Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 2.1.1: LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

PROGRAMA DETALLADO:

Espacio métrico: **Definiciones previas**.
Entornos. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.
Funciones entre espacios métricos.
Representación gráfica. Curvas de nivel.
Límite de una función en un punto. **Cálculo y propiedades**.
Límites direccionales.
Límites iterados.
Cambio a coordenadas polares.
Continuidad. **Definiciones y propiedades**.
Definición de función continua en un punto.
Propiedades de las funciones continuas en un conjunto compacto.

En el Bloque anterior hemos estudiado las propiedades fundamentales de las funciones reales de una variable real, es decir, funciones de la forma $y = f(x)$, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ahora vamos a intentar generalizar este estudio a *funciones reales de varias variables reales*, especialmente a funciones del tipo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (*funciones reales de n variables*) o del tipo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (*funciones vectoriales de n variables*).

Para poder realizar esta extensión, es preciso extender a $\mathbb{R}^n$ otros muchos conceptos ya vistos para el conjunto $\mathbb{R}$, como son: entorno, conjunto abiero y/o conjunto cerrado, entorno reducido, etc. Bien es cierto que estas definiciones las podríamos haber dado desde un principio, de manera general, para un espacio métrico cualquiera y, con posterioridad, particularizarlas a $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, ya que tanto uno como otro son espacios métricos (como veremos a continuación). Lo mismo ocurre como definiciones como límite de una función en un punto o de continuidad: básicamente las definiciones (e incluso las propiedades) son las mismas para las funciones de una y de varias variables. No obstante, la experiencia nos demuestra que para el alumno es más sencillo recordar (y en algunos casos, aprender) conceptos de funciones de una variable, y extender después estos mismos conceptos en funciones de varias variables.

Espacio métrico: Definiciones previas.

Definition *Llamaremos **espacio métrico** a un par (A,d), formado por un conjunto no vacio A y por una aplicación*

$$\begin{aligned} d \ &: \ A \times A \to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) \end{aligned}$$

que verifica, para todo $x,y \in A$:

a) $d(x,y) \geq 0$.

b) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

c) $d(x,y) = d(y,x)$.

d) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ \forall\, z \in A$.

A esta aplicación se le llama ***distancia*** *o* ***métrica****, y al número real* $d(x,y)$ *se le llama distancia entre los puntos x e y.*

Example *Veamos porqué los números reales* $\mathbb{R}$ *son un espacio métrico, con la distancia dada por*

$$\begin{aligned} d \ &: \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = |y - x| \end{aligned}$$

(Notemos que esta es la ***distancia usual*** *que empleamos para calcular la distancia que hay entre dos números reales). Para probar esta afirmación, sólo hemos de ver que la aplicación d así definida, cumple las 4 propiedades de la anterior definición.*

No obstante, podemos considerar diferentes distancias dentro de un mismo conjunto de números (por ejemplo, $\mathbb{R}$), aunque éstas no coincidirán con la noción intuitiva de lo que quiere decir *medir* una distancia:

Example *Los números reales* $\mathbb{R}$ *también son un espacio métrico si se considera la distancia dada por*

$$\begin{aligned} d \ &: \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = \begin{cases} 1 \ si\ x \neq y \\ 1 \ si\ x = y \end{cases} \end{aligned}$$

Análogamente, también podemos considerar distancias en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\ldots$ o en general en $\mathbb{R}^n$. Lo vemos para $\mathbb{R}^2$, y sin problemas podrá se extendido a $\mathbb{R}^3, \ldots$:

Example $\mathbb{R}^2$ *es un espacio métrico si se considera la distancia*

$$\begin{aligned} d \ &: \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &\mapsto d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

(Notemos que esta definición coincide con la fórmula conocida para calcular la distancia entre dos puntos $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ *en el plano; por ello, a esta distancia se le conoce como* ***distancia euclídea****). Para comprobar que, efectivamente,* $\mathbb{R}^2$ *es un espacio métrico con esta aplicación así definida, sólo hemos de ver que d cumple las 4 propiedades de la anterior definición.*

Example *Extender el ejemplo anterior a* $\mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$.

