# Tema 1.2: FUNCIONES ANALÍTICAS

PROGRAMA DETALLADO:

**Topología del plano complejo**.
**Funciones complejas de una variable compleja**.
**Límites y continuidad**.
**Derivación compleja**. **Propiedades**.
**Ecuaciones de Cauchy-Riemann**. **Relación con la derivada de una función en un punto**.
**Funciones analíticas**. **Funciones armónicas**.
**Ejercicios resueltos**.
**Ejercicios propuestos**.

En este tema vamos a considerar funciones de una variable compleja, para las cuales vamos a desarrollar una teoría de derivación. El objetivo fundamental de este tema será introducir las funciones analíticas, que jugarán un papel fundamental en el Análisis Complejo.

## Topología del plano complejo.

Puesto que estamos identificando, como ya ha quedado claro en el tema anterior, el plano complejo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, en $\mathbb{C}$ consideraremos la distancia euclídea de $\mathbb{R}^2$, es decir, consideramos que la distancia entre dos números complejos viene dada por

$$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

donde hemos denotado $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$.

**Definition** *Dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, se define el **disco o círculo abierto** de centro $z_0$ y radio $r$, como el conjunto*

$$D(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} \ \mid |z - z_0| < r\}$$

*Análogamente, el **disco o círculo cerrado** de centro $z_0$ y radio $r$ es el conjunto*

$$\bar{D}\,(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} \ \mid |z - z_0| \leq r\}$$

*mientras que la **circunferencia** de centro $z_0$ y radio $r$ es el conjunto*

$$C(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} \ \mid |z - z_0| = r\}$$

*Evidentemente se verifica que*

$$\bar{D}\,(z_0,r) = D(z_0,r) \cup C(z_0,r)$$

*Llamamos **anillo o corona** de centro $z_0$ y radios $r_1$ y $r_2$, con $0 < r_1 < r_2 \leq \infty$, al conjunto*

$$A(z_0,r_1,r_2) = \{z \in \mathbb{C} \ \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

*mientras que la **bola o disco perforado** de centro $z_0$ y radio $r$ es el conjunto*

$$D^*(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} \ \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

**Exercise** *Representar gráficamente los conjuntos de la anterior definición.*

**Definition** *Análogamente, se define un* ***entorno*** *de* $z_0 \in \mathbb{C}$ *como cualquier disco abierto de centro* $z_0$.

*Un subconjunto* $\Omega$ *de* $\mathbb{C}$ *se dice que es un* ***conjunto abierto*** *si cualquier punto de* $\Omega$ *tiene un entorno que consta completamente de puntos de* $\Omega$*, es decir, si para todo* $z_0 \in \mathbb{C}$ *existe* $r > 0$ *tal que* $D(z_0, r) \subset \Omega$.

*Un subconjunto* $\Omega$ *de* $\mathbb{C}$ *se dice que es un* ***conjunto cerrado*** *si su complementario* $\mathbb{C} \setminus \Omega$ *es un conjunto abierto.*

*Un punto* $z_0 \in \mathbb{C}$ *diremos que es un* ***punto frontera*** *de un conjunto* $\Omega$ *si todo entorno de* $z_0$ *contiene puntos que pertenecen a* $\Omega$ *y que no pertenecen a* $\Omega$*. Resulta evidente que un conjunto es abierto si no contiene a ninguno de sus puntos frontera y es cerrado si contiene a todos sus puntos frontera.*

*Diremos que un conjunto abierto* $\Omega$ *es* ***conexo*** *si dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse mediante una línea quebrada constituida por un número finito de segmentos de recta completamente contenidos en* $\Omega$.

*A un conjunto abierto conexo lo denominaremos* ***dominio****. (Por ejemplo un disco abierto y un anillo son dominios; un cuadrado abierto al que le quitamos una diagonal no es un dominio, ya que este conjunto no es conexo).*

*Una* ***región*** *es un conjunto que consta de un dominio además de algunos o todos sus puntos frontera.*

**Exercise** *Poner ejemplos de subconjuntos* $\Omega$ *de* $\mathbb{C}$ *que se correspondan con cada una de las anteriores definiciones.*

# Funciones complejas de una variable compleja.

**Definition** *Se llama* ***función compleja de una variable compleja*** *a una aplicación* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, *con* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *y a la que expresaremos por* $w = f(z)$. *Al conjunto* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *se le llama* ***dominio de definición*** *de* $f$.

