos ver que no se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann). Por tanto, la única forma de calcular esta integral es hacerlo de forma directa (a través de una parametrización de la curva), de manera que

$$\int_{C_\alpha} 2(\bar{z}-2)dz = \int_0^{2\pi} 2\left(\overline{2+re^{it}}-2\right)ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} 2(re^{-it})ire^{it}dt = \ldots = 4\pi r^2 i$$

(11.a.2) En este caso la función a integrar $f(z) = 3z^n+4z^{n-1}-16z^{15}+z^3-1$ es analítica y es una función que tiene primitiva. Por tanto, y como el camino de integración es cerrado, se verifica

$$\int_{C_\alpha}(3z^n+4z^{n-1}-16z^{15}+z^3-1)dz = 0$$

independientemente del valor que tome $r>0$.

(11.a.3) La curva $\alpha(t) = 1+re^{it}$ es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio r.

Esta última integral hay que resolverla por el teorema de los residuos, teniendo en cuenta que el punto $z_0 = 0$ es la única singularidad de la función $f(z) = z^5\cos\frac{1}{z}$, siendo ésta además de tipo esencial.

Así, y siempre que $r>1$, tendremos que

$$\int_{C_\alpha} z^5\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz = 2\pi i Res(f,0)$$

ya que el punto crítico es interior a la curva $\alpha(t) = 1+re^{it}$. Como

$$f(z) = z^5\cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^5\left(1-\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^6}{6!}+\ldots\right)$$

tendremos que el coeficiente del término $\frac{1}{z}$ en el desarrollo anterior es $-\frac{1}{6!}$, por lo que

$$Res(f,0) = -\frac{1}{6!}$$

y

$$\int_{C_\alpha} z^5\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz = -\frac{2\pi i}{6!}$$

siempre que $r>1$.

Si $0<r<1$, la integral valdrá 0, puesto que no hay puntos singulares dentro del recinto de integración.

(11.b) Vamos a probar, de forma equivalente al enunciado, que se verifica

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-\theta}{1-2\theta\cos(t)+\theta^2}dt = 2\pi$$

Para ello, haremos el conocido cambio de variable $z = e^{it}$, de donde

$$dt = \frac{dz}{iz};\ \cos t = \frac{z^2+1}{2z}$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-\theta}{1-2\theta\cos(t)+\theta^2}dt = \int_{|z|=1} \frac{1-\theta}{1-2\theta\frac{z^2+1}{2z}+\theta^2}\frac{dz}{iz} = \ldots$$

$$= \frac{\theta^2-1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{\theta z^2-(\theta^2+1)z+\theta}$$

Esta fracción tiene por puntos singulares aislados las raíces de la ecuación $\theta z^2-(\theta^2+1)z+\theta = 0$, que son $z_1 = \theta$ y $z_2 = \frac{1}{\theta}$ (siendo ambos polos simples). Como $0 < \theta < 1$, solamente $z_1 = \theta$ está en el interior de $|z| = 1$.

De esta forma, y aplicando el teorema de los residuos,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-\theta}{1-2\theta\cos(t)+\theta^2}dt = \frac{\theta^2-1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{\theta z^2-(\theta^2+1)z+\theta} =$$

$$= \frac{\theta^2-1}{i}2\pi i Resf(\theta) = \frac{\theta^2-1}{i}2\pi i\frac{1}{\theta^2-1} = 2\pi$$

como queremos demostrar.

NOTA: El valor de $Resf(\theta)$ lo hemos obtenido teniendo en cuenta que $f(z) = \frac{1}{\theta z^2-(\theta^2+1)z+\theta}$ y que $z_1 = \theta$ es un polo simple, por lo que

$$Resf(\theta) = \frac{p(\theta)}{q'(\theta)} = \ldots = \frac{1}{\theta^2-1}$$

12. (Junio 2015) *Se pide:*

12.a) *Calcular, en función de $r > 0$, y usando el teorema de los residuos, la integral*

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$$

siendo $\gamma(t) = 1+re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, $r > 0$. Justificar razonadamente porqué se puede aplicar dicho teorema.

12.b) *Calcular, mediante el teorema de los residuos,*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10}+\sin(t)}dt$$

justificando de forma razonada lo realizado.