Remark *Al igual que hemos visto que sobre* $\mathbb{R}$ *se pueden considerar diferentes distancias,* *ésto mismo ocurre con* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\ldots$ *o en general con* $\mathbb{R}^n$. *Por ejemplo, también se prueba que las siguientes definiciones son distancias sobre* $\mathbb{R}^2$ *(y se deja al lector la interpretación y demostración de las mismas, así como su extensión al resto de conjuntos):*

$$\begin{aligned} d_2 \ &: \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &\mapsto d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \end{aligned}$$

(se conoce con el nombre de ***distancia del valor absoluto****)*

$$\begin{aligned} d_3 \ &: \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &\mapsto d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sup\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} \end{aligned}$$

(se conoce con el nombre de ***distancia del supremo****)*

Veamos como la noción de distancia (independientemente de cual escojamos) nos ayuda a definir conceptos conocidos, así como a ampliar éstos a otros conjuntos numéricos más amplios:

Definition *Si A es un espacio métrico (donde se suponemos que tenemos una distancia cualquiera d), se llama* ***diámetro*** *de A al número real dado por*

$$d(A) = \sup\{d(x,y) \ | \ x,y \in A\}$$

En el caso particular en que $d(A) < +\infty$, *se dice que el conjunto A está* ***acotado***.

Remark *Notemos como la anterior definición coincide con la noción intuitiva de que un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *está acotado, así como la misma se puede extender si problemas a* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\ldots$

Entornos. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.

A partir de ahora siempre trabajaremos en (A,d) espacio métrico.

Definition *Se llama* ***entorno*** *(o* ***bola abierta****) de centro* $a \in A$ *y radio r* ($r \in \mathbb{R}$, $r > 0$) *al conjunto*

$$B(a,r) = \{x \in A \ | \ d(a,x) < r\}$$

Example *Particularizar la anterior definición al caso de entornos en* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ *(con las distancias euclídeas o usuales).*

Definition *Se llama* ***bola cerrada*** *de centro* $a \in A$ *y radio r* ($r \in \mathbb{R}$, $r > 0$) *al conjunto*

$$\overline{B(a,r)} = \{x \in A \ | \ d(a,x) \leq r\}$$

Definition *Se llama* ***esfera*** *de centro* $a \in A$ *y radio r* ($r \in \mathbb{R}$, $r > 0$) *al conjunto*

$$\overline{B(a,r)} - B(a,r)$$

es decir, a los puntos que están en la bola cerrada pero no en la bola abierta.

Example *Particularizar las anteriores definiciones al caso de bolas cerradas y esferas en* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$.

Definition *Se llama* ***entorno reducido*** *(o* ***perforado****) de centro* $a \in A$ *y radio r (*$r \in \mathbb{R}$, $r > 0$*) al conjunto*

$$B(a,r)^* = \{x \in A \mid d(a,x) < r\} - \{a\}$$

es decir, a todo entorno del punto a al que le hemos "sacado" el propio a.

Example *Particularizar la anterior definición al caso de entornos reducidos en* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$.

Definition *Un punto* $a \in A$ *es* ***interior*** *a un conjunto* $X \subset A$ *si existe* $B(a,r) \subset X$*. Al conjunto de todos los puntos interiores a un conjunto X se le llama* ***interior de*** *X, y se representa por* $int(X)$ *o* $\overset{o}{X}$.

Definition *Se dice que un conjunto X es* ***abierto*** *cuando éste coincide con su interior, es decir, si* $X = int(X)$.