*Como* $w = f(z) \in \mathbb{C}$, *si denotamos por* $u(z)$ *y* $v(z)$, *respectivamente, a las partes real e imaginaria de* $w$, *podremos escribir*

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

*donde* $u(z)$ *y* $v(z)$ *serán dos funciones reales de una variable compleja,* $u, v : \Omega \to \mathbb{C}$, *aunque también se pueden considerar como funciones reales de dos variables reales (al ser* $z = x + iy \equiv (x, y)$*), por lo que*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

*con* $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

*En general, expresaremos*

$$f = u + iv$$

*A* $u$ *se le denomina* ***parte real*** *de* $f$, *y a* $v$ ***parte imaginaria*** *de* $f$, *y las representaremos por* $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$.

Mas adelante veremos que las propiedades de $f$ podrán estudiarse a partir de las propiedades de sus funciones componentes $u(x,y)$ y $v(x,y)$.

**Example** *Un primer ejemplo de funciones de variable compleja lo tenemos con los* ***polinomios complejos****: Un polinomio con coeficientes complejos es una función* $p:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ *dada para* $z\in\mathbb{C}$ *por*

$$p(z)=a_n\cdot z^n+a_{n-1}\cdot z^{n-1}+\ldots+a_1\cdot z+a_0$$

*donde cada* $a_i\in\mathbb{C}$. *Los polinomios son funciones que se construyen usando sumas y productos de números complejos y, desde el punto de vista del cálculo, son las funciones más simples.*

Veamos como obtener la parte real e imaginaria de un polinomio de variable compleja:

**Example** *Por ejemplo, consideramos* $p(z)=z^2+2z+i$, *y suponiendo que* $z=x+iy$ *tenemos que*

$$p(z)=p(x+iy)=(x+iy)^2+2(x+iy)+i=\ldots=x^2-y^2+2x+i(2xy+2y+1)$$

*por lo que sus funciones componentes vienen dadas por*

$$u(x,y)=x^2-y^2+2x \qquad y \qquad v(x,y)=2xy+2y+1$$

**Exercise** *Hacer lo mismo con otras funciones más complicadas que la anterior como son* $p(z)=\frac{z}{z^2+i}$ *o* $q(z)=\frac{z^3+iz-1+i}{z}$.

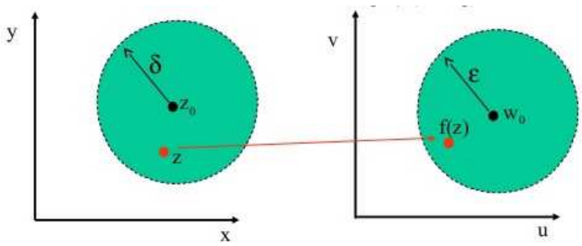
**Exercise** *Idem para las funciones, definidas en el tema anterior,* $f(z)=\cos(z)$, $g(z)=\sin(z)$, $h(z)=\tan(z)$. *Y lo mismo para las funciones hiperbólicas en el campo complejo.*

Muchas de las propiedades de una función real de variable real $y=f(x)$ se ponen de manifiesto mediante su gráfica, pero cuando se tiene una función de variable compleja, $w=f(z)$, con $z,w\in\mathbb{C}$, no es posible realizar una representación gráfica de la misma. Sin embargo, sí que podrá obtenerse alguna información sobre como se comporta la función compleja si indicamos pares de puntos correspondientes $z(x,y)$ y $w(u,v)$, y dibujamos los planos $z$ y $w$ por separado. En este caso, a las funciones de una variable compleja se les llamará también **transformaciones** (esta denominación procede del sentido geométrico de la aplicación, ya que una función $f$ transforma un punto $(x,y)$ del plano de la variable $z$, en un punto $(u,v)$ del plano de la variable $w$; y a las ecuaciones $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, se les suele llamar **ecuaciones de la transformación**).

