Profesor: **Roque Molina Legaz**

Tema 1.1: LOS NÚMEROS COMPLEJOS

PROGRAMA DETALLADO:

Introducción.

Históricamente los números complejos se introducen para resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Esta ecuación no tiene solución real, es decir, no existe ningún número real cuyo cuadrado sea -1. Tanto esta operación como otras que no tienen solución en $\mathbb{R}$ (como, por ejemplo, calcular raíces de índice par y radicando negativo o calcular logaritmos de números negativos o con base negativa), crean la necesidad de construir un cuerpo conmutativo, que contenga a $\mathbb{R}$ y tal que todas estas operaciones tengan sentido. Precisamente, a obtener dicho cuerpo (al que llamaremos **cuerpo de los números complejos** y que designaremos por $\mathbb{C}$) dedicaremos este tema, y que es el primero del bloque de Análisis Complejo.

El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Definición. Forma binómica. Operaciones en forma binómica.

Son muchas las formas en las que puede ampliarse $\mathbb{R}$. El método que seguiremos consistirá en partir del espacio $\mathbb{R}^2$ y definir adecuadamente una suma y un producto. En concreto, definiremos

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y') \qquad (*)$$
$$(x,y) \cdot (x',y') = (xx' - yy', xy' + yx') \qquad (**)$$

Remark *a) Se prueba que* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *es un cuerpo, al que se designa por* $\mathbb{C}$ *y se le llama el* ***cuerpo*** $\mathbb{C}$ ***de los números complejos***.

b) El neutro para la suma es el par $(0,0)$*, mientras que para el producto es* $(1,0)$ *(Basta con probar que* $(x,y) + (0,0) = (x,y)$*, mientras que* $(x,y) \cdot (1,0) = (x,y)$*, donde estas operaciones se realizan a partir de* $(*)$ *y de* $(**)$*).*

c) Por la forma en la que se han definido estas operaciones, resultará posible la operación inversa para el producto (salvo la división por cero). Puede verificarse que el inverso del par $(x,y) \neq (0,0)$ *es* $(x',y') = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$*. Para probar ésto* *solo hemos de verificar, a partir de la operación definida en* $(**)$, *que se verifica*

$$(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=(1,0)$$

d) Como veremos, en este nuevo cuerpo así construido tendrán solución (aunque no será única) todas las operaciones algebraicas referenciadas anteriormente y que no pueden realizarse en $\mathbb{R}$*. De esta forma que ya no será necesario realizar una nueva ampliación de* $\mathbb{C}$ *a otro conjunto. Sin embargo, ocurrirá que* $\mathbb{C}$*, a diferencia de* $\mathbb{R}$*, no admitirá ninguna relación de orden compatible con su estructura de cuerpo, es decir, que mientras que en* $\mathbb{R}$ *es posible hablar de números ordenados (dados dos números reales, podemos ver cual de ellos es mayor o menor que el otro), esto es imposible en* $\mathbb{C}$*. De igual forma, no tiene sentido hablar de números complejos positivos o negativos.*

e) Consideremos los números complejos $(x_1,0)$ *y* $(x_2,0)$*. Si los sumamos y multiplicamos (usando las operaciones definidas anteriormente por* $(*)$ *y* $(**)$*), resulta que*

$$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)$$

$$(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1x_2,0)$$

por lo que podemos comprobar que los números complejos con parte imaginaria nula se comportan matemáticamente como números reales. Es más, se puede probar que el conjunto $\mathbb{R}\times\{0\}$ *es un subcuerpo de* $\mathbb{C}$ *isomorfo a* $\mathbb{R}$*, por lo que puede identificarse al número real x, con el número complejo* $(x,0)$*; es decir, como veremos posteriormente, los números complejos* $\mathbb{C}$ *se representan en todo el plano* $\mathbb{R}^2$*, siendo los números reales los que "ocupan" el eje X de dicho plano. Por ello, pondremos* $(x,0)\equiv x$*.*

