Profesor: **Roque Molina Legaz**

Tema 1.3: INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO

PROGRAMA DETALLADO:

Introducción: **Curvas en el plano complejo**.
Integrales curvilíneas: **Definición y propiedades**.
Primitivas. **Independencia del camino de integración**.
Teorema de Cauchy-Goursat.
Fórmulas integrales de Cauchy. **Aplicación al cálculo de ciertas integrales**.
Teoremas de Liouville y D'Alembert.
Ejercicios resueltos.
Ejercicios propuestos.

Introducción: Curvas en el plano complejo.

La integración en el campo complejo va a ser el instrumento esencial para el estudio de las funciones analíticas. A partir de ella se probará lo que constituye el resultado fundamental de la teoría de funciones analíticas: que una función derivable en un abierto es indefinidamente derivable en él.

De esta forma, y antes de pasar a definir el concepto de integración en el campo complejo, y habida cuenta de que estas integrales siempre van a ser integrales curvilíneas (puesto que las vamos a definir en términos de los valores de una función compleja $f(z)$ a lo largo de un contorno o curva dada γ, que va desde un punto z_1 a un punto z_2 de $\mathbb{C}$), hemos de dar las siguientes definiciones relacionadas con curvas en el plano, aunque ahora éstas, en lugar de venir dadas en forma explícita $y = f(x)$, suelen venir, como vemos a continuación, en forma paramétrica

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \qquad a \le t \le b$$

que, en el campo complejo, podemos considerar como

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \qquad a \le t \le b$$

Definition *Se llama **arco de curva** (o **curva parametrizada**) en $\mathbb{C}$ a toda función γ continua definida de un intervalo compacto real en el plano complejo, y que viene dada por*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

*En este caso, diremos que $\gamma(a)$ es el **origen** y $\gamma(b)$ es el **extremo** del arco de curva. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, se dice que la curva es **cerrada**.*

*Un arco de curva γ se llama **simple** o **de Jordan** si γ es inyectiva, es decir, si $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, $\forall t_1 \neq t_2$. Si γ es simple salvo por ser $\gamma(a) = \gamma(b)$, se dice que γ es una **curva simple cerrada** o **curva de Jordan**.*

*Una curva cerrada se considera que se recorre en **sentido positivo** cuando la recorremos en sentido contrario a las agujas del reloj (o, lo que es equivalente,* *cuando la región encerrada por la misma queda a la izquierda del recorrido). Al revés, para recorrerla en* ***sentido negativo****.*

Remark *Hemos de observar que la definición que hemos dado para una curva en $\mathbb{C}$ ha sido a través de una parametrización. Sin embargo, en muchas ocasiones es habitual que una curva en el plano venga dada por una expresión dada en la forma $y = f(x)$, con $x \in [a,b]$. En tal caso, la misma podremos considerarla como una curva parametrizada, sin más que hacer $x = t$, por lo que $y = f(t)$, con $x \in [a,b]$. Así, la curva $y = f(x)$, con $x \in [a,b]$, es equivalente a considerar la curva parametrizada*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 (\equiv \mathbb{C})$$
$$\gamma(t) = \big(t, f(t)\big) = t + if(t)$$

Example *La curva $y = x^2$, con $x \in [-1,1]$, podemos considerarla como una curva en $\mathbb{C}$ sin más que tomar $\gamma(t) = \big(t,\ t^2\big) = t + it^2$, con $-1 \leq t \leq 1$.*

Sin embargo, suele ser habitual considerar parametrizaciones con notación específica en $\mathbb{C}$ para determinadas curvas:

Example *a) La parametrización*

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma(t) = \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$$

corresponde a la semicircunferencia unidad (es decir, la parte superior $x^2 + y^2 = 1$).

Notemos que para esta curva también podemos dar otra parametrización diferente, puesto que al venir dada su ecuación por $y = \sqrt{1 - x^2}$, siendo $-1 \leq x \leq 1$, podemos considerar

$$\delta : [-1,1] \to \mathbb{C}$$
$$\delta(t) = t + i\sqrt{1 - t^2}$$

b) La parametrización

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma(t) = \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$$

corresponde a la circunferencia unidad (que en coordenadas explícitas viene dada por $x^2 + y^2 = 1$). Notemos que se trata de una curva cerrada puesto que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.

