Tema 3

Límites y continuidad de funciones de una y varias variables

1. Nociones básicas de topología en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1: Norma euclídea

La norma euclídea es una aplicación $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ tal que si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
Si $n = 1 \Rightarrow \|x\| = |x|$.

Propiedades:

(1) $\|x\| \geq 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}^n$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = O = (0, \ldots, 0)$
(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \; \forall \, \lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall \, x, y \in \mathbb{R}^n$ (Desigualdad triangular)

Definición 1.2: Bolas

- Bola abierta de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$:
$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$$
- Bola cerrada de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$:
$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$$
- Esfera de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$:

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = r^2\}$$

$$S(a, r) = \overline{B}(a, r) \setminus B(a, r) \qquad \text{(la esfera es la frontera de la bola).}$$

Definición 1.3: Conjunto abierto

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, diremos que A es abierto si
$\forall \, a \in A \; \exists \, r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.

Definición 1.4: Conjunto cerrado

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$, diremos que C es cerrado si su conjunto complementario, $C^c = \mathbb{R}^n \setminus C = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin C\}$, es abierto. Es decir, si $\forall \, a \notin C \; \exists \, r > 0$ tal que $B(a, r) \cap C = \emptyset$.

Propiedades:

(1) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
(2) La intersección de una cantidad finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
(3) La unión de una cantidad finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
(4) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
(5) Los únicos conjuntos que son a la vez cerrados y abiertos son $\mathbb{R}^n$ y el conjunto vacío $\emptyset$.

Definición 1.5: Conjunto acotado

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$, diremos que C está acotado si $\exists\ M > 0$ tal que $\|c\| \leq M\ \forall\ c \in C$, es decir, $C \subset B(O, M)$.

Definición 1.6: Conjunto compacto

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$, diremos que K es compacto si es cerrado y acotado.

2. Funciones reales de variables reales

Definición 2.1: Función real de variables reales

Una función real f de variables reales es una aplicación entre dos espacios reales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Es decir, es una aplicación en la que a cada punto de $\mathbb{R}^n$ le hace corresponder un único punto de $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & x & \mapsto & f(x) = y \end{array}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

$$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \text{ funciones coordenadas de } f, \quad f = (f_1, \ldots, f_m)$$

Si la función f le hace corresponder al punto x el y, diremos que y es la imagen de x y x es la antiimagen de y. La imagen de un punto es única, pero la antiimagen no tiene por que serlo.

Definición 2.2: Expresión analítica

La expresión analítica de una función es una expresión algebraica o“fórmula"que nos indica la dependencia entre un punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y su imagen $y = (y_1, \ldots, y_m)$, a partir de ella podremos conocer la imagen de cualquier valor admisible. A $(x_1, \ldots, x_n)$ se les denomina variables independientes y a $(y_1, \ldots, y_m)$ variables dependientes.
Esta expresión puede ser en forma explícita,
$(y_1, \ldots, y_m) = f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$,
o en forma implícita $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Ejemplos 2.3

- Si $n = m = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\quad f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = 3x^2 - 2x + 4$.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $\quad f(x, y) = (x^2 + y^2, x \cdot \ln(x \cdot y), \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y})$, $f(1, 1) = (2, 0, \frac{\pi}{4})$ $f_1(x, y) = x^2 + y^2 \qquad f_2(x, y) = x \cdot \ln(x \cdot y) \qquad f_3(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\quad f(x, y) = \dfrac{3x^2 + 4y - xy}{x^2 + y^2 + 1}$

Definición 2.4: Dominio

El dominio de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, (f), es el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ que tienen imagen. Si conocemos la expresión analítica de f, su dominio serían todos los valores de $(x_1, \dots, x_n)$ para los cuales podamos calcular un valor de $f(x_1, \dots, x_n)$ a través de dicha expresión.

$$(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m\}$$

Definición 2.5: Imagen

La imagen de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es el conjunto de todas sus imágenes.

$$(f) = \{(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m : (b_1, \dots, b_m) = f(a_1, \dots, a_n) \text{ para algún } (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

Ejemplos 2.6

- $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} \quad (f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}; \qquad g(x) = \ln x \quad (g) = (0, +\infty)$
- $h(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad (h) = [-2, 2] \quad (h) = [0, 2]$
- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (f) = \overline{B}((0,0), 1) \quad (f) = [0, 1]$

3. LIMITE DE UNA FUNCIÓN

Definición 3.1: Límite

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $a \in \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}^m$, se dice que el límite de f en a es L, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$ entonces $\|f(x) - L\| < \epsilon$.

Observación: El límite de una función en un punto, si existe, es único.