Proposition *Se verifican:*

a) En $\mathbb{C}$ *tiene solución la ecuación* $z^2=-1$*: La solución es el número complejo* $z=(0,1)$*, puesto que*

$$z^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)\equiv-1$$

A este complejo solución de dicha ecuación, se le llama ***unidad imaginaria****, y se representa por* i*. De esta forma* $i\equiv(0,1)$*.*

b) Cualquier complejo $z=(x,y)$ *se puede escribir de forma única en la forma* $z=x+iy$*, ya que*

$$z=(x,y)=x(1,0)+y(0,1)=x\cdot1+y\cdot i=x+iy$$

A esta nueva forma de representar los números complejos se le llama ***forma binómica, algebraica o cartesiana****. A x se le llama* ***parte real*** *y a y* ***parte imaginaria****, y suelen representarse, respectivamente, por* $x=Re(z)$, $y=Im(z)$*.*

Definition *Se denomina* ***conjugado*** *del número complejo* $z=x+iy$ *al número complejo, que denotamos por* $\bar{z}$*, dado por* $\bar{z}=x-iy$*.*

Proposition *Si z y* z' *son dos números complejos cualesquiera, se verifican:*

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

c) z es imaginario puro $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$

d) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

e) $\overline{z \bullet z'} = \overline{z} \bullet \overline{z'}$

Proposition ***(Operaciones en forma binómica)*** *Dados los números complejos* $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, *se verifican:*

a) ***Suma y resta***: $z \pm z' = (x+iy) \pm (x' + iy') = (x \pm x') + i(y \pm y')$

b) ***Producto***: $z \bullet z' = (x+iy) \bullet (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

c) ***Cociente***: $\frac{z}{z'} = \frac{x+iy}{x'+iy'} = \frac{x+iy}{x'+iy'} \bullet \frac{x'-iy'}{x'-iy'} = \frac{xx'+yy'}{x^2+y^2} + i\frac{x'y-xy'}{x^2+y^2}$

Cualquier otra operación (raíz cuadrada, exponencial, logaritmos, etc. es más aconsejable realizarla expresando el número complejo en otra forma (que será la forma polar o módulo-argumental), como veremos más adelante.

Remark *A raíz de éste último resultado, cuando tengamos que multiplicar dos números complejos* (x,y) *y* (x',y'), *en lugar de aplicar la expresión dada al principio por* $(**)$, *es más sencillo poner ambos en forma binómica y realizar la multiplicación de ambos números como si fuese el producto de dos paréntesis, teniendo en cuenta que* $i^2 = -1$:

$$(x,y) \bullet (x',y') = (x+iy) \bullet (x'+iy') =$$
$$= xx' + ixy' + iyx' + i^2yy' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$$

Lo mismo realizaremos para obtener el cociente de dos números complejos.

Example *Dados los números complejos* $z_1 = -2 - i$ *y* $z_2 = -4 + i$, *hallar* $z_1 + z_2$, $3z_1 - 2z_2$, $z_1 \bullet z_2$, $(z_2)^{-1}$ *y* $\frac{z_1}{z_2}$.

Representación geométrica.

La aplicación de $\mathbb{C}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$$
$$z = x + iy \mapsto (x,y)$$

que a cada número complejo $z = x + iy$ le asocia un punto de coordenadas (x,y) es biyectiva (es decir, dado un número complejo $z = x + iy$, a éste le corresponde un único par (x,y) de puntos del plano, y viceversa). El punto (x,y) se llama **afijo** del complejo $z = x + iy$.

Los números reales tienen sus afijos en el eje de abcisas o **eje real**; los números imaginarios puros tienen sus afijos en el eje de ordenadas o **eje imaginario**.

Un número complejo y su opuesto tienen sus afijos simétricos respecto del origen; un número complejo y su conjugado tienen sus afijos simétricos respecto del eje real.

Módulo y argumento. Formas trigonométrica y módulo-argumental.