En este caso, si quisiésemos dar una parametrización a partir de la forma explícita de esta circunferencia, $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, donde $-1 \leq x \leq 1$, tendríamos que considerar $\delta = \delta_1 \cup \delta_2$, siendo

$$\begin{array}{lcl} \delta_1 : [-1,1] \to \mathbb{C} & & \delta_2 : [1,-1] \to \mathbb{C} \\ \delta_1(t) = t + i\sqrt{1-t^2} & y & \delta_2(t) = t - i\sqrt{1-t^2} \end{array}$$

Notemos que en estas últimas expresiones hemos considerado que $-1 \le t \le 1$ para δ_1, mientras que $1 \le t \le -1$ para δ_2. De esta forma queremos indicar que al ser la misma una curva cerrada, si pretendemos recorrerla de una vez, el punto donde acaba la primera curva (que es $\delta_1(1) = (1,\ 0)$) ha de coincidir con el punto donde se inicia la segunda curva (que es $\delta_2(1) = (1,\ 0)$); de igual forma, el punto final de δ_2 (que es $\delta_2(-1) = (-1,\ 0)$) coincide con el punto inicial de δ_1 ($\delta_1(-1) = (-1,\ 0)$).

c) La parametrización

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma(t) = a\cos(t) + i\,b\sin(t)$$

corresponde a una elipse centrada en el origen y de semiejes a y b (que en cartesianas tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$).

Example *Otros ejemplos de curvas en $\mathbb{C}$ son, por ejemplo, las siguientes:*

$$a)\ |z| = 2; \qquad b)\ z = 2e^{i\theta},\ \theta \in [0,2\pi];$$
$$c)\ |z-3| = 2; \qquad d)\ z = 9 + 2e^{i\theta},\ \theta \in [0,2\pi]$$

Definition *Una curva γ es **regular** si tiene derivada continua y no nula en todo punto de $[a,b]$; y se dice **regular a trozos** si $[a,b]$ puede subdividirse en un número finito de subintervalos en los cuales γ es regular.*

Definition *Se define la **longitud** de una curva regular a trozos $\gamma(t)$ entre los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ como el número obtenido a partir de*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\,dt$$

Example *Calcular la longitud de una circunferencia de radio R (dada por la parametrización $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$).*

Remark *Notemos que si tenemos una curva plana dada por su forma habitual $y = f(x)$, la longitud de la misma en el intervalo $I = [a,b]$, según la expresión anterior, viene dada por*

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

y si consideramos para la misma la parametrización vista anteriormente $x = t$, $y = f(t)$, resulta que

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

que es la fórmula conocida (establecida en la asignatura de Matemáticas I) para calcular la longitud de un arco de una curva $y = f(x)$, cuando $x \in [a,b]$.

Integrales curvilíneas: Definición y propiedades.

A las integrales en $\mathbb{C}$ las vamos a denotar por

$$\int_\gamma f(z)dz \qquad \text{ó} \qquad \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

aunque esta última notación suele utilizarse cuando el valor de la integral es independiente de la elección de la curva que une los puntos z_1 y z_2 (en tal caso, como veremos, se dirá que la integral es *independiente del camino de integración*).

Aunque estas integrales pueden ser definidas directamente como una serie infinita de números complejos (es decir, a través de límites de sumas superiores e inferiores -complejas-, como ocurre, por ejemplo, en el caso de la integral simple de Riemann estudiada en Matemáticas I), es más aconsejable definirlas directamente como integrales de funciones reales.

Remark *Como veremos posteriormente en el Tema 2.2 (Integral de línea), las integrales en el campo complejo van a coincidir con las integrales a lo largo de curvas en $\mathbb{R}^2$, por lo que la forma de calcular las mismas y sus propiedades, serán totalmente análogas (salvando la notación, ya que en variable compleja al punto (x,y) de $\mathbb{R}^2$ solemos representarlo como $x + iy$). Por tal motivo, no realizaremos el desarrollo teórico de este concepto en el presente tema, sino que el mismo lo haremos en el citado Tema 2.2.*

Definition *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino regular a trozos y $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ una función compleja continua. Se define la* ***integral de f a lo largo de*** *γ, y se designa mediante $\int_\gamma f(z)dz$, como*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

De esta forma, si la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es continua sobre la curva γ, y ésta es regular a trozos, la anterior definición nos permitirá expresar la integral compleja en función de las integrales reales determinadas por

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b (u(x(t),y(t)) + iv(x(t),v(t))) \cdot (x'(t) + iy'(t))dt$$

Remark *A raíz de este último resultado, observamos que calcular una integral en el campo complejo, no es sino calcular dos integrales con variable real t: la integral de la parte real y la de la parte imaginaria que se obtienen al realizar el producto de los dos números complejos del integrando anterior.*

Example *Calcular $\int_\gamma \bar{z}\, dz$, siendo γ :*

a) La mitad derecha de la circunferencia $|z| = 3$.

b) La circunferencia $|z-2| = 3$.

Hacerlo expresando el camino de integración tanto en forma exponencial como en forma binómica.