# Límites y continuidad.

Dado que la topología del plano complejo es como la de $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclídea, la noción de límite de una variable compleja es similar a la misma noción para funciones vectoriales $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$:

**Definition** *Sea* $f:\Omega\to\mathbb{C}$, *con* $\Omega\subset\mathbb{C}$ *y que contiene un entorno reducido de* $z_0$. *Se dice que* $\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0$ *si para todo* $\varepsilon>0$ *existe un número real* $\delta(\varepsilon,z_0)>0$ *tal que si* $0<|z-z_0|<\delta$, *entonces* $|f(z)-w_0|<\varepsilon$.




Si bien esta definición nos da una forma para comprobar si un valor complejo dado, $w_0$, es el límite de una determinada función en un punto, no pone en nuestras manos un método para determinar dicho límite (ya que intentar calcular límites utilizando la definición es muy complicado). Sin embargo, sí que nos ayuda en la demostración de las siguientes propiedades:

**Proposition** *El límite de una función en un punto, si existe, es único.*

**Proposition** *Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, con $z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$. Entonces,*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \text{ y } \lim_{(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

.

Precisamente esta última propiedad nos establece una conexión entre los límites de funciones de una variable compleja y los de las funciones reales de dos variables reales (estudiados en la asignatura de Matemáticas I). Así, todas las operaciones conocidas para los límites de dos variables reales, se verifican para estos nuevos límites.

**Example** *Por ejemplo, trivialmente se verifica que*

$$\lim_{z\to 1} \frac{z}{z+1} = \frac{1}{2}$$

*ya que no existe indeterminación si se sustituye $z$ por $1$ (en realidad ésto es así ya que la función dada es continua -como veremos posteriormente- en el punto $z_0 = 1$).*

*Pero si queremos calcular*

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = \frac{0}{0}$$

*obtenemos una indeterminación, que para resolverla usaremos la anterior propiedad junto con lo aprendido en Matemáticas I para resolver límites indeterminados de funciones con $2$ variables reales (que básicamente consistía en realizar un cambio a coordenadas polares).*

*Así, descomponemos la función en la forma $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ :*

$$\frac{\bar{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = \frac{(x - iy) + i(x^2 - y^2 + 2xyi)}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} = \frac{x - 2xy}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} + i\frac{x^2 - y^2 - y}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}}$$

*y la anterior proposición nos asegura que*

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - 2xy}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} + i \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2 - y}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}}$$

*Si calculamos ambos por separado realizando un cambio a polares resulta que los dos límites anteriores valen $0$, por lo que*

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = 0 + i0 = 0$$

**Exercise** *Probar que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}+iz^2}{|z|}$$

**Exercise** *Calcular los siguientes límites:*

$$a)\ \lim_{z\to 2i}(2x+iy^2)\quad b)\ \lim_{z\to -1}\frac{iz+3}{z+1}\quad c)\ \lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{\sinh(iz)}$$

$$d)\ \lim_{z\to e^{\pi i/3}}(z-e^{\pi i/3})\frac{z}{z^3+1}\quad e)\ \lim_{z\to\infty}\frac{2z+i}{z+1}$$

**Definition** *De forma análoga a lo ya conocido, diremos que una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ con $\Omega\subset\mathbb{C}$, definida en un entorno de $z_0$, es* ***continua*** *en $z_0$ si existen $f(z_0)$ y $\lim_{z\to z_0} f(z)$ y ambos resultados coinciden.*

A raíz de esta definición, y en base a las anteriores propiedades, es inmediato establecer:

**Proposition** *Una función $f=u+iv$ es continua en $z_0=x_0+iy_0$ si y sólo si $u$ y $v$ son continuas en $(x_0,y_0)$.*

**Example** *Justificar porqué la función $f(z)=e^{x+y}+i\cos(x^2+y^2)$ es continua en todo el plano $\mathbb{C}$.*

**Remark** *Este último resultado nos permite demostrar las propiedades relacionadas con el álgebra de funciones continuas, es decir, que la suma, resta, producto y cociente de funciones complejas continuas en un punto es una función continua en dicho punto (para el caso del cociente hemos de exigir que el denominador no se anule en el punto), así como que la composición de funciones complejas continuas es otra función continua.*

También se verifica:

**Proposition** *Si $f$ es continua en una región compacta (cerrada y acotada) $\Omega\subset\mathbb{C}$, entonces la función $|f(z)|$ alcanza un máximo y un mínimo sobre $\Omega$, es decir, existen $z_0$, $z_1\in\Omega$ tales que $m=|f(z_0)|\le|f(z)|\le|f(z_1)|=M$, $\forall z\in\Omega$.*

# Derivación compleja. Propiedades.

En $\mathbb{C}$ se define la derivada de una función en un punto de forma análoga a como se hace en $\mathbb{R}$:

**Definition** *Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$, con $\Omega\subset\mathbb{C}$ y $z_0\in\Omega$. Se llama* ***derivada*** *de $f$ en $z_0$ al valor del límite (en el supuesto que exista)*

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

**Example** *Establecer la derivada de la función* $f(z) = z^2$.

Introducida esta definición, veremos que la estructura formal de la derivación y el cálculo algorítmico que conlleva es idéntica a $\mathbb{R}$. De esta forma, todas las propiedades conocidas para funciones reales, también se verifican para las funciones complejas. Inclusive podremos enunciar una versión de la Regla de L'Hôpital análoga a la conocida para funciones reales:

**Proposition** *Si* $f(z)$ *es derivable en un punto* $z_0$*, entonces* $f$ *es continua en* $z_0$.

**Proposition** *Sean* $f(z)$ *y* $g(z)$ *derivables en un punto* $z_0$*. Entonces:*

*a)* $f \pm g$ *es derivable en* $z_0$ *y* $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$.

*b)* $f \cdot g$ *es derivable en* $z_0$ *y* $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

*c)* $\frac{f}{g}$ *es derivable en* $z_0$ *(donde suponemos que* $g(z) \neq 0$ *en un entorno de* $z_0$*) y se verifica*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

**Proposition** *Si* $f$ *es derivable en* $z_0$ *y* $g$ *lo es en* $f(z_0)$*, entonces la función compuesta* $g \circ f$ *es derivable en* $z_0$ *y se tiene que*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

**Example** *Establecer la derivada de* $f(z) = (3z^4 + 2i)^4$.

**Proposition** *(Regla de L'Hôpital) Sean* $f(z)$ *y* $g(z)$ *derivables en un entorno del punto* $z_0$*. Si* $f(z_0) = g(z_0) = 0$ *y* $g'(z_0) \neq 0$*, entonces*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

*suponiendo que existe este último límite.*

**Example** *Aplicar la Regla de L'Hôpital para calcular:*

$$a)\ \lim_{z \to i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1} \quad b)\ \lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos(z)}{\sin^2(z)} \quad c)\ \lim_{z \to 0} \left(\frac{\sin(z)}{z}\right)^{\frac{1}{z^2}}$$

# Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Relación con la derivada de una función en un punto.

Como hemos visto, desde el punto de vista formal, calcular la derivada de una función de variable compleja no presenta diferencias con el caso de calcular la derivada para una función de variable real (en lugar de derivar respecto de $x$ derivamos respecto de $z$). Sin embargo, sí que existirá diferencia si en lugar de derivar respecto de $z$, expresamos $f(z)$ en función de sus componentes $u(x,y), v(x,y)$ e intentamos derivar respecto de las variables $x$ e $y$, lo que conllevará calcular derivadas parciales. En este caso, la definición compleja impondrá en las funciones derivables un comportamiento especial, lo que determinará, como veremos, una teoría completamente distinta de la correspondiente en $\mathbb{R}$: En primer lugar, una función compleja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, puede no ser derivable en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ aunque que sus funciones componentes $u$ y $v$ sean diferenciables, incluso con continuidad, en $(x_0,y_0)$. Pero, de la existencia de $f'(z_0)$ si se deducirá la diferenciabilidad de $u$ y $v$ en $(x_0,y_0)$, pues obligará a que $u$ y $v$ cumplan en $(x_0,y_0)$ las igualdades que se conocerán con el nombre de condiciones de Cauchy-Riemann. En concreto, se verifica el siguiente resultado:

**Theorem** *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Si $f$ es derivable en $z_0$, entonces existen las derivadas parciales primeras de $u$ y $v$ en $(x_0,y_0)$ y se verifican las siguientes ecuaciones, que se conocen como* ***ecuaciones de Cauchy-Riemann****:*

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$$

*Además, se verifica que la derivada de la función en el punto $z_0$ viene dada por*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} \qquad (*)$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones necesarias para la existencia de la derivada de una función y además nos permiten obtener esta derivada a partir de las derivadas parciales de $u$ y $v$; es decir, si la función es derivable en $z_0$, entonces se han de cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Sin embargo, a nosotros lo que más nos va a interesar es el recíproco, es decir: ¿podemos garantizar la existencia de $f'(z_0)$ a partir de la existencia de las derivadas parciales de $u$ y $v$?. Esto nos lo dice el siguiente teorema.