Definition *Se llama **módulo** del número complejo $z = x + iy$ al número real no negativo dado por*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De la definición resultan las siguientes propiedades:

Proposition *Se verifican, para z y z' números complejos:*

a) $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

b) $|Re(z)| \leq |z|$ *y* $|Im(z)| \leq |z|$

c) $|z| \geq 0$, *y es* $|z| = 0$ *sí y sólo sí* $z = 0$

d) $|\alpha \cdot z| = |\alpha||z|$, *siendo* $\alpha \in \mathbb{R}$

e) $|z \cdot z'| = |z||z'|$

f) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Remark *Hemos de observar que estamos utilizando la misma notación para representar el módulo de un número complejo y el valor absoluto de un número real, pero ésto no ha de inducir a confusión alguna. Así, por ejemplo, cuando en el apartado (b) de la proposición anterior ponemos $|Re(z)| \leq |z|$, por $|z|$ estamos indicando el módulo de z (ya que z es un número complejo), mientras que $|Re(z)|$ indica el valor absoluto del número real $Re(z)$ (ya que tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo es un número real).*

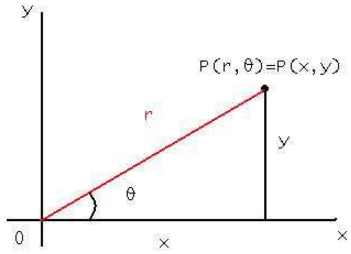
Geométricamente, el módulo del número complejo es el módulo del vector con origen en $(0,0)$ y extremo en el afijo del complejo, es decir, la longitud del vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que representa a z. De igual forma, $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2.

Definition *Si representamos este vector, a la medida del ángulo θ que dicho vector forma con el semieje real positivo, se le llama **argumento** de z, y se denota por $arg(z)$. Así pues, $arg(z) = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).*

*Al único valor de $arg(z)$ que pertenezca a $(-\pi, \pi]$, se la llama **argumento principal** de z, y se representará por $Arg(z)$, aunque normalmente lo representaremos por θ. Por lo tanto, siempre se verifica que $-\pi < \theta \leq \pi$.*

Si θ es el argumento principal de $z = x + iy$, y si $|z| = r$, se tendrá

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$



de donde

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Por tanto, si sustituimos en $z = x + iy$, se tiene

$$z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

expresión que se denomina **forma trigonométrica** del complejo z. Esta expresión suele escribirse en forma abreviada poniendo $z = r_\theta$, y a la que se conoce como **forma polar** o **forma módulo-argumental** del número complejo.

Esta nueva forma de expresar un número complejo tiene ventajas para realizar determinadas operaciones:

Proposition ***(Operaciones en forma polar)*** *Dados dos complejos $z = r_\theta$ y $z' = r'_{\theta'}$ no nulos, y si $n \in \mathbb{Z}$, se verifica:*

a) $r_\theta = r'_{\theta'} \Leftrightarrow r = r'$ y $\theta - \theta' = 2k\pi$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$)

b) $r_\theta \cdot r'_{\theta'} = (rr')_{\theta+\theta'}$

c) $(r_\theta)^{-1} = (r^{-1})_{-\theta}$

d) $\frac{r_\theta}{r'_{\theta'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\theta-\theta'}$

e) $(r_\theta)^n = (r^n)_{n\theta}$

Example *Dados los números complejos $z_1 = 6i$ y $z_2 = 8 - i$, pasarlos a forma polar y, a partir de ésta realizar las operaciones $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $(z_2)^{-1}$ y $(z_2)^7$.*

Example *Calcular $\left(-1 + \sqrt{3}\, i\right)^{30}$.*

Remark *Para $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, del apartado (e) de la proposición anterior se deduce que*

$$z^n = (r_\theta)^n = (r^n)_{n\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

y como caso particular, tendremos

$$(1_\theta)^n = (1)_{n\theta}$$

es decir

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

*que se conoce como **fórmula de Moivre**.*

Example *La fórmula de Moivre es de utilidad para expresar* $\cos(n\theta)$ *y* $\sin(n\theta)$ *en función de* $\cos(\theta)$ *y* $\sin(\theta)$. *Por ejemplo, para el caso* $n = 2$, *la fórmula nos dice que*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

pero al ser también

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta) - \sin^2(\theta)$$

si igualamos las partes reales e imaginarias, obtendremos las conocidas expresiones

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

$$\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

Raíz n –sima de un número complejo.