A raíz de la última definición, todas las propiedades generales que van a verificar las integrales en el campo complejo coincidirán con las de la integral de línea en $\mathbb{R}^2$ (y que como ya hemos indicado estudiaremos en el Tema 2.2), por lo que existirá un paralelismo entre ellas. Entre estas, destacamos:

Proposition *Sean* γ_1 *y* γ_2 *dos caminos regulares a trozos y* f, g *funciones complejas continuas definidas en subconjuntos que contienen a las curvas. Entonces:*

a) ***(Linealidad)*** *Si* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *se verifica*

$$\int_{\gamma_1} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{\gamma_1} f + \mu \int_{\gamma_1} g$$

b) ***(Cambio de parámetro)*** *Si* γ_1 *y* γ_2 *son caminos equivalentes, se verifica*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

c) ***(Unión de caminos)*** *Si el extremo final de* γ_1 *coincide con el origen de* γ_2 *y* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, *se tiene*

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

d) ***(Camino opuesto)*** *Si* γ_1 *es el camino opuesto de* γ_2, *entonces*

$$\int_{\gamma_1} f = -\int_{\gamma_2} f$$

Example *Calcular* $\int_{\gamma} f(z)dz$, *siendo* $f(z) = y - x + ix^2$ *y* γ *el contorno de limitado por la intersección de las curvas* $x = 0$, $y = 1$, $y = x$.

Proposition *Sea* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *un camino regular a trozos, L la longitud de* γ *y* $M = \max|f(z)|$ *en* $\gamma([a,b])$. *Entonces*

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq ML$$

Example *Sea* γ *la circunferencia* $|z| = 2$ *que va desde* $z_1 = 2$ *a* $z_2 = 2i$. *Sin calcular la integral, probar que*

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

(Nota: $M = \max|f(z)|$ *se alcanza en el punto* $(2,0)$ *y vale* $\frac{1}{3}$*).*

Primitivas. Independencia del camino de integración.

Vemos a continuación que la independencia del camino de integración va a jugar un papel importante dentro de estas integrales. Antes que nada, consideraremos los dos siguientes ejemplos:

Example *Calcular* $\int_\gamma \bar{z}\, dz$*, entre los puntos* $z_1 = 1$ *a* $z_2 = -1$*, siendo* γ :

a) La mitad superior de la circunferencia $|z| = 1$.

b) La recta $y = 0$.

(Solución: (a) πi*; (b)* 0*)*

Example *Idem para* $\int_\gamma z^2 dz$*, entre los puntos* $z_1 = 0$ *a* $z_2 = 1 + i$*, siendo* γ :

a) La recta que une ambos puntos.

b) La curva $y = x^3$.

(Solución: (a) $\frac{2}{3}(-1+i)$*; (b)* $\frac{2}{3}(-1+i)$*)*

Remark *En el primer de los dos ejemplos anteriores, observamos que una misma integral compleja, entre los dos mismos puntos origen y extremo, da dos resultados diferentes al cambiar el camino de integración. Sin embargo, en el segundo ejemplo, vemos que, a pesar de cambiar el camino de integración, la integral compleja nos da el mismo resultado.*

Ésto nos lleva a intentar estudiar la posibilidad de cuando se verifica que el valor de una integral no depende del camino de integración: si fuésemos capaces de establecer un resultado en este sentido, es decir, si la integral fuese independiente del camino de integración, siempre tendremos la posibilidad de sustituir el camino inicial que nos den (y que puede ser complicado; lo que se traduce en que tendremos una integral complicada de calcular) por otro camino más sencillo (lo que hará que la integral a resolver sea mucho más simple que la inicial).

Entonces, sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino regular a trozos y $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ una función compleja continua definida sobre los puntos del mismo. Si se pretende calcular la integral de línea entre los puntos $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$, con $t_1, t_2 \in [a,b]$, puede ocurrir que:

a) El valor de la integral dependa, en general, del camino que une los puntos $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$.

b) Para ciertas funciones la integral dependerá únicamente de los puntos extremos $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$, y no del camino que los une.

Definition *En el caso* (b) *anterior, se dice que la integral compleja es* ***independiente del camino*** *que une* $\gamma(t_1)$ *y* $\gamma(t_2)$*. Cuando ocurra esta situación, a la integral a lo largo de* γ *entre los puntos* $z_1 = \gamma(t_1)$ *y* $z_2 = \gamma(t_2)$ *la representaremos por*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

Entonces ¿cuando la integral compleja va a ser independiente del camino de integración?