No obstante, el teorema anterior sí que suele utilizarse para localizar los puntos en los que $f$ no admite derivada (puesto que si no se cumpen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto, podemos asegurar que la función no es derivable en dicho punto):

**Example** *Probar que la función $f(z) = |z|$ no es derivable si $z \neq 0$.*

**Theorem** *Supongamos que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ está definida en un entorno de $z_0 = x_0 + iy_0$, y que las funciones reales $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son diferenciables en el punto $(x_0,y_0)$, interior a su dominio de definición. Entonces, si $u$ y $v$ verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $(x_0,y_0)$, $f$ es derivable en $z_0$.*

**Remark** *Éste último resultado será el que utilizaremos para comprobar si una función compleja es derivable en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ : Lo será si las funciones reales $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son diferenciables en $(x_0,y_0)$ y si verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en dicho punto. Además, en tal caso la derivada viene dada por la expresión $(*)$.*

**Example** *Probar que la función $f(z) = z^2$ es derivable en cualquier punto $z_0$ y establecer su derivada.*

**Example** *Probar que la función $f_1(z) = e^z$ es derivable en cualquier punto $z_0$ y establecer* *su derivada.*

# Funciones analíticas. Funciones armónicas.

**Definition** *Una función f se dice que es* ***analítica*** *(u* ***holomorfa) en un punto*** $z_0$ *si es derivable en todos los puntos de un cierto entorno de* $z_0$. *Una función se dice* ***entera*** *si es analítica en todo* $\mathbb{C}$.

**Definition** *Para el caso particular en que f sea analítica en un cierto entorno reducido de* $z_0$ *pero no lo sea en el propio* $z_0$, *diremos que* $z_0$ *es un* ***punto singular*** *o que es una* ***singularidad*** *de f.*

El estudio de las singularidades de una función será una cuestión importante y al que dedicaremos una sección en un próximo tema.

**Example** *Determinar los puntos singulares de*

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^3+z}$$

**Remark** *En virtud de los resultados anteriores, una función* $f = u + iv$ *es analítica en* $z_0$ *si u y v son diferenciables en* $z_0 = x_0 + iy_0$ *y si se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en* $z_0$.

Vemos a continuación una definición que afecta a funciones reales con dos variables reales y que, como veremos, está íntimamente relacionada con el que una función de variable compleja sea analítica:

**Definition** *Una función* $h : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es* ***armónica*** *si es de clase* $\mathcal{C}^2$ *en D y si verifica la* ***ecuación de Laplace***

$$\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Que una función de variable compleja sea analítica está relacionado con que tanto su parte real como su parte imaginaria sean funciones armónicas. De hecho, se verifica:

**Proposition** *Si* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *es analítica en un dominio* $\Omega$, *entonces u y v son armónicas en* $\Omega$.

**Remark** *Este resultado también nos sirve para establecer cuando una función compleja* $f(z)$ *no es analítica: Si sus funciones parte real* $u(x,y)$ *y parte imaginaria* $v(x,y)$ *no son armónicas, entonces* $f(z)$ *no puede ser analítica.*

*Sin embargo, si* $u(x,y)$ *y* $v(x,y)$ *sí que son armónicas, no podemos asegurar que sea analítica. Para que lo sea, tendremos que exigir, además, que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann, como establecemos a continuación.*

**Definition** *Si u y v son armónicas en D y sus derivadas parciales de primer orden satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D, se dice que v es la* ***armónica conjugada*** *de u.*

**Remark** *De esta forma, si* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *es analítica en un dominio* $\Omega$, *entonces v es la armónica conjugada de u; y recíprocamente, si v es la armónica conjugada de u, entonces* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *es analítica en* $\Omega$.