Definition *Un punto* $a \in A$ *es* ***exterior*** *a un conjunto* $X \subset A$ *si existe* $B(a,r) \subset A - X$*. Al conjunto de todos los puntos exteriores a un conjunto X se le llama* ***exterior de*** *X, y se representa por* $ext(X)$.

Un punto $a \in A$ *es* ***frontera*** *de un conjunto* $X \subset A$ *si todo entorno de a contiene puntos de X y de* $A - X$*. Al conjunto de todos los puntos frontera de un conjunto X se le llama* ***frontera de*** *X, y se representa por* $fr(X)$.

Definition *Se dice que un conjunto X es* ***cerrado*** *cuando coincide con la unión de su interior y su frontera, es decir,* $X = int(X) \cup fr(X)$.

Example *Poner ejemplos de conjuntos abiertos, cerrados, conjunto interior, exterior y frontera para los espacios* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$.

Definition *Un punto* $a \in A$ *es* ***de acumulación*** *a un conjunto* $X \subset A$ *si todo entorno reducido de a contiene algún punto de X. Al conjunto de todos los puntos de acumulación de X se le llama* ***conjunto derivado****, y se representa por* X'.

Remark *El que un punto a sea de acumulación a un conjunto X, significa que el punto a no está solo, es decir, que "pegados" al punto a hay otros puntos de X. Este concepto, que puede parecer una "chorrada" tiene su importancia en el concepto de límite (ya sea para funciones de una o varias variables), puesto que para calcular (teóricamente) el límite de una función en un punto* a*, éste punto siempre tiene que* *ser de acumulación, puesto que vamos a darle a la función valores próximos a este punto a, es decir, valores en un entorno reducido de a. Y por esto es preciso que a sea punto de acumulación, para que todo entorno reducido suyo siga teniendo más puntos.*

Definition *Un conjunto $X \subset A$ es **compacto**, si es cerrado y acotado.*

Example *Poner ejemplos de conjuntos compactos en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.*

Funciones entre espacios métricos.

Como hemos comentado al principio, básicamente vamos a estudiar dos tipos de funciones de varias variables:

Definition *Se llama **función real de** n **variables reales**, a toda función de la forma*

$$\begin{aligned} f \ &: \ D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) &\mapsto f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

*y se llama **función vectorial de** n **variables reales**, a*

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \ &: \ D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) &\mapsto \mathbf{F}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

Example *Una función real de 2 variables reales (o simplemente, función de dos variables) será, por ejemplo*

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 \end{aligned}$$

Una función real de 3 variables reales (o simplemente, función de tres variables) será,

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto f(x,y,z) = x^2 - 3xy + y^2 + z^3 - e^{xyz} \end{aligned}$$

Una función vectorial de 2 variables es, por ejemplo

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \ &: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto \mathbf{F}(x,y) = \left(xy,\ e^{x+y},\ \sin(x)\right) \end{aligned}$$

o por ejemplo

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \ &: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y) &\mapsto \mathbf{F}(x,y) = \left(xy,\ e^{x+y},\ \sin(x),\ \sqrt{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

Remark *Notemos que a la función vectorial la hemos representado por **F** (con mayúscula y negrita). Esto es para indicar que es un vector. Por eso, a veces a estas funciones también se les representa por $\vec{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, y se les llama **campos vectoriales** (terminología muy utilizada en Física).*

Remark *Además, como dada una función vectorial* $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, resulta que* $\vec{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *es un vector de m componentes, podremos escribir*

$$\vec{\mathbf{F}}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

donde cada una de estas f_i *es una función real de n variables reales, ya que* $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *A esta* f_i *se le llama* ***función componente*** $i-$*sima de la función vectorial* $\vec{\mathbf{F}}$*, y suele ponerse*

$$\vec{\mathbf{F}} = (f_1,f_2,\ldots,f_m)$$

Example *Por ejemplo, para la función vectorial anterior dada por*

$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \mapsto \vec{\mathbf{F}}(x,y) = \left(xy,\ e^{x+y},\ \sin(x)\right)$$