Definition *Dados* $z \in \mathbb{C}$ *y* $n \in \mathbb{Z}$, *se llama **raíz** n – sima de z a todo complejo w tal que* $w^n = z$. *A esta raíz n – sima la representamos por* $\sqrt[n]{z}$.

Veamos como puede obtenerse esta raíz:

Proposition *Todo* $z = r_\theta \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, *admite n raíces n – simas, que vienen dadas por*

$$\sqrt[n]{r_\theta} = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

y donde $\sqrt[n]{r}$ *indica la única raíz n – sima ral y positiva de* $r > 0$.

Remark *Geométricamente, los afijos de las n raíces n – simas de z son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de centro el origen y radio* $\sqrt[n]{r}$.

Example *Calcular* $\sqrt[3]{-1+i}$. *Representar los afijos de los valores obtenidos.*

Exponencial de un número complejo. Forma exponencial.

Definition *Dado el número* $z = x + iy$, *se define la **exponencial** de z, como el número complejo dado por*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Remark *Esta forma de definir la función* e^z *hace que, por un lado, se verifique* $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$ *y que* $e^z \neq 0$, *siendo z y z' dos números complejos cualesquiera, es decir, se define la exponencial de un número complejo z de esta forma ya que así se verifican las mismas propiedades que cumple la exponencial de un número real.*

Example *Calcular* e^{2-3i}.

Remark *Para cualquier* $z = r_\theta \in \mathbb{C}$ *su forma trigonométrica nos permite expresarlo como*

$$z = r_\theta = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

por lo que comparando esta expresión con la de la exponencial de z, resultará que también podemos expresar z en la forma

$$z = r_\theta = re^{i\theta}$$

(ya que $e^{i\theta} = e^{0+i\theta} = e^0(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$*).*

A esta última forma de expresar z se le llama ***forma exponencial*** *de z.*

Example *Dado el número complejo* $z = -1 + i$*, expresarlo en forma polar, en forma trigonométrica y en forma exponencial.*

Remark *(**Fórmulas de Euler**) Usando la expresión de la exponencial de z, resultará que si* $x \in \mathbb{R}$*, se verifica*

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

por lo que sumando y restando estas igualdades resultará

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

expresiones que se conocen como ***fórmulas de Euler****, y que nos permiten definir las funciones reales* $\cos(x)$ *y* $\sin(x)$ *a partir de expresiones complejas.*

Remark *Estas fórmulas nos permitirán ampliar al campo complejo las definiciones de las funciones trigonométricas, de forma que para cualquier* $z \in \mathbb{C}$*, definiremos*

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

De forma análoga, se definen

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \quad \cot(z) = \frac{1}{\tan(z)}, \quad \ldots$$

Estas funciones así definidas tendrán las mismas propiedades que las correspondientes funciones reales. Así, se pueden comprobar sin dificultad que se verifican igualdades como

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1, \ \operatorname{sen}(2z) = 2\sin(z)\cos(z), \ \sin(-z) = -\sin(z), \ \ldots$$

Example *Dado el complejo* $z = -1 + i$*, calcular* $\cos(z)$ *y* $\sin(z)$*, dando su resultado en forma binómica.*

Remark *También será posible extender al campo complejo las **funciones hiperbólicas**, de manera que tendrán sentido expresiones como* $\sinh z$, $\cosh z$, *etc., siendo sus definiciones las dadas por*

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \ \cosh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \ \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}; \ \ldots$$

Puede probarse sin dificultad que estas funciones verifican las mismas propiedades que sus análogas reales.

Logaritmos y potencias complejas.

Definition *Dado* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, *se dice que* $w \in \mathbb{C}$ *es un **logaritmo (neperiano)** de z, si* $e^w = z$. *A w se le representará por* $\log(z)$. *Así, se verifica*

$$\log(z) = \left\{ w \in \mathbb{C} \ \mid e^w = z \right\}$$

¿Cómo podemos calcular estos logaritmos?:

Proposition *Si* $z = r_\theta \neq 0$, *se verifica*

$$\log(z) = \log(r) + i(\theta + 2k\pi), \quad \textit{con } k \in \mathbb{Z}$$

Remark *Observamos por tanto que existen infinitos valores para* $\log(z)$. *Al valor particular de* $\log(z)$ *para* $k = 0$, *es decir a*

$$\log(z) = \log(r) + i\theta$$

*se le llama **logaritmo principal** de z, y suele representarse por* $\operatorname{Log}(z)$.