Ejemplos 3.2

- $f(x) = x^2$, $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$
- $f(x, y) = (x + 2, y - 1)$, $\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} f(x, y) = (3, 1)$
- $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Proposición 3.3

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$
$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ y $L = (L_1, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f_i(x) = L_i \ \forall\, i = 1, \dots, n$$

4. Limites de funciones de una variable

Definición 4.1: Límites infinitos y en el infinito

(1) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$, diremos que el límite cuando x tiende a a de una función $f(x)$ es $+\infty$ $(-\infty)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$, si $\forall\, M > 0\; \exists\, \delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$ entonces $f(x) > M$ $(f(x) < -M)$.

Esto quiere decir que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$ siempre y cuando le vayamos dando valores a x, cada vez más cercanos a a, el valor de $f(x)$ se hace cada vez más grande positivamente (negativamente).

En este caso se dice que la función es divergente en el punto a.

(2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ y $L \in \mathbb{R}^m$, diremos que el límite cuando x tiende a $+\infty$ $(-\infty)$ de una función $f(x)$ es L,
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L)$, si $\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, K > 0$ tal que si $x > K$ $(x < -K)$ entonces $\|f(x) - L\| < \epsilon$.

Esto nos dice que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L)$ siempre y cuando le vayamos dando valores a x, cada vez más grandes positivamente (negativamente), el valor de $f(x)$ obtenido estará cada vez más próximo a L.

(3) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que el límite cuando x tiende a $+\infty$ $(-\infty)$ de una función $f(x)$ es $+\infty$ $(-\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$
$(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $(-\infty))$, si $\forall\, M > 0\; \exists\, K > 0$ tal que si $x > K$ $(x < -k)$ entonces $f(x) > M$ $(f(x) < -M)$.

Esto quiere decir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $(-\infty))$ siempre y cuando le vayamos dando valores a x, cada vez más grandes positivamente (negativamente), el valor de $f(x)$ también se hace cada vez más grande positivamente (negativamente).

Ejemplos 4.2

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

Definición 4.3: Límites laterales

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}^m$:

(1) Se dice que el límite por la derecha de f en a es L, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, si $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta$ entonces $\|f(x) - L\| < \epsilon$.

Esto nos dice que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ siempre y cuando le vayamos dando valores a x, cada vez más cercanos y mayores que a, el valor de $f(x)$ obtenido estará cada vez más próximo a L.

(2) Se dice que el límite por la izquierda de f en a es L, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, si $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta$ entonces $\|f(x) - L\| < \epsilon$.

Esto nos dice que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ siempre y cuando le vayamos dando valores a x, cada vez más cercanos y menores que a, el valor de $f(x)$ obtenido estará cada vez más próximo a L.

(3) Se dice que el límite por la derecha de f en a es $+\infty$ $(-\infty)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty)$, si $\forall\, M > 0\, \exists\, \delta > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta$ entonces $f(x) > M$ $(f(x) < -M)$.

Esto nos dice que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty)$ siempre y cuando le vayamos dando valores a x, cada vez más cercanos y mayores que a, el valor de $f(x)$ se hace cada vez más grande positivamente (negativamente).

(4) Se dice que el límite por la izquierda de f en a es $+\infty$ $(-\infty)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty)$, si $\forall\, M > 0\, \exists\, \delta > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta$ entonces $f(x) > M$ $(f(x) < -M)$.

Esto nos dice que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty)$ siempre y cuando le vayamos dando valores a x, cada vez más cercanos y menores que a, el valor de $f(x)$ se hace cada vez más grande positivamente (negativamente).

Proposición 4.4

El límite de una función en un punto es L sí y sólo sí coinciden los dos límites laterales en dicho punto y son iguales a L.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Ejemplo 4.5

Calcular $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Debido a que f es una función definida a trozos y cambia de definición en $x = 1$, para calcular el límite en este punto debemos calcular los dos laterales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3x^2 - 1 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x + 3 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$

5. Operaciones con límites

5.1. Operaciones con límites finitos.

Sean $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lambda$, entonces:

1) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = l \pm \lambda$ 2) $\lim\limits_{x\to a} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot l \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = l \cdot \lambda$ 4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{\lambda} \quad \text{si } \lambda \neq 0$

5) $\lim\limits_{x\to a} \ln(f(x)) = \ln l \quad \text{si } l > 0$ 6) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)} = a^l$

7) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = l^{\lambda} \quad \text{si } l > 0$