tenemos que

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (f_1(x,y),f_2(x,y),f_3(x,y))$$

siendo

$$f_1(x,y) = xy; \qquad f_2(x,y) = e^{x+y}; \qquad f_3(x,y) = \sin(x)$$

Remark *Precisamente esta relación existente entre las funciones vectoriales y las funciones de varias variables hará que la mayoría de conceptos y propiedades se introduzcan para funciones de varias variables, y que los mismos sean generalizados a funciones vectoriales sin más que trabajar con cada una de sus componentes. Así, por ejemplo, cuando queramos estudiar la continuidad de una función* $\vec{\mathbf{F}} = (f_1,f_2,\ldots,f_m)$*, lo que haremos será estudiar la continuidad de cada una de sus funciones componentes* f_i *(y lo mismo haremos a la hora de calcular un límite, sus derivadas parciales, etc).*

Definition *Dada* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se llama* ***dominio de definición*** *al conjunto*

$$D(f) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}\}$$

Example *Ejemplos de dominios.*

Representación gráfica. Curvas de nivel.

De forma análoga a como las funciones de una sola variable $y = f(x)$ se representan mediante una curva en el plano, cualquier función de dos variables reales $f(x,y)$ puede representarse en un espacio tridimensional por medio de una **superficie**:

Dada $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sabemos que la misma le hace corresponder a cada punto $(x,y) \in D$ un valor $f(x,y) \in \mathbb{R}$, con lo que se obtiene un punto $(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3$. Por ello solemos poner $z = f(x,y)$ para indicar a las funciones de dos variables (de forma similar como por $y = f(x)$

representamos a las funciones con una sola variable).

Definition *Al lugar geométrico de los puntos $P(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación $z = f(x,y)$, es decir, al conjunto*

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y),\ \forall(x,y) \in D\}$$

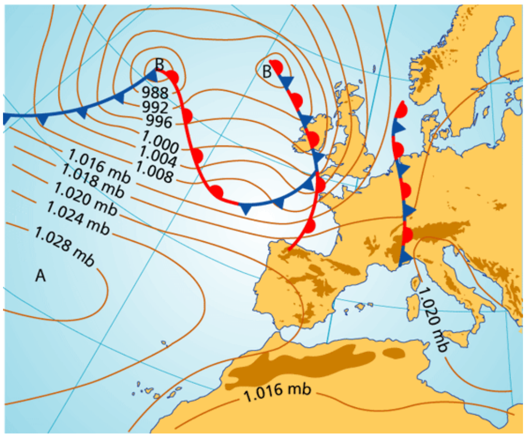
se le llama ***gráfica*** *de f.*

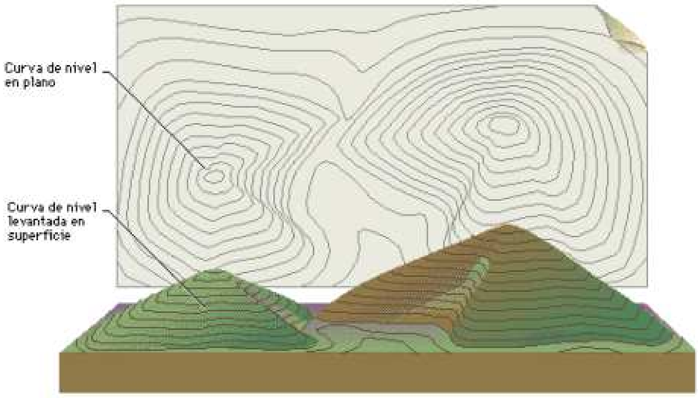
Remark *Las representaciones gráficas para funciones reales de varias variables, presentan un doble inconveniente: Sólo podemos realizar las mismas para funciones de dos variables (es imposible representar gráficamente funciones de 3 o más variables reales; y lo mismo ocurre con cualquier función vectorial), e incluso para las funciones de dos variables suele ser bastante complicado hacer la correspondiente gráfica. Por tal motivo, a veces, puede ser aconsejable utilizar las curvas de nivel, como vemos a continuación.*