Example *Dado el complejo* $z = -1 + i$, *calcular todos los valores para* $\log(z)$, *dando su resultado en forma binómica. Obtener, en forma binómica, su logaritmo principal.*

Las **potencias de base y exponente complejos** pueden definirse a partir de las definiciones de exponencial y de logaritmo:

Definition *Si* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, *y* $w \in \mathbb{C}$, *se define*

$$z^w = e^{w \log(z)}$$

Remark *La mayoría de las veces suele tomarse*

$$z^w = e^{w \operatorname{Log}(z)}$$

definición que permite que se verifiquen propiedades conocidas para las potencias reales (como por ejemplo, $z^{w_1} \cdot z^{w_2} = z^{w_1 + w_2}$*).*

Example *Dados* $z = -1 + i$ *y* $w = 8i$, *calcular* z^w, *dando su resultado en forma binómica.*

El plano complejo ampliado $\mathbb{C}^*$.

A veces es conveniente añadir al conjunto $\mathbb{C}$ un punto ideal, denotado por ∞, y llamado **punto del infinito**, y que consideraremos que verifica las siguientes relaciones:

* $\forall z \in \mathbb{C}$, $z + \infty = z - \infty = \infty$; $\frac{z}{\infty} = 0$
* Si $z \in \mathbb{C}$ y $z \neq 0$: $z \cdot \infty = \infty$; $\frac{z}{0} = \infty$
* $\infty + \infty = \infty \cdot \infty = \infty$

Al conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ suele llamarse **plano complejo ampliado** y se denotará por $\mathbb{C}^*$. Estas definiciones nos permitirán trabajar en el campo complejo con la expresión ∞, que, como veremos con posterioridad, a veces suele aparecer a la hora de calcular determinados límites de funciones complejas. Notemos que ahora no tiene sentido expresiones como $\pm\infty$.

Ejercicios resueltos.

1. (Febrero 2013) *Calcular el conjunto de los logaritmos del número complejo* $-1-i$, *es decir resolver en* $\mathbb{C}$ *la ecuación*

$$e^z = -1 - i$$

Solución: Se tiene que

$$-1 - i = \left(\sqrt{2}\right)_{\frac{5\pi}{4}}$$

por lo que

$$\log(-1-i) = \log\left(\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{5\pi}{4}}\right) = \log\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

2. (Junio 2013) *Calcular el conjunto de los logaritmos del número complejo* $1+2i$, *es decir resolver en C la ecuación*

$$e^z = 1 + 2i$$

Solución: Como se verifica

$$1 + 2i = \left(\sqrt{5}\right)_{\arctan(2)}$$

tendremos que

$$\log(1+2i) = \log\left(\left(\sqrt{5}\right)_{\arctan(2)}\right) = \log\left(\sqrt{5}\right) + i(\arctan(2) + 2k\pi)$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

3. (Febrero 2015) *Resolver en* $\mathbb{C}$ *la ecuación*

$$\cos(iz) + 3i\sin(iz) + 1 = 0$$

Solución: A partir de las igualdades (definición de funciones trigonométricas en $\mathbb{C}$)

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad y \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

la ecuación dada se transforma en

$$\frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} + 3i\frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} + 1 = 0$$

es decir

$$\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}+3i\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}+1=0$$

Si hacemos $t=e^{z}$, tendremos que resolver la ecuación

$$\frac{1/t+t}{2}+3i\frac{1/t-t}{2i}+1=0$$

es decir,

$$t^2-t-2=0$$

ecuación que tiene por soluciones $t=2,-1$.