**Example** *Reconstruir la función analítica* $f(z)$ *a partir de su parte real* $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$, *con la condición* $f(i) = 2i - 1$.

**Example** *(Derivadas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas) Sabemos que la función* $f(z) = e^z$ *es entera y que su derivada viene dada por* $f'(z) = e^z$. *Por tanto, las funciones trigonométricas* $\sin(z)$ *y* $\cos(z)$ *también serán enteras (al ser combinaciones lineales de las funciones enteras* $e^{iz}$ *y* $e^{-iz}$.

*Entonces, tendremos*

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow (\sin(z))' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z)$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow (\sin(z))' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin(z)$$

*Y lo mismo podemos realizar para las funciones hiperbólicas, resultando*

$$(\sinh(z))' = \cosh(z); \qquad (\cosh(z))' = \sinh(z)$$

**Example** *¿Cuando serán derivables las funciones* $g_1(z) = \tan(z)$ *y* $g_2(z) = \tanh(z)$*?*

# Ejercicios resueltos.

1. (Febrero 2012) *Sean* $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *funciones de clase* $C^1$. *Se define la función* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *de forma que* $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

1.a *Comprobar que si f es holomorfa, entonces u es armónica, es decir, verifica la ecuación* $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

1.b *Si* $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 3$, *hallar* $v(x,y)$ *de manera que f sea holomorfa, con* $f(2-i) = -8i$.

**Solución**:

(1.a) Si *f* es holomorfa, significa que se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. De esta manera tendremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Por tanto es evidente que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

por lo que $u$ es función armónica.

(1.b) De nuevo por las ecuaciones de C-R tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y - 1$$

Así

$$v(x,y) = \int (2x + 2y - 1)dy = 2xy + y^2 - y + g(x)$$

Para hallar $g(x)$ usaremos la segunda de las ecuaciones de C-R: De $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ se llega a

$$2y + g'(x) = -(-2y + 2x)$$

por lo que $g'(x) = -2x$ y $g(x) = -x^2 + cte$.

Así se tiene que

$$v(x,y) = 2xy + y^2 - y - x^2 + cte$$

siendo por tanto

$$f(x + iy) = (x^2 - y^2 + 2xy - x + 3) + i(2xy + y^2 - y - x^2 + cte)$$

Solo tenemos que hallar la $cte$, para lo que usaremos que $f(2 - i) = -8i$: Como

$$-8i = f(2 - i) = \ldots = 0 + i(-6 + cte)$$

resulta ser $cte = -2$.

2. (Junio 2012) *Sea* $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *definida por* $u(x + iy) = xy$. *Determinar la función* $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *de forma que*

$$f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$$

*sea holomorfa (derivable) en todo* $\mathbb{C}$, *con* $f(0) = 0$.

**Solución**: Si $f$ es holomorfa, significa que se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. De la primera, tendremos $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = y$. Así

$$v(x,y) = \int y dy = \frac{y^2}{2} + g(x)$$

Para hallar $g(x)$ usaremos la segunda de las ecuaciones de C-R: De $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ se llega a $-g'(x) = x$, por lo que $g'(x) = -x$ y $g(x) = -\frac{x^2}{2} + cte$.

Así se tiene que

$$v(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + cte$$

Por tanto

$$f(x + iy) = xy + i\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + cte\right)$$

y como $f(0,0) = (0,0)$, se tiene que $cte = 0$.

3. (Septiembre 2012) *Sea la función*

$$f(z) = |x + y| + i(y - x)$$

*Determinar el conjunto de puntos del plano $\mathbb{C}$ en los que f es derivable.*

**Solución**: Teniendo en cuenta que $|x + y| = x + y$, si $x + y \geq 0$, y que $|x + y| = -(x + y)$, si $x + y < 0$, tendremos que

$$f(z) = \begin{cases} x + y + i(y - x) & \text{si } x + y \geq 0 \\ -x - y + i(y - x) & \text{si } x + y < 0 \end{cases}$$

Por tanto consideraremos ambas regiones para estudiar cuando es derivable:

- En la región $x + y \geq 0$ : Si consideramos $u = x + y$, $v = y - x$, es inmediato ver que se cumplen las ecuaciones de Cauchy - Riemann, por lo que *f* será derivable en dicha región del plano complejo.