Definition *Se llama* ***curva de nivel (a nivel*** *k) a la proyección en uno de los planos coordenados (por ejemplo, el plano OXY) de la intersección de la gráfica de f con un plano paralelo a dicho plano (por ejemplo, el plano $z = k$).*

De este modo, podemos hacernos una idea sobre la gráfica de una función de dos variables observando las curvaturas y distancias entre curvas de nivel a distintos niveles (es decir, cortamos por planos situados a la misma distancia), puesto que la distancia entre las líneas de contorno proporcionan una medida de la inclinación de la superficie (la superficie sube o baja con rapidez en aquellas partes donde las líneas de contorno están muy próximas; en cambio, donde las curvas de nivel están más separadas, las superficie está más achatada o llana.

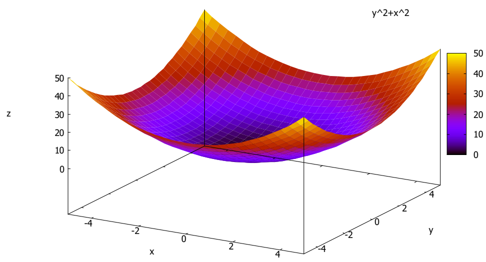
Ejemplos de casos reales donde estamos habituados a usar curvas de nivel son los mapas "del tiempo" y mapas topográficos:

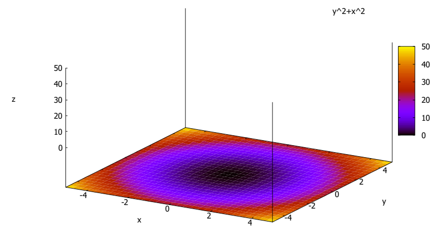


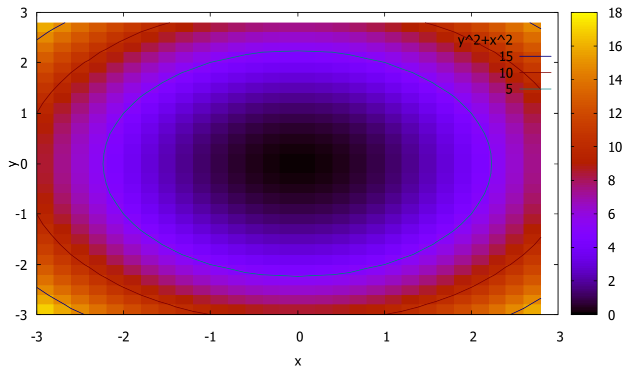


A pesar de estos inconvenientes para representar gráficamente estas superficies, el problema se soluciona favorablemente con la utilización de programas informáticos. Uno de ellos, y como veremos en las clases prácticas, es **wxMaxima**, y es el que hemos usado para realizar las gráficas de las funciones siguientes y de sus curvas de nivel (también hemos introducido **gráficos de densidad**):

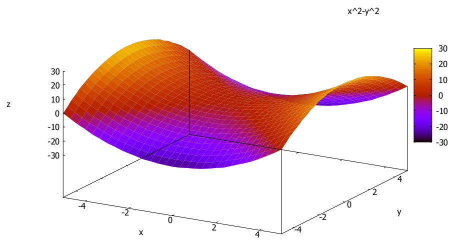
Example $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