Solución:

(12.a) La curva $\gamma(t) = 1+re^{it}$ es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio r. Las singularidades de la función $f(z) = \frac{\cos(z)}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ son los puntos $z_1 = 0$ (polo simple) y $z_2 = \frac{\pi}{2}$ (polo simple, ya que anula dos veces al denominador, pero también anula al numerador). Así, según sea $r > 0$, distinguiremos los siguientes casos:

- Si $0 < r < \frac{\pi}{2} - 1$, no hay singularidades interiores a la circunferencia $\gamma(t)$, por lo que

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz = 0$$

- Si $\frac{\pi}{2} - 1 < r < 1$, la única singularidad interior a $\gamma(t)$ es $z_2 = \frac{\pi}{2}$, por lo que

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Re}s(f(z), z_2)$$

- Y si $r > 1$, tendremos que los dos puntos singulares son interiores, por lo que

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz = 2\pi i(\operatorname{Re}s(f(z), z_2) + \operatorname{Re}s(f(z), z_1))$$

Por tanto el valor de estas integrales se calcula sin más que tener en cuenta que

$$\operatorname{Re}s(f(z), z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{\cos 0}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{4}{\pi^2}$$

mientras que

$$\operatorname{Re}s(f(z), z_2) = \lim_{z \to \pi/2} \left(\left(z - \frac{\pi}{2}\right) f(z)\right) = \lim_{z \to \pi/2} \frac{\cos z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{z \to \pi/2} \frac{-\sin z}{2z - \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

(Notemos que para calcular este último residuo, y a pesar de ser z_2 un polo simple, no podemos aplicar $\operatorname{Re}s(f(z), z_2) = \frac{p(z_2)}{q'(z_2)}$ puesto que se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$).

(12.b) Este tipo de integrales se reduce al campo complejo a través del cambio $z = e^{it}$, de donde

$$dt = \frac{dz}{iz} \text{ y } \sin t = \frac{z^2-1}{2iz}$$

Por tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10} + \sin(t)} dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{10} + \frac{z^2-1}{2iz}} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 2\sqrt{10}\, iz - 1}$$

Esta fracción tiene por puntos singulares aislados las raíces de la ecuación

$$z^2 - 2\sqrt{10}\, iz - 1 = 0$$

que son $z_1 = \left(3 - \sqrt{10}\right) i$ y $z_2 = \left(-3 - \sqrt{10}\right) i$ (siendo ambas polos simples). Solamente z_1 está en el interior de $|z| = 1$.

De esta forma, y aplicando el teorema de los residuos,

$$\int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 2\sqrt{10}\, iz - 1} = 2\pi i \operatorname{Re}s(f(z), z_1) = 2\pi i \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = 2\pi i \frac{2}{6i} = \frac{2\pi}{3}$$

13. (Febrero 2016) *Se pide:*

13.a) *Calcular la siguiente integral según los posibles valores de* $r > 0$:

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin(z)}{z(z^2+1)^2} \right) dz$$

siendo γ *la circunferencia* $\gamma(t) = 1 + i + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

13.b) *Calcular, usando el teorema de los residuos,*

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(x)}{5 + 4\cos(x)} dx$$

Solución:

(13.a) El integrando tiene por puntos singulares aislados $z_1 = 0$ (singularidad esencial en el 1er sumando, mientras que es singularidad evitable en el 2do sumando) y $z_{2,3} = \pm i$ (que son polos dobles, al ser ceros dobles del denominador).

Por tanto, y al ser γ la circunferencia $\gamma(t) = 1 + i + re^{it}$, distinguiremos los siguientes casos, según valores de r :

- Si $r < 1$: No hay punto singular en el interior de la región, por lo que

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin(z)}{z(z^2+1)^2} \right) dz = 0$$

- Si $1 < r < \sqrt{2}$: En el interior de la región solo está el psa $z_2 = i$, por lo que

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin(z)}{z(z^2+1)^2} \right) dz = 2\pi i Resf(i)$$

- Si $\sqrt{2} < r < \sqrt{5}$: En el interior de la región están los psa $z_1 = 0$ y $z_2 = i$, por lo que

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin(z)}{z(z^2+1)^2} \right) dz = 2\pi i (Resf(i) + Resf(0))$$

- Si $r > \sqrt{5}$: En el interior de la región están los tres psa, por lo que

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin(z)}{z(z^2+1)^2} \right) dz = 2\pi i (Resf(i) + Resf(-i) + Resf(0))$$

El valor de las correspondientes integrales se calculan sin más que tener en cuenta que

$$Resf(0) = \frac{1}{5!}$$

ya que el desarrollo de Laurent como potencias de z del primer sumando es

$$z^4 e^{1/z} = z^4 \left(1 + 1/z + \frac{(1/z)^2}{2!} + \frac{(1/z)^3}{3!} + \frac{(1/z)^4}{4!} + \ldots \right)$$

y el coeficiente del término $\frac{1}{z}$ es $\frac{1}{5!}$, mientras que

$$Resf(i) = \lim_{z \to i} \left[(z-i)^2 \frac{\sin(z)}{z(z^2+1)^2} \right]' = \lim_{z \to i} \left[\frac{\sin(z)}{z(z+i)^2} \right]' = \ldots = \frac{i\cos(i) - 2\sin(i)}{4}$$