- En la región $x + y < 0$ : Si $u = -x - y$, $v = y - x$, es inmediato ver que no se cumplen las ecuaciones de Cauchy - Riemann, por lo que *f* no será derivable.

4. (Febrero 2013) *¿Para qué puntos del plano complejo es derivable la función $f(z)$ siguiente?*

$$f(x + iy) = y\sin(x) + iy^2$$

*¿Tiene alguna singularidad aislada?*

**Solución**: Sabemos que para que una función de la forma $f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea derivable en un punto se han de verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, siempre que $u(x,y)$ y $v(x,y)$ sean funciones diferenciables (cosa que, evidentemente, ocurre en este caso). Veamos por tanto en qué puntos se verifican estas igualdades, donde consideramos $u(x,y) = y\sin(x)$, $v(x,y) = y^2$ :

* De $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ se llega a

$$y\cos(x) = 2y$$

de donde

$$y(\cos(x) - 2) = 0$$

por lo que

$$y = 0 \text{ ó } \cos(x) = 2$$

y como este último resultado es imposible, tendrá que ser $y = 0$.

* De $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ se llega a $\sin(x) = 0$, de donde $x = k\pi$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, $f(z)$ solo será derivable en puntos de la forma $(k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Esto quiere decir que sus singularidades no son aisladas, sino que los que son aislados son los puntos donde la función es derivable.

5. (Junio 2013) *Dada la función*

$$f(x+yi) = y\sin(x) + \frac{y^2}{2}i$$

*y el número complejo* $z_0 = 2\pi + i$, *indicar si la función* $f$ *es derivable en* $z_0$.

**Solución**: Para ver si $f$ es derivable en $z_0 = 2\pi + i$ solo hemos de ver que si hacemos $u(x,y) = y\sin(x)$ y $v(x,y) = \frac{y^2}{2}$ se verifican en dicho punto las ecuaciones de Cauchy Riemann (ya que $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son funciones diferenciables); es decir, hemos de comprobar si en $z_0$ se verifica que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ . Pero al ser

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,1) = 1; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}(2\pi,1) = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(2\pi,1) = 0; \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial v}{\partial x}(2\pi,1) = 0$$

por tanto, la función si es derivable en dicho punto.

6. (Febrero 2014) *Determinar la constante K para que*

$$u(x,y) = x\sin(x)\cosh(y) - Ky\cos(x)\sinh(y)$$

*sea armónica. Determinar su armónica conjugada.*

**Solución**: Para que $u(x,y)$ sea armónica ha de verificarse que $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Entonces como

$$u_x = \sin x\cosh y + x\cos x\cosh y + Ky\sin x\sinh y$$

$$u_{xx} = 2\cos x\cosh y - x\sin x\cosh y + Ky\cos x\sinh y$$

$$u_y = x\sin x\sinh y - K\cos x\sinh y - Ky\cos x\cosh y$$

$$u_{yy} = x\sin x\cosh y - 2K\cos x\cosh y - Ky\cos x\sinh y$$

tendremos que

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow 2\cos x\cosh y - 2K\cos x\cosh y = 0 \Leftrightarrow K = 1$$

Para hallar la armómica conjugada, usaremos las ecuaciones de Cauchy - Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ :

De la primera, tenemos que

$$v_y = u_x = \sin x\cosh y + x\cos x\cosh y + y\sin x\sinh y$$

por lo que

$$v(x,y) = \int v_y dy = \int(\sin x\cosh y + x\cos x\cosh y + y\sin x\sinh y)dy =$$

$$= x\cos x\sinh y + y\sin x\cosh y + g(x)$$

(donde las dos primeras integrales son inmediatas y la tercera se realiza por partes).