5.2. Operaciones con límites infinitos.

$l \pm \infty = \pm\infty$	$l \cdot \infty = \infty$ si $l \neq 0$	$\frac{l}{\infty} = 0$	$\frac{l}{0} = \infty$ si $l \neq 0$
$l^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } l > 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq l < 1 \end{cases}$	$l^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } l > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 \leq l < 1 \end{cases}$	$\ln 0 = -\infty$	$\ln(+\infty) = +\infty$
$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
$(+\infty)^{-\infty} = 0$	$\operatorname{sen}(\infty) = \nexists$	$\cos(\infty) = \nexists$	$\operatorname{tg}(\infty) = \nexists$
$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}^-) = \operatorname{tg}(\frac{-\pi}{2}^-) = +\infty$	$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}^+) = \operatorname{tg}(\frac{-\pi}{2}^+) = -\infty$	$\operatorname{arc\,tg}(-\infty) = \frac{-\pi}{2}$	$\operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

5.3. Indeterminaciones.

$+\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\dfrac{0}{0}$
1^{∞}	$(+\infty)^0$	0^0	

6. Cálculo de Indeterminaciones

(1) Si $p(x)$ es un polinomio, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$.

(2) Sean $p(x) = ax^n + \ldots$ y $q(x) = bx^m + \ldots$ dos polinomios de grados n y m respectivamente, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si } n > m \\ \frac{a}{b} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

(3) Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios tales que el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Para ello se tiene que cumplir $p(a) = q(a) = 0$, por lo tanto $(x - a)$ es un factor de $p(x)$ y $q(x)$ y se cumple que $p(x) = (x - a) \cdot p_1(x)$ y $q(x) = (x - a) \cdot q_1(x)$ para algunos polinomios $p_1(x)$ y $q_1(x)$. Entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot p_1(x)}{(x-a)\cdot q_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

De esta forma se resolvería la indeterminación, en el caso de que siga dando $\frac{0}{0}$ repetiríamos el mismo proceso hasta eliminarla.

6.1. Resolución de la indeterminación 1^∞. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que el $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 1^∞ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$), entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^\lambda \qquad \text{donde}$$

$$\lambda=\lim_{x\to a} g(x)\cdot(f(x)-1)$$

Ejemplo 6.1

Vamos a calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}^2 x)^{\operatorname{tg}^2 x}$, éste presenta una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$, por tanto:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}^2 x)^{\operatorname{tg}^2 x}=e^\lambda=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^2 x\cdot(\operatorname{sen}^2 x-1)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^2 x\cdot(-\cos^2 x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\cdot(-\cos^2 x)=$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\operatorname{sen}^2 x)=-1$$

6.2. Resolución de las indeterminaciones $(+\infty)^0$ y 0^0. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que el $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $(+\infty)^0$ ó 0^0 ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ó 0 y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$), entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^\lambda \qquad \text{donde}$$

$$\lambda=\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln(f(x))$$

Ejemplo 6.2

Vamos a calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$, éste presenta una indeterminación del tipo 0^0, por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^\lambda=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{1}{\ln x}\ln(\tfrac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{1}{\ln x}(-\ln x)=-1$$

6.3. Teorema del Sandwich. Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$, si $\exists\, r > 0$ tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall\, x \in B(a,r)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$

Ejemplo 6.3

Vamos a comprobar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, entonces $\dfrac{x-1}{x} \leq \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x} \leq \dfrac{x+1}{x}\ \forall\, x > 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x} = 1$

7. Infinitésimos equivalentes

Definición 7.1: Infinitésimo

La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene un infinitésimo en el punto $a \in \mathbb{R}^n$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Definición 7.2: Infinitésimos equivalentes

Dos funciones $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son infinitésimos equivalentes en el punto $a \in \mathbb{R}^n$, $f \sim_a g$, si ambas tienen un infinitésimo en a y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

7.0.1. Infinitésimos equivalentes en $x = 0$.

$$\operatorname{sen} x \sim x \sim \operatorname{arc\,sen} x \qquad\qquad \operatorname{tg} x \sim x \sim \operatorname{arc\,tg} x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad\qquad \ln(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x \qquad\qquad b^x - 1 \sim x \cdot \ln b \quad (b > 0)$$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, entonces son también infinitésimos equivalentes en $x = a$:

$$\operatorname{sen} f(x) \sim f(x) \sim \operatorname{arc\,sen}(f(x)) \qquad\qquad \operatorname{tg}(f(x)) \sim f(x) \sim \operatorname{arc\,tg}(f(x))$$

$$1 - \cos(f(x)) \sim \frac{f(x)^2}{2} \qquad\qquad \ln(1+f(x)) \sim f(x)$$

$$e^{f(x)} - 1 \sim f(x) \qquad\qquad b^{f(x)} - 1 \sim \ln b \cdot f(x) \quad (b > 0)$$