Previo a dar respuesta a esta cuestión, precisamos de la siguiente definición:

Definition *Dada una función continua f en un dominio Ω, si existe una función analítica F en Ω tal que $F'(z) = f(z)$ en Ω, se dice que F es una **primitiva** de f en Ω.*

El siguiente resultado nos da una primera respuesta a la cuestión de la independencia del camino:

Proposition *En las condiciones de la anterior definición, si F es una primitiva de una función continua f en un abierto Ω, que contiene íntegramente a la curva γ entre los puntos $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(t_2)) - F(\gamma(t_1))$$

Remark *Notemos que este resultado no es sino una versión de la **Regla de Barrow** para integrales complejas.*

De este resultado podemos concluir que si una función continua f tiene una primitiva F en un dominio Ω, el valor de su integral compleja desde un punto z_1 a un punto z_2 en Ω es independiente de la curva regular a trozos γ que se considere, supuesto que γ esté enteramente contenida en Ω, y el valor de la misma solo depende de los valores que alcanza dicha primitiva en el punto extremo y en el punto origen. Además, en este caso, si γ es un camino cerrado, se tendrá que

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

También es cierto el recíproco de la anterior proposición, es decir, se verifica:

Proposition *En las anteriores condiciones, si las integrales curvilíneas de una función continua f son independientes del camino en un dominio Ω, entonces f tiene una primitiva en todos los puntos de Ω.*

Como consecuencia de todo lo anterior, se ha obtenido el siguiente resultado (que no será sino la versión compleja del teorema de la independencia del camino de integración que estableceremos para integrales curvilíneas en el Tema 2.2):

Theorem *En las anteriores condiciones, si f es una función compleja definida en un abierto Ω de $\mathbb{C}$, son equivalentes:*

a) f posee función primitiva en Ω.

b) La integral de f no depende del camino de integración, sino que solo depende de los puntos origen y extremo del camino.

c) La integral de f a lo largo de cualquier camino cerrado es nula.

Example *La función continua $f(z) = z^2$ tiene una primitiva, que es la función $F(z) = \frac{z^3}{3}$. Por tanto, el valor de su integral entre los puntos $z_1 = 0$ a $z_2 = 1 + i$, viene dada por*

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{2}{3}(-1+i)$$

Example *La función* $f(z) = \frac{1}{z^2}$ *es continua en todo* $\mathbb{C}$ *salvo el origen. Puesto que esta función tiene a* $F(z) = -\frac{1}{z}$ *por función primitiva en el dominio* $|z| > 0$*, se tendrá que*

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2} dz = \left[-\frac{1}{z} \right]_{z_1}^{z_2} = \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}$$

para cualquier contorno de z_1 *a* z_2 *que no pase por el origen. En particular, tenemos que*

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz = 0$$

siendo γ *cualquier círculo centrado que no contenga al origen (círculo perforado).*

Example *En un ejemplo anterior, hemos visto que el valor de* $\int_\gamma \bar{z}\, dz$*, entre los puntos* $z_1 = 1$ *a* $z_2 = -1$*, es dependiente el camino que los une. Así, podemos concluir que la función* $f(z) = \bar{z}$ *no puede tener primitiva.*

Example *Sea* γ *la circunferencia* $|z-4| = 2$*. Razonar el valor de cada una de las siguientes integrales:*

$$a) \int_\gamma \frac{1}{z-1} dz \qquad b) \int_\gamma \frac{1}{z-4} dz \qquad c) \int_\gamma \frac{1}{z-3} dz \qquad d) \int_\gamma \frac{1}{z-6} dz$$

Teorema de Cauchy-Goursat.

Este teorema es el resultado fundamental de la teoría de integración compleja.

En el apartado anterior hemos visto que si una función f continua admite primitiva en D, su integral a lo largo de cualquier contorno cerrado γ contenido en D vale cero. El teorema de Cauchy-Goursat dará otras condiciones sobre f que garantizan que el valor de su integral a lo largo de un contorno cerrado y simple es cero:

Theorem ***(de Cauchy-Goursat)*** *Si* f *es analítica en todos los puntos de una curva de Jordan regular a trozos (y por tanto cerrada)* γ *y en todos los puntos de su interior, entonces*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

Example *A partir del resultado anterior, se verifica trivialmente que*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4} = 0$$

siendo γ *la circunferencia* $|z| = 1$*.*

Remark *Cuando estamos trabajando con curvas de este tipo (curvas de Jordan regulares a trozos, que siempre son cerradas), también solemos representar a las integrales mediante la forma*

$$\oint_\gamma f(z)dz$$

Remark *El teorema de Cauchy-Goursat también puede enunciarse, de manera equivalente, en la forma: "Si f es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces* $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ *para toda curva de Jordan regular a trozos* γ *contenida en D".*