Para hallar $g(x)$ usaremos la segunda de las ec. de C-R: De $u_y = -v_x$, se tiene

$$x\sin x\sinh y - \cos x\sinh y - y\cos x\cosh y = -(\cos x\sinh y - x\sin x\sinh y + y\cos x\cosh y + g'(x))$$

de donde

$$g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = cte$$

Por tanto

$$v(x,y) = x\cos x\sinh y + y\sin x\cosh y + cte$$

7. (Febrero 2016) *Encontrar una condición necesaria y suficiente que deben cumplir los números reales $a,b,c$ para que exista una función $f$, holomorfa en todo $\mathbb{C}$, tal que*
$$\mathrm{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2$$
*Determinar, cuando dicha condición se cumpla, todas las funciones enteras $f(z)$ cuya parte real es la indicada.*

**Solución**: Para que la función $u(x,y) = \mathrm{Re} f(x+iy)$ sea la parte real de una función holomorfa ha de verificar que ha de ser armónica. Por tanto, y al ser

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + by; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = bx + 2cy; \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c$$

será armónica si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow c = -a$$

Consideramos entonces $u(x,y) = ax^2 + bxy - ay^2$, y usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, determinaremos la parte imaginaria de dicha función $f$ :

De

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 2ax + by \Rightarrow v(x,y) = \int (2ax+by)dy = 2axy + b\frac{y^2}{2} + g(x)$$

y para determinar $g(x)$ usaremos la segunda de las ec. de C-R:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow 2ay + g'(x) = -(bx - 2ay) \Rightarrow g'(x) = -bx \Rightarrow g(x) = -b\frac{x^2}{2} + cte$$

Así, tenemos que la función siguiente es analítica en todo $\mathbb{C}$ :

$$f(z) = f(x+iy) = (ax^2 + bxy - ay^2) + i\left(2axy + b\frac{y^2}{2} - b\frac{x^2}{2} + cte\right)$$

8. (Febrero 2017) *Sea $f(z)$ una función analítica tal que* $\mathrm{Re}(f) = cte$. *Probar que $f(z)$ es constante.*

**Solución**: Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es tal que $\mathrm{Re}(f) = u(x,y) = k_1$ $(cte)$, se tiene que, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

De la primera igualdad, resulta que

$$v(x,y) = \int 0dx + g(y) = g(y)$$

y si sustituimos en la segunda,

$$0 = \frac{\partial v}{\partial y} = g'(y)$$

por lo que $g(y) = k_2$ $(cte)$.

Por todo lo anterior, tenemos que

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = k_1 + ik_2$$

por lo que efectivamente $f$ es constante.

# Ejercicios propuestos.

1. Estudiar si las siguientes funciones definidas en $\mathbb{C}$ son analíticas y, en caso afirmativo, calcular su derivada:

   *a)* $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$

   *b)* $f(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$

   *c)* $f(z) = \bar{z}\ \mathrm{Im}(z)$

   *d)* $f(z) = \cos(2z) + 3i$

   *e)* $f(z) = 2z\ \bar{z}$

   *f)* $f(z) = (3z^4 + \sin(z))e^z$

   *g)* $f(z) = e^{-3y}e^{ix}$

   *h)* $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy}$

   *i)* $f(z) = xy + iy$

   *j)* $f(z) = e^y e^{ix}$

2. Probar que las siguientes funciones son armónicas y hallar una armónica conjugada:

   *a)* $u(x,y) = 2x(1-y)$

   *b)* $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

   *c)* $u(x,y) = \sinh(x)\sin(y)$

   *d)* $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

3. Probar que si $v_1(x,y)$ y $v_2(x,y)$ son armónicas conjugadas de una misma función $u(x,y)$ en un dominio $D$, entonces $v_1$ y $v_2$ se diferencian en una constante.

4. Probar que si $v(x,y)$ es armónica conjugada de $u(x,y)$ en $D$ y $u$ es armónica conjugada de $v$, entonces $u$ y $v$ son constantes en $D$.

5. Expresar la función $\mathrm{Re}(e^{1/z})$ en términos de $x$ e $y$. Probar que esta función es armónica en todo dominio que no contenga al origen, y hallar su armónica conjugada.

6. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función analítica en $D$. Justificar porqué las funciones

   $$U(x,y) = e^{u(x,y)}\cos(v(x,y)); \qquad V(x,y) = e^{u(x,y)}\sin(v(x,y))$$

   son armónicas en $D$ y porqué $V(x,y)$ es, de hecho, la armónica conjugada de $U(x,y)$.