Entonces

$$\text{Si } t=2\Rightarrow e^{z}=2\Rightarrow z=\log(2)=\log(2_0)=\log(2)+i0=\log(2)$$

$$\text{Si } t=-1\Rightarrow e^{z}=-1\Rightarrow z=\log(-1)=\log(1_{\pi})=\log(1)+i\pi=i\pi$$

donde hemos considerado los valores principales para cada uno de estos logaritmos neperianos complejos.

4. (Junio 2015) *Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación*

$$\cos(z)+2\sqrt{5}\,i=0$$

dando la solución en forma binómica.

Solución: A partir de la igualdad (definición de $\cos(z)$ en $\mathbb{C}$)

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

la ecuación dada se transforma en

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}+2\sqrt{5}\,i=0$$

y si hacemos $t=e^{iz}$, tendremos que resolver la ecuación

$$\frac{t+\frac{1}{t}}{2}+2\sqrt{5}\,i=0$$

es decir,

$$t^2+4\sqrt{5}\,it+1=0$$

que tiene por soluciones

$$t=\frac{-4\sqrt{5}\pm\sqrt{84}}{2}i$$

Entonces

$$\text{Si } t=\frac{-4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}i\Rightarrow e^{iz}=\frac{-4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}i\Rightarrow iz=\log\left(\frac{-4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}i\right)$$

por lo que expresando este número en forma polar (para poder calcular su logaritmo),

$$iz=\log\left(\frac{-4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}i\right)=\log\left(\frac{-4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}\right)_{\frac{\pi}{2}}=\log\left(\frac{-4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}\right)+i\frac{\pi}{2}$$

de donde

$$z = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}\log\left(\frac{-4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \log\left(\frac{-4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}\right)i$$

Análogamente,

$$\text{Si } t = \frac{-4\sqrt{5}-\sqrt{84}}{2}i \Rightarrow e^{iz} = \frac{-4\sqrt{5}-\sqrt{84}}{2}i \Rightarrow iz = \log\left(\frac{-4\sqrt{5}-\sqrt{84}}{2}i\right)$$

por lo que

$$iz = \log\left(\frac{4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}\right)_{\frac{3\pi}{2}} = \log\left(\frac{4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}\right) + i\frac{3\pi}{2}$$

y entonces

$$z = \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{i}\log\left(\frac{4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - \log\left(\frac{4\sqrt{5}+\sqrt{84}}{2}\right)i$$

donde hemos considerado los valores principales para cada uno de estos logaritmos neperianos complejos.

5. (Febrero 2015) *Calcular* $\arctan(2i)$*, dando su resultado en forma binómica.*

Solución: Si denotamos $\arctan(2i) = z$ tendremos que $\tan z = 2i$. A partir de la igualdad (definición de funciones trigonométricas en $\mathbb{C}$)

$$\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\ \cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

resulta

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = 2i$$

por lo que

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = -2$$

Si denotamos $e^{iz} = t$, tendremos

$$\frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}} = -2 \Rightarrow 3t^2+1 = 0$$

de donde

$$t = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}} = \pm i\sqrt{\frac{1}{3}}$$

y puesto que $e^{iz} = t$,

$$e^{iz} = \pm i\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow iz = \log\left(\pm i\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \Rightarrow z = -i\log\left(\pm i\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

De esta forma, tendremos

$$\text{Si } z = -i\log\left(i\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -i\log\left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)_{\pi/2}\right) = -i\left(\log\sqrt{\frac{1}{3}} + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - i\log\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Si } z = -i\log\left(-i\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -i\log\left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)_{-\pi/2}\right) = -i\left(\log\sqrt{\frac{1}{3}} - i\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - i\log\sqrt{\frac{1}{3}}$$

donde hemos considerado el logaritmo principal.