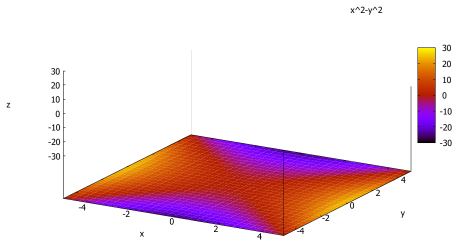


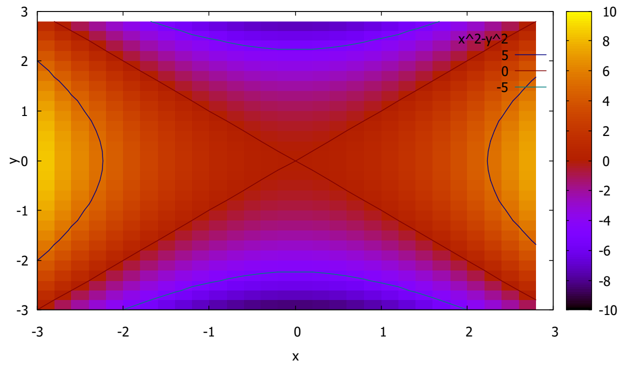




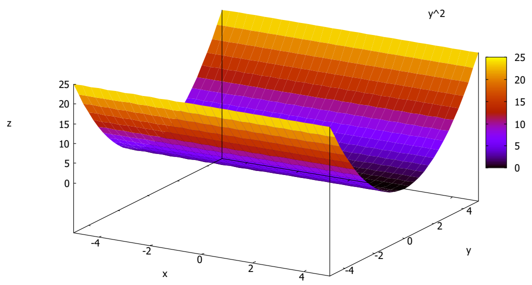
Example $z = f(x,y) = x^2 - y^2$

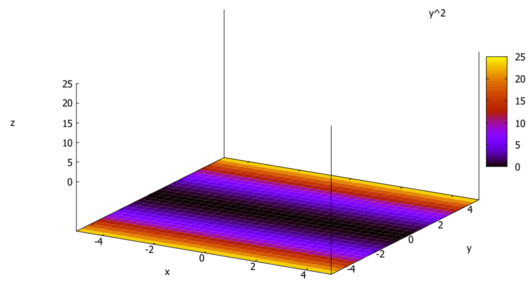


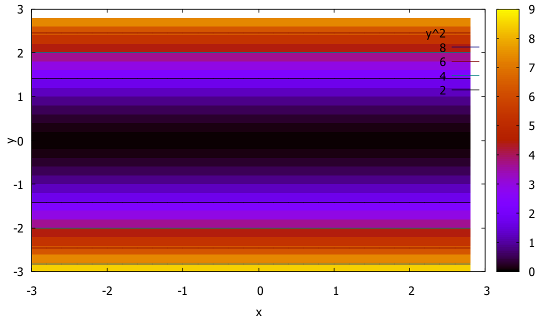




Example $z = f(x,y) = y^2$







Límite de una función en un punto. Cálculo y propiedades.

Veamos como extender el concepto de límite de una función en un punto al caso de funciones de varias variables, y veremos que la definición es totalmente análoga a la de una variable, y que recordamos a continuación:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que si } x \in (a-\delta, a+\delta),$$

$$\text{con } x \neq a, \text{ entonces } f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

Lo único que habremos de hacer para extender esta definición es "extender" los conceptos que aparecen en la misma, básicamente el concepto de entorno y entorno reducido. Por comodidad, daremos la definición para el caso $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y con la norma euclídea, ya que su extensión a funciones con 3 o más variables es inmediata.

Definition *Dada una función de dos variables $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sea $(a.b) \in D$. Se dice que f **tiene por límite** el número real l cuando (x,y) tiende al punto $(a.b)$, si se verifica*

$$\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \textit{ existe } \delta > 0 \textit{ tal que si } (x,y) \textit{ es un punto de un entorno}$$

$$\textit{de } (a.b), \textit{ con } (x,y) \neq (a.b), \textit{ entonces } f(x,y) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

ó lo que es lo mismo

$$\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \textit{ tal que si } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

Para el caso de una función vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ la extensión es inmediata, ya que se verifica:

Proposition *Sea $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial dada por $\vec{\mathbf{F}} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, y sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punto de $D \subset \mathbb{R}^n$. Entonces se verifica que*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots l_m) \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = l_i, \ \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

Example *Límite de una función vectorial.*

Entre las principales propiedades asociadas a este concepto, destacamos:

Proposition *En las anteriores condiciones, se verifican:*

a) Si existe el límite de una función en un punto, éste es único.

b) Si una función tiene límite en un punto, la función está acotada en un entorno de dicho punto.