Recordamos que un dominio ***simplemente conexo*** *es aquel dominio tal que toda curva de Jordan encierra solamente puntos de D (es, por tanto, una región "sin agujeros"). Un dominio que no es simplemente conexo (es decir, que tiene "agujeros") se llama* ***múltiplemente conexo****.*

Combinando los anteriores se llega a:

Corollary *Si* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *es analítica y* Ω *es simplemente conexo, entonces f posee una primitiva F en* Ω *y se tiene*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Este teorema puede extenderse a la frontera de dominios múltiplemente conexos:

Theorem *Sea* γ *una curva simple cerrada y regular a trozos, y sean* γ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ *un número finito de curvas simples cerradas y regulares a trozos, interiores todas a* γ*, tales que las regiones interiores a cada* γ_i *no tengan puntos en común. Sea R la región cerrada consistente en todos los puntos del interior y sobre* γ*, excepto los puntos interiores a cada* γ_i*. Llamemos B a toda la frontera orientada de R, que consiste en* γ *y todas las* γ_i*, recorridas de tal forma que los puntos de R permanecen a la izquierda de B. Entonces, si f es analítica en R, se tiene*

$$\int_B f(z)dz = 0$$

Example *Justificar que*

$$\int_B \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = 0$$

siendo B el círculo $|z| = 2$*, con orientación positiva, junto con el círculo* $|z| = 1$ *descrito en sentido negativo.*

Fórmulas integrales de Cauchy. Aplicación al cálculo de ciertas integrales.

En esta sección estableceremos las **fórmulas integrales de Cauchy**. Estos resultados afirman que si f es analítica sobre los puntos de un contorno γ y en su interior, los valores que toma f, o sus derivadas sucesivas, en los puntos del interior, estarán completamente determinados por los valores de f sobre γ.

Pero lo que es más interesante de estas fórmulas es que, a partir de las mismas, se pueden demostrar todas las propiedades locales y globales de las funciones holomorfas. Así, veremos que, a partir de las fórmulas integrales de Cauchy, podemos probar que las funciones holomorfas tienen derivadas de todos los ordenes, lo que nos permitirá realizar representaciones de las mismas mediante series de Taylor...

Theorem *Sea f analítica sobre una curva simple cerrada y regular a trozos γ y en todos los puntos de su interior. Entonces, si z_0 es cualquier punto interior a γ, se verifica*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

*donde γ está recorrida en sentido positivo. (A este resultado se le conoce como **fórmula integral de Cauchy**).*

Remark *Cuando la anterior igualdad se expresa en la forma*

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

se obtiene una fórmula que permite calcular determinadas integrales a lo largo de contornos cerrados simples.

Example *Sea γ la circunferencia $|z| = 2$. Si pretendemos calcular*

$$\oint_\gamma \frac{z}{(9-z^2)(z-i)}dz$$

observamos que la misma puede ponerse en la forma

$$\oint_\gamma \frac{\frac{z}{9-z^2}}{(z-i)}dz$$

y al ser $f(z) = \frac{z}{9-z^2}$ una función analítica sobre $|z| = 2$ y en los puntos de su interior, tendremos, en base a la fórmula integral de Cauchy, y puesto que el punto $z_0 = i$ es interior en dicha región,

$$\oint_\gamma \frac{\frac{z}{9-z^2}}{(z-i)}dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{i}{9-i^2} = -\frac{\pi}{5}$$

Example *Calcular*

$$\oint_\gamma \frac{\cos(z)}{z-1}dz \qquad y \qquad \oint_\gamma \frac{\cos(z)}{z+1}dz$$

siendo γ la frontera del triángulo de vértices $0,\ 2+2i$ y $2-2i$.

Example *Idem para*

$$\oint_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+1}dz$$

siendo γ la circunferencia de centro $2i$ y radio 2.

Theorem *En las mismas hipótesis anteriores, se tiene*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

*resultado al que se le conoce como **fórmula integral de Cauchy generalizada**.*

Remark *De forma análoga a fórmula integral de Cauchy, esta fórmula generalizada nos permite obtener el valor de determinadas integrales complejas, ya que se verifica*

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

Example *Calcular*

$$\oint_\gamma \frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3}dz$$

siendo γ *la circunferencia* $|z| = 2$.

Example *Idem para*

$$\oint_\gamma \frac{\cos(z)}{(z-1)^3(z-5)^2}dz$$

siendo γ *la circunferencia* $|z-4| = 2$.