Análogamente

$$Resf(-i) = \lim_{z\to -i}\left[(z+i)^2 \frac{\sin(z)}{z(z^2+1)^2} \right]' = \lim_{z\to -i}\left[\frac{\sin(z)}{z(z-i)^2} \right]' = \ldots = \frac{i\cos(i) - 2\sin(i)}{4}$$

(13.b) Haciendo el cambio $z = e^{ix}$, se tiene que

$$\sin(x) = \frac{z^2-1}{2iz};\ \cos(x) = \frac{z^2+1}{2z};\ dx = \frac{dz}{iz}$$

Además, $x \in [0, 2\pi]$ equivale a $|z| = 1$.

De esta forma

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(x)}{5+4\cos(x)}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{5+4\cos(x)}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}{5+4\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz} = \ldots = -\frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{z^4-2z+1}{z^2(10z+4z^2+4)}dz$$

y teniendo en cuenta que esta función tiene por singularidades $\{0, -2, -1/2\}$, siendo la primera un polo doble y las otras dos polos simples, por el teorema de los residuos, tendremos

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(x)}{5+4\cos(x)}dx = -\frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{z^4-2z+1}{z^2(10z+4z^2+4)}dz =$$

$$= -\frac{1}{4i}2\pi i\big(\mathrm{Res}f(0) + \mathrm{Res}f(-1/2)\big) = \frac{\pi}{8}$$

donde

$$Resf(0) = \lim_{z\to 0}\left[z^2 \frac{z^4-2z+1}{z^2(10z+4z^2+4)} \right]' = \ldots = -\frac{9}{8}$$

y

$$Resf(-1/2) = \frac{P(-1/2)}{Q'(-1/2)} = \ldots = \frac{11}{8}$$

Ejercicios propuestos.

1. Hallar los puntos singulares y determinar su carácter:

$$a)\ \frac{1-\cos(z)}{z^2} \qquad b)\ \exp\left(\tfrac{1}{z}\right) \qquad c)\ \frac{\sin(z)}{z^2} \qquad d)\ \frac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$$

2. En cada caso escribir la parte principal de la función en su punto aislado y determinar el carácter de tal punto:

$$a)\ z\exp\left(\tfrac{1}{z}\right) \qquad b)\ \frac{z^2}{1+z} \qquad c)\ \frac{\sin(z)}{z}$$

$$d)\ \frac{\cos(z)}{z} \qquad e)\ \frac{1}{(2-z)^3}$$

3. Probar que el punto singular de cada una de estas funciones es un polo. Determinar el orden del polo y calcular su correspondiente residuo B :

$a)\ \frac{1-\cosh(z)}{z^3}$ $b)\ \frac{1-e^{2z}}{z^4}$ $c)\ \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

$d)\ \frac{z^2+2}{z-1}$ $e)\ \left(\frac{z}{2z+1}\right)^3$ $f)\ \tanh(z)$

$g)\ \frac{e^z}{z^2+\pi^2}$ $h)\ \frac{z}{\cos(z)}$ $i)\ \frac{z^{1/4}}{z+1};\ (|z| > 0, 0 < \arg(z) < 2\pi)$

4. Hallar el residuo en $z = 0$ de:

$a)\ \frac{1}{z+z^2}$ $b)\ z\cos(\frac{1}{z})$ $c)\ \frac{z-\sin(z)}{z}$

$d)\ \frac{\cot(z)}{z^4}$ $e)\ \frac{\sinh(z)}{z^4(1-z^2)}$

5. Hallar los residuos de las siguientes funciones en sus puntos sigulares:

$a)\ \frac{e^z}{z^3(z-1)}$ $b)\ \cos(\frac{1}{z}) + z^3$ $c)\ z^2\sin(\frac{1}{z})$ $d)\ \frac{e^{\pi z}}{z-i}$

6. Calcular, usando residuos, las integrales de las funciones siguientes sobre el círculo $|z| = 3$, positivamente orientado:

$a)\ \frac{e^{-z}}{z^2}$ $b)\ z^2\exp(\frac{1}{z})$ $c)\ \frac{z+1}{z^2-2z}$

7. Calcular la integral de las siguientes funciones a lo largo de $|z| = 2$, positivamente orientado:

$a)\ \frac{z^5}{1-z^3}$ $b)\ \frac{1}{1+z^2}$ $c)\ \frac{1}{z}$

$d)\ \frac{(3z+2)^2}{z(z-1)(2z+5)}$ $e)\ \frac{z^3(1-3z)}{(1+z)(1+2z^4)}$ $f)\ \frac{z\exp(\frac{1}{z})}{1+z^3}$

8. Calcular las siguientes integrales:

$a)\ \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)}dz$ $b)\ \int_{|z|=1} \frac{z^2}{\sin^3(z)\cos(z)}dz$

$c)\ \int_{|z|=1} z^3\sin(\frac{1}{z})dz$ $d)\ \int_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}}{z^3-1}dz$

9. Calcular

$$\int_\gamma \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$$

siendo γ el círculo:

$a)\ |z+2| = 2$ $b)\ |z-2| = 2$ $c)\ |z| = 4$

10. Calcular

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

siendo γ el círculo:

$$a)\ |z| = 2 \qquad b)\ |z+2| = 3$$

11. Sea γ el círculo $|z| = 2$ positivamente orientado. Calcular $\int_\gamma f(z)dz$, siendo f :

$$a)\ \tan(z) \qquad b)\ \frac{1}{\sinh(z)} \qquad c)\ \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)}$$

12. Calcular

$$a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} \qquad b)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} \qquad c)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$d)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} \qquad e)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} \qquad f)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$g)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} \qquad h)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} \qquad i)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$$

13. Calcular

$$a)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\sin(x)} \qquad b)\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5+4\sin(x)}$$

$$c)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3x)}{5-4\cos(2x)}dx \qquad d)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos(x)};\ (|a|<1)$$

$$e)\ \int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)\,dx}{1-2a\cos(x)+a^2};(|a|<1) \qquad f)\ \int_0^{\pi} \frac{dx}{(a+\cos(x))^2};\ (a>1)$$

SOLUCIONES:

(1a) $z = 0$ p.s. evitable; (1b) $z = 0$ p.s. esencial; (1c) $z = 0$ polo simple; (1d) $z = 0$ polo de 4^o orden, $z = -1$ polo simple.

(2a) (2b) (2c) (2d) (2e)

(3a) $n = 1$, $B = -\frac{1}{2}$; (3b) $n = 3$, $B = -\frac{4}{3}$; (3c) $n = 2$, $B = 2e^2$; (3d) $n = 1$, $B = 3$; (3e) $n = 3$, $B = -\frac{3}{16}$; (3f) $n = 1$, $B = 1$; (3g) ; (3i) $n = 1$, $B = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(4a) 1; (4b) $-\frac{1}{2}$; (4c) 0; (4d) $-\frac{1}{45}$; (4e) $\frac{7}{6}$.

(5a) $\operatorname{Res}f(0) = -\frac{5}{2}$; $\operatorname{Res}f(1) = e$; (5b) $\operatorname{Res}f(0) = 0$; (5c) $\operatorname{Res}f(0) = -\frac{1}{6}$; (5d) $\operatorname{Res}f(i) = -1$; (6a) $-2\pi i$; (6b) $\frac{\pi i}{3}$; (6c) $2\pi i$; (7a) $-2\pi i$; (7b) 0; (7c) $2\pi i$; (7d) $9\pi i$; (7e) $-3\pi i$; (7f) $2\pi i$; (8a) $(1-\frac{2}{e})\pi i$; (8b) $2\pi i$; (8c) 0; (8d) $2\pi i\frac{e^2}{3}$; (9a) 0; (9b) πi; (9c) $6\pi i$; (10a) $\frac{\pi i}{32}$; (10b) 0; (11a) $-4\pi i$; (11b) $-\pi i$; (11c) $4\pi i$; (12a) $\frac{3\pi}{8}$; (12b) $\frac{2\pi}{3}$; (12c) $\frac{\pi}{2}$; (12d) $\frac{\pi}{2}$; (12e) $\frac{\pi}{4}$; (12f) $\frac{\pi}{6}$; (12g) $\frac{\pi}{200}$; (12h) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; (12i) $\frac{\pi}{6}$; (13a) $\frac{2\pi}{3}$; (13b) $\pi\sqrt{2}$; (13c) $\frac{3\pi}{8}$; (13d) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$; (13e) $\frac{a^2\pi}{1-a^2}$; (13f) $\frac{a\pi}{\left(\sqrt{a^2-1}\right)^3}$.