Proposition *También se verifican, para f y g, funciones reales de n variables:*

a) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \pm \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$.

b) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$.

c) Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \neq 0$, *entonces* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})}$.

Proposition *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función de n variables y sea* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *un punto de D. Entonces se verifica que* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l$ *sí y sólo si para toda sucesión* $(\mathbf{x}_n)$ *de puntos de D convergente al punto* $\mathbf{a}$ *se verifica que el límite de la sucesión* $(f(\mathbf{x}_n))$ *es l, es decir*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l \Leftrightarrow \left(\forall (\mathbf{x}_n) \in D, \textit{ tal que } \lim(\mathbf{x}_n) = \mathbf{a} \Rightarrow \lim f(\mathbf{x}_n) = l\right)$$

Remark *Este último resultado teórico viene a afirmar que para que exista* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *y valga l, sea cuales sean los puntos que tomemos de D y que se aproximen al punto* $\mathbf{a}$*, los valores que toma la función en dichos puntos se aproximan a l.*

Este último resultado, más que para calcular el valor del límite de una función de varias variables, suele usarse para probar cuando dicho límite no existe. Y es también en base al mismo, por lo que se dan las formas particulares siguientes de calcular límites, las cuales nos dirán cuando el límite no existe, aunque también nos indican cual puede ser el resultado del mismo (sin determinarlo de forma segura). Lo vemos para funciones de dos variables:

Límites direccionales.

Si queremos estudiar cuando $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y) = l$, en base a lo anterior, podemos acercarnos hacia el punto (a,b) a través de diferentes curvas que pasan por dicho punto, y como son

$$y = m(x-a) + b \text{ (ecuación general de la recta que pasa por } (a,b))$$

$$y = m(x-a)^2 + b \text{ (ecuación general de la parábola que pasa por } (a,b))$$

$$x = m(y-b)^2 + a \text{ (ecuación general de la parábola que pasa por } (a,b))$$

Lo que se verifica es que si al sustituir estas ecuaciones en $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y)$ (notemos que entonces obtendremos un límite en una sola variable x ó y) se obtiene un resultado que depende de m, **podemos asegurar que no existirá** $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y)$; sin embargo, si al realizar esta sustitución en $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y)$ siempre se obtiene el valor l, no podemos asegurar que el límite efectivamente exista, pero si existiese, éste valdrá l.

Example *Varios.*

Límites iterados.

Consiste en aproximarnos al punto (a,b) a través de coordenadas horizontales y verticales, es decir, primero tomamos el límite cuando $x \to a$ (suponiendo que la variable y es constante) y posteriormente hacemos que $y \to b$; o viceversa, es decir, tomando primero límites cuando $y \to b$, y después hacer $x \to a$. Es decir, se trata de calcular los llamados **límites iterados**

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$$

Lo que está claro es que si ambos límites iterados son distintos, NO existirá $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y)$. Sin embargo, si ambos son iguales, lo único que podemos asegurar es que en caso de que exista $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y)$, su valor tiene que coincidir con el de los límites iterados.

Example *Varios.*

Cambio a coordenadas polares.

Éste suele ser el cambio más utilizado cuando se trabaja con funciones de dos variables, y se trata de cambiar de las coordenadas cartesianas (x,y) originales a unas nuevas coordenadas (**polares**) (r,θ), mediante las relaciones

$$x = a + r\cos(\theta); \qquad y = b + r\sin(\theta)$$

(Sabemos que r es el **módulo** y θ el **argumento**).