Remark *En un tema posterior veremos que la mayoría de las integrales que pueden resolverse mediante la aplicación de las fórmulas anteriores, también pueden resolverse (y quizás de forma más sencilla) mediante residuos.*

Además de permitirnos calcular ciertas integrales complejas, estas fórmulas son importantes por las consecuencias que se deducen de ellas. Entre las mismas, es de destacar la primera de ellas, que manifiesta que si una función es analítica en un punto, automáticamente es indefinidamente derivable en un entorno de dicho punto. Esto es muy sorprendente porque difiere mucho de lo que sucede en el cálculo real: sabemos que si una función real es diferenciable una vez, nada puede afirmarse acerca de la existencia de la segunda derivada o derivadas superiores. Así, en este sentido las funciones analíticas complejas se comportan mucho más sencillamente que las funciones reales que tienen primera derivada.

Proposition *Se verifican los siguientes resultados:*

a) Si f *es analítica en* z_0, *entonces también lo son* $f', f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$

b) Si $f = u + iv$ *es analítica en* $z_0 = x_0 + iy_0$, *entonces todas las derivadas parciales de* u *y* v *son continuas en* (x_0, y_0).

c) Sea f *continua en un dominio* Ω *simplemente conexo. Supongamos que para toda curva de Jordan regular a trozos* γ *en* Ω *se verifica* $\int_\gamma f(z)dz = 0$. *Entonces* f *es analítica en* Ω. ***(Teorema de Morera)***

Teoremas de Liouville y D'Alembert.

Theorem ***(Liouville)*** *Si* f *es entera y* $|f|$ *está acotada en* $\mathbb{C}$, *entonces* f *es constante.*

Remark *Este teorema afirma que ninguna función entera, salvo las constantes, pueden* *ser acotadas en todo $\mathbb{C}$.*

De este último resultado se deduce:

Theorem ***(de D'Alembert** o **teorema fundamental del Álgebra)** Todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raíz. Consecuentemente, si $p(z)$ viene dado por $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ ($n \geq 1$, $a_n \neq 0$), la ecuación $p(z) = 0$ tiene exactamente n raíces, teniendo en cuenta las multiplicidades de cada una.*

Ejercicios resueltos.

1. (Septiembre 2012) *Dada la función*

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z(z+i)}$$

justificar si es cierto que

$$\int_\gamma f(z)dz = \pi(e - e^{-1})i$$

donde γ es la curva elíptica de ecuación

$$\gamma(t) = \pi\cos(t) + i\sqrt{2}\sin(t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(elipse se semiejes $a = \pi$ y $b = \sqrt{2}\,t$).

Solución: Esta integral podemos calcularla usando las fórmulas integrales de Cauchy, para lo que consideramos

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z+i}dz = 2\pi i g(-i) = 2\pi i \frac{\sin(-i)}{-i} = 2\pi\sin(i)$$

donde hemos tomado $g(z) = \frac{f(z)}{z}$. Y puesto que

$$\sin(i) = \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} = \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = -\frac{e - e^{-1}}{2}i$$

tendremos que

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi\sin(i) = 2\pi\left(-\frac{e - e^{-1}}{2}i\right) = -\pi(e - e^{-1})i$$

por lo que igualdad del enunciado no es cierta (aunque solo se diferencian en el signo).

2. (Septiembre 2012) *Dada la función*

$$f(z) = |x + y| + i(y - x)$$

calcular la integral de f a lo largo de la circunferencia unidad, es decir, calcular

$$\int_\sigma f(z)dz$$

con $\sigma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución: Teniendo en cuenta que $|x+y| = x + y$, si $x + y \geq 0$; y $|x+y| = -(x+y)$, si $x + y < 0$, tendremos que

$$f(z) = \begin{cases} x + y + i(y - x) & \text{si } x + y \geq 0 \\ -x - y + i(y - x) & \text{si } x + y < 0 \end{cases}$$

Puesto que la circunferencia unidad se encuentra en ambas regiones D_1 y D_2 (siendo D_1 el conjunto de puntos del plano tal que $x+y \geq 0$ y D_2 el conjunto tal que $x+y<0$), tendremos que

$$\oint_\sigma f(z)dz = \int_{D_1} f(z)dz + \int_{D_2} f(z)dz$$

y si calculamos ambas integrales de forma directa (por lo que hemos de sustituir en los integrandos la variable $z = x+iy$ por la ecuación de la curva $\sigma(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$, $t \in [0,2\pi]$)

$$\int_{D_1} f(z)dz = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (x+y+i(y-x))(x'+iy')dt =$$
$$= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos(t)+\sin(t)+i(\sin(t)-\cos(t)))(-\sin(t)+i\cos(t))dt = 0$$

mientras que

$$\int_{D_2} f(z)dz = \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} (-x-y+i(y-x))(x'+iy')dt =$$
$$= \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} (-\cos(t)-\sin(t)+i(\sin(t)-\cos(t)))(-\sin(t)+i\cos(t))dt = (1-i)\pi$$