6. (Febrero 2017) *Determinar el conjunto de puntos del plano complejo que verifica la*

ecuación

$$|z-2i|+|z+2i| = 5$$

Solución: Se tiene que

$$|z-2i|+|z+2i| = 5 \iff |x+(y-2)i|+|x+(y+2)i| = 5$$

es decir

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2} = 5$$

por lo que

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} = 5 - \sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

Si elevamos al cuadrado

$$x^2+(y-2)^2 = 25 - 10\sqrt{x^2+(y+2)^2} + x^2+(y+2)^2$$

Operando de nuevo (aislando la raiz y volviendo a elevar al cuadrado) se llega a

$$100x^2+36y^2 = 225$$

es decir, se trata del conjunto de puntos de la elipse con centro el origen y semiejes $a = \frac{3}{2}$ y $b = \frac{5}{2}$, ya que la misma puede ponerse como

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1$$

Ejercicios propuestos.

1. Hallar las partes real e imaginarias de

$$z = \frac{1-i}{1+i}$$

2. Determinar x e y para que se verifique

$$(1+i)(x+iy) = i$$

3. Calcular

$$(2+2i)^2,\ (2-2i)^2,\ (2+2i)(2-2i)$$

4. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que un número complejo tenga módulo 1 es que su parte real coincida con la parte real de su inverso, es decir

$$|z| = 1 \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$$

5. Encontrar las cuatro raíces cuartas de $z_1 = -8\left(1-i\sqrt{3}\right)$ y de $z_2 = -81$.

6. Expresar en forma algebraica los complejos $z_1 = \frac{8}{(1-i)^5}$ y $z_2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^{3/4}$.

7. Hallar i^n para $n = 0,1,2,\ldots,9$. Deducir una fórmula para averiguar cualquier potencia de i. Como aplicación, obtener i^{347}.

8. Dibujar el conjunto de puntos del plano complejo tales que su afijo verifica:
$$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = z\,\bar{z}$$

9. Idem para las relaciones:
$$a)\ |z|^{-1} \geq 1\ (z \neq 0), \quad b)\ |z - 5i| = 8, \quad c)\ \operatorname{Im}(z^2) > 2, \quad d)\ \operatorname{Re}\left(\overline{z^{-1}}\right) = 1$$
$$e)\ 2 < |z| < 3, \quad f)\ \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1, \quad g)\ |z-2| = |1 - 2\bar{z}| \quad h)\ \operatorname{Re}(z^2 - z) = 0$$

10. Escribir en forma binómica los complejos siguientes, donde r representa el módulo y θ un argumento:
$$a)\ r = 2,\ \theta = \pi, \quad b)\ r = 1,\ \theta = -\frac{\pi}{4}, \quad c)\ r = \sqrt{2},\ \theta = \frac{\pi}{3}, \quad d)\ r = 2,\ \theta = -\frac{\pi}{2}$$

11. ¿En qué vector se transforma $z = -\sqrt{3} + 3i$ al girarlo 90º? ¿Qué ángulo es necesario girarlo para que el resultado sea $2\sqrt{3}\,i$?

12. Expresar en forma trigonométrica y en forma exponencial los complejos
$$-\frac{i}{2}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sqrt{3} - i, \qquad -\frac{1}{2}$$

13. Utilizar la fórmula de Moivre para obtener $\cos(3x)$ y $\sin(3x)$ en función de $\cos(x)$ y $\sin(x)$.

14. Linealizar $\cos^4(x)$.

15. Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:
$$a)\ x^2 - (6+i)x + 7 + 9i = 0;\ b)\ x^2 - 2(2-i)x + 3(1-2i) = 0;\ c)\ x^4 + x^2 + 1 = 0$$

16. Hallar las cuatro raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$, y usarlas para factorizar este polinomio como producto de cuatro polinomios con coeficientes complejos. Factorizarlo también como producto dos polinomios de segundo grado con coeficientes reales.

17. Probar que todo complejo z distinto de 1, pero con módulo 1, se puede expresar en la forma
$$z = \frac{\alpha + i}{\alpha - i}$$
para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

18. Sean z_1, z_2, z_3 tres complejos de módulo 1 tales que $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Probar que al menos uno de ellos ha de ser igual a 1.

19. Hallar tres complejos $z_1,\ z_2,\ z_3,$ de módulo 1, tales que verifican

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 1$$

20. Probar que si $z_1,\ z_2,\ z_3$ son tres complejos que verifican

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|, \qquad z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

entonces su imágenes forman en el plano un triángulo equilátero.