Mediante este cambio, para calcular $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y)$ haremos

$$\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta))$$

de forma que si este nuevo límite cuando $r \to 0$ depende de θ, podemos asegurar que NO existirá $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y)$.

Example *Varios.*

Remark *Como hemos afirmado anteriormente, los límites direccionales, iterados o el cambio a coordenadas polares nos ayudan sobre todo a saber cuando NO existe* $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y)$*, mientras que no son de mucha ayuda para decir cuando SI existe.*

Entonces, ¿podremos establecer algún resultado que SÍ asegure la existencia de $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y)$?

Podemos establecer el siguiente resultado (que añade determinadas condiciones adicionales a la existencia del límite en polares), para asegurar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y)$:

Proposition *En las anteriores condiciones, se verifica que existe* $\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y)$ *y vale l, sí* *y sólo si se verifica que* $\lim_{r\to 0} f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta)) = l$ *y si la expresión* $|f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta)) - l|$ *admite una función mayorante* $g(r)$ *para todo* $\theta \in (0, 2\pi]$, *siendo g un infinitésimo en el cero. Es decir*

$$\lim_{(x,y)\to(a.b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow |f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta)) - l| \leq g(r),\ \forall\theta \in (0, 2\pi]$$

$$\textit{siendo } \lim_{r\to 0} g(r) = 0$$

Example *Varios.*

Continuidad. Definiciones y propiedades.

Definición de función continua en un punto.

Definition *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función de n variables y sea* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *un punto de D. Se dice que f es* ***continua en el punto*** $\mathbf{a}$ *si existe* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *y éste coincide con el valor de* $f(\mathbf{a})$, *es decir si*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

Esta definición también nos dice cuando es continua una función vectorial, ya que se verifica:

Proposition *Sea* $\vec{\mathbf{F}} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función vectorial dada por* $\vec{\mathbf{F}} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, *y sea* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *un punto de* $D \subset \mathbb{R}^n$. *Entonces* $\vec{\mathbf{F}} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *es continua en el punto* $\mathbf{a}$ *sí y sólo si cada una de las funciones componentes* f_i *son continuas en* $\mathbf{a}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$.

Proposition *(Operaciones con funciones continuas) Sean* $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funciones de n variables continuas en un punto* $\mathbf{a}$. *Entonces:*

a) $f \pm g$ *es continua en* $\mathbf{a}$.

b) $f \bullet g$ *es continua en* $\mathbf{a}$.

c) Si $g(\mathbf{a}) \neq 0$, *entonces* $\frac{f}{g}$ *es continua en* $\mathbf{a}$.

Proposition *(Continuidad de la función compuesta) Sea* $\mathbf{F} : D_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continua en* $\mathbf{a} \in D_1$ *y* $g : D_2 \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *continua en* $\mathbf{f}(\mathbf{a})$. *Entonces la función compuesta* $g \circ \mathbf{F}$ *es continua en el punto* $\mathbf{a}$.

Propiedades de las funciones continuas en un conjunto compacto.

De forma similar a las propiedades establecidas para funciones de una variable, se verifican:

Theorem *(Weierstrass) Sea* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *función continua en todo X, con X compacto. Entonces f está acotada superior e inferiormente y existen dos puntos* $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X$ *tal que en ellos la función alcanza sus valores máximo y mínimo (absolutos), es decir*

$$f(\mathbf{x}') = \max\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X\} \qquad y \qquad f(\mathbf{x}'') = \min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X\}$$

Theorem *(Valores intermedios) Sea* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *función continua en todo X, con X compacto. Si M y m son, respectivamente, los valores máximo y mínimo que alcanza* f *en* X, *para cada* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $m < k < M$, *existe un* $\mathbf{x} \in X$ *tal que* $f(\mathbf{x}) = k$.