Así,

$$\int_\sigma f(z)dz = (1-i)\pi$$

3. (Febrero 2015) *Calcular las siguientes integrales distinguiendo entre los posibles valores de* $r > 0$:

$$a)\ \int_{C_\alpha} 2(\bar{z}-2)dz, \text{ donde } \alpha(t) = 2+re^{it} \text{ para } t \in [0,2\pi]$$

$$b)\ \int_{C_\alpha} (3z^n + 4z^{n-1} - 16z^{15} + z^3 - 1)dz, \text{ donde } \alpha(t) = re^{it} \text{ para } t \in [0,2\pi] \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

Solución:

(3.a) La función a integrar es $f(z) = 2(\bar{z}-2)$, que no es analítica en ningún punto (podemos ver que no se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann). Por tanto, la única forma de calcular esta integral es hacerlo de forma directa, de manera que si sustituimos la ecuación de la curva en el integrando, tendremos

$$\int_{C_\alpha} 2(\bar{z}-2)dz = \int_0^{2\pi} 2\left(\overline{2+re^{it}}-2\right)ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} 2(re^{-it})ire^{it}dt = \ldots = 4\pi r^2 i$$

(3.b) En este caso la función a integrar $f(z) = 3z^n + 4z^{n-1} - 16z^{15} + z^3 - 1$ es analítica y es una función que tiene primitiva. Por tanto, y como el camino de integración es cerrado, se verifica

$$\int_{C_\alpha} (3z^n + 4z^{n-1} - 16z^{15} + z^3 - 1)dz = 0$$

independientemente del valor que tome $r > 0$.

4. (Septiembre 2016) *Dada la función*

$$g(z) = \frac{1-\cos(\frac{1}{z})}{(2\pi z-1)^3}$$

utilizar la fórmula integral de Cauchy para determinar el valor de la integral

$$\int_{|z-z_0|=R} g(z)dz$$

justificando de forma razonada porqué se puede aplicar esta fórmula, distinguiendo los distintos valores de $R < z_0$.

Solución: La segunda de las fórmulas integrales de Cauchy nos asegura que si f es analítica sobre una curva simple cerrada y regular a trozos γ y en todos los puntos de su interior, y si z_0 es cualquier punto interior a γ, se verifica

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

De esta forma, y puesto que la integral del enunciado puede ponerse en la forma (buscamos una forma similar a la de la fórmula anterior)

$$\int_{|z-\frac{1}{2\pi}|=R} \frac{1-\cos(\frac{1}{z})}{(2\pi z-1)^3}dz = \int_{|z-\frac{1}{2\pi}|=R} \frac{1-\cos(\frac{1}{z})}{(2\pi)^3\left(z-\frac{1}{2\pi}\right)^3}dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{|z-\frac{1}{2\pi}|=R} \frac{1-\cos(\frac{1}{z})}{\left(z-\frac{1}{2\pi}\right)^3}dz$$

se tendrá que si $R < \frac{1}{2\pi}$, la función del numerador $f(z) = 1-\cos(\frac{1}{z})$ es analítica en cualquier curva simple cerrada y regular a trozos y en todos los puntos de su interior (ya que si $R < \frac{1}{2\pi}$ entonces cualquier γ cumpliendo lo anterior, no contiene al 0, que es el punto donde $f(z)$ deja de ser analítica), por lo que aplicando la fórmula de Cauchy

$$\int_{|z-\frac{1}{2\pi}|=R} \frac{1-\cos(\frac{1}{z})}{(2\pi z-1)^3}dz = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{|z-\frac{1}{2\pi}|=R} \frac{1-\cos(\frac{1}{z})}{\left(z-\frac{1}{2\pi}\right)^3}dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\pi i}{2!}f^{(2)}\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \ldots = 2\pi^2 i$$

Por otro lado, si $R = \frac{1}{2\pi}$, la integral no puede calcularse al no cumplirse las condiciones (la curva por donde queremos calcular la integral pasa por el punto $z = 0$ en el que la función $f(z)$ no es analítica).

Ejercicios propuestos.

Dados los contornos γ y las funciones f de los ejercicios 1 a 5, usar representaciones paramétricas para γ a fín de calcular $\int_\gamma f(z)dz$:

1. $f(z) = \frac{z+2}{z}$, siendo γ :
   a. El semicírculo $z = 2e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$. (Solución: $-4+2\pi i$).
   b. El semicírculo $z = 2e^{i\theta}$ $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$. (Solución: $4+2\pi i$).
   c. El círculo $z = 2e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. (Solución: $4\pi i$).

2. $f(z) = z-1$, siendo γ :
   a. El semicírculo $z = 1+e^{i\theta}$ $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$. (Solución: 0).
   b. El segmento $0 \leq x \leq 2$ del eje real. (Solución: 0).

3. $f(z) = \pi\exp(\pi\bar{z})$, siendo γ el contorno del cuadrado con vértices en los puntos $0, 1, 1+i, i$,

orientado en sentido positivo. (Solución: $4(e^{\pi} - 1)$).

4. γ es el arco desde $z_1 = -1 - i$ hasta $z_2 = 1 + i$ a lo largo de $y = x^3$, siendo $f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < 0 \\ 4y & \text{si } y > 0 \end{cases}$. (Solución: $2 + 3i$).

5. $f(z) = 1$ y γ un contorno arbitrario desde el punto z_1 al punto z_2. (Solución: $z_2 - z_1$).

6. Calcular $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ siendo γ la ecuación dada por $z = \sqrt{4 - y^2} + iy$ con $-2 \le y \le 2$. (Solución: $4\pi i$).

7. Probar que si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino regular a trozos, L representa la longitud de γ y $M = \max|f|$ en $\gamma([a,b])$, entonces $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le ML$. Usar este resultado para:
   a. Dado γ el círculo $|z| = 2$ que va desde $z_1 = 2$ a $z_2 = 2i$, sin calcular la integral siguiente, probar que
$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 1}\right| \le \frac{\pi}{3}$$
   b. Probar que si γ es el contorno del triángulo con vértices $0, 3i, -4$, con orientación positiva, entonces
$$\left|\int_\gamma (e^z - \bar{z})dz\right| \le 60$$

8. Calcular las siguientes integrales, siendo el camino cualquier contorno arbitrario entre los límites de integración:
$$a)\ \int_i^{i/2} e^{\pi z}dz;\ b)\ \int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right)dz;\ c)\ \int_1^3 (z-2)^3 dz$$
(Solución: (a) $\frac{1+i}{\pi}$; (b) $e + 1/e$; (c) 0).

9. Aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para probar que $\int_\gamma f(z)dz = 0$, siendo γ el círculo $|z| = 1$, con cualquier orientación, y cuando:
$$a)\ f(z) = \frac{z^2}{z-3} \qquad b)\ f(z) = ze^{-z} \qquad c)\ f(z) = (z^2 + 2z + 2)^{-1}$$
$$d)\ f(z) = \frac{1}{\cosh(x)} \qquad e)\ f(z) = \tan(z) \qquad f)\ f(z) = \log(z+2)$$

10. Sea B el contorno del dominio entre $|z| = 4$ y el cuadrado cuyos lados están en las rectas $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Suponiendo B orientado de forma que los puntos del dominio queden a la izquierda de B, justificar por qué $\int_B f(z)dz = 0$, siendo:
$$a)\ f(z) = \frac{1}{3z^2 + 1}; \qquad b)\ f(z) = \frac{z+2}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}; \qquad c)\ f(z) = \frac{z}{1 - e^z}$$

11. Sea γ el contorno del cuadrado de lados $x = \pm 2$, $y = \pm 2$ recorrido en sentido positivo.

Calcular $\int_\gamma f(z)dz$ siendo:

$$a)\, f(z) = \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi i}{2}}; \qquad b)\, f(z) = \frac{\cos(z)}{z\left(z^2+8\right)}; \qquad c)\, f(z) = \frac{z}{2z+1}$$

$$d)\, f(z) = \frac{\tan\left(\frac{z}{2}\right)}{(z-x_0)^2} \qquad (-2 < x_0 < 2); \qquad e)\, f(z) = \frac{\cosh(z)}{z^4}$$

(Solución: (a) 2π; (b) $\frac{\pi i}{4}$; (c) $-\frac{\pi i}{2}$; (d) $\pi i \sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$; (e) 0).

12. Hallar $\int_\gamma f(z)dz$ siendo γ el círculo $|z-i| = 2$, en sentido positivo, y:

$$a)\, f(z) = \frac{1}{z^2+4}; \; b)\, f(z) = \frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}$$

(Solución: (a) $\frac{\pi}{2}$; (b) $\frac{\pi}{16}$)

13. Sea γ el círculo $|z| = 3$, en sentido positivo. Probar que si $g(w) = \int_\gamma \frac{2z^2-z-2}{z-w} dz$ $(|w| \neq 3)$, entonces $g(2) = 8\pi i$. ¿Cual es el valor de $g(w)$ si $|w| > 3$?.

14. Sea γ el círculo unidad $z = e^{i\theta}$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$. Probar, en primer lugar, que para cualquier constante real a, se verifica que

$$\int_\gamma \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$$

A continuación expresar esta integral en términos de θ para probar que

$$\int_0^\pi e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta)d\theta = \pi$$