Lema 7.3

Sean $\varphi, f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes en $x = a$, $f \sim_a g$, entonces:

(1) $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) \cdot f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) \cdot g(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\varphi(x)}$

Ejemplos 7.4

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}^2(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Observaciones:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \varphi(x) \neq \lim\limits_{x\to a} g(x) \pm \varphi(x) \quad \text{si} \quad f \sim_a g.$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} \neq \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-x}{x^3} = 0 \quad \text{ya que} \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6}$

8. Métodos para el cálculo de límites de funciones de dos variables

Lema 8.1: Método de acotación

Sean $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}^m$ tal que $\|f(x)-L\| \leq \varphi(x)\ \forall\, x \in B(a,r)$, para algún $r>0$, y $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Corolario 8.2

Sean $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y $a \in \mathbb{R}^n$ tal que
$|f(x)| \leq \varphi(x)\ \forall\, x \in B(a,r)$, para algún $r>0$, y $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

8.1. Límites iterados o reiterados.

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y queremos calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Consideramos x un número fijo, y calculamos $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$, considerando $f(x,y)$ como una función de una variable, la y. Si este límite existe, dependerá de x, luego:

$$\lim_{y\to b} f(x,y) = \varphi(x)$$

Calculamos ahora el límite de $\varphi(x)$ cuando $x\to a$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = L_{21}$. Lo denotamos como

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = L_{21}$$

Ahora, de igual forma, calculamos primero el límite de $f(x,y)$, fijando y, cuando $x\to a$

$$\lim_{x\to a} f(x,y) = \phi(y)$$

y luego $\lim\limits_{y\to b} \phi(y) = L_{12}$, lo denotamos como

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = L_{12}$$

Si existe $L = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ y si también existe algún límite iterado, éste debe de ser igual a L (si $\exists\, L_{12}$ o $L_{21} \Rightarrow L_{12} = L$ o $L_{21} = L$).

En consecuencia, si existen L_{12} y L_{21} y $L_{12} \neq L_{21}$ no existe el límite de la función. Pero el caso en el que $L_{12} = L_{21}$, no nos garantiza que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ sea ese valor, pero sí, que si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, tiene que ser ese valor (es un candidato al límite).

Ejemplos 8.3

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y} = \nexists$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1 \\ \\ \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right) = \lim\limits_{x\to 0} -1 = -1 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \nexists \text{ límite.}$$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{5}}} = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{5}}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \\ \\ \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{5}}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow 0 \text{ es un candidato al límite.}$$

  Ahora pasamos a demostrar que 0 es el límite y para ello vamos a utilizar el método de acotación (corolario 7.0.1).

  $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ y $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, entonces:

$$\left|\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{5}}}\right| = \frac{|x||y|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{5}}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{5}}} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{5}}} = (x^2+y^2)^{\frac{2}{5}}$$

  y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\frac{2}{5}} = 0$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$

  $|y\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}| \leq |y|$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$

  Ahora veamos que ocurre con lo límites iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} y\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} y\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = \nexists$$

  Como vemos, no existe uno de los iterados pero si el límite. En consecuencia, el que no exista un límite iterado no implica la no existencia del límite.

8.2. Límites direccionales.

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y queremos calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Si consideramos una función $y=\varphi(x)$ (o $x=\phi(y)$) tal que $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ ($\lim\limits_{y\to b}\phi(y)=a$). Se define el límite direccional a lo largo de φ (ϕ) como
$\lim\limits_{x\to a} f(x,\varphi(x)) = l_\varphi$ ($\lim\limits_{y\to b} f(\phi(y),y) = l_\phi$).

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y=\varphi(x)}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x,\varphi(x)) \qquad \left(\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ x=\phi(y)}} f(x,y) = \lim_{y\to b} f(\phi(y),y)\right)$$

Si existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ y también l_φ (l_ϕ) se verifica que
$l = l_\varphi$ ($l = l_\phi$) para cualquier función φ (ϕ) que se elija satisfaciendo $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ ($\lim\limits_{y\to b}\phi(y)=a$).

Por tanto, si encontramos dos funciones de forma que los límites direccionales no coinciden, sabremos que el límite de la función no existe.

Si por el contrario, tras probar con varias funciones, obtenemos siempre el mismo límite, entonces este sería un candidato a límite.

Normalmente se suelen considerar funciones dependiendo de un parámetro (pendiente), de la forma

$$y = m(x-a)+b \quad [x = m(y-b)+a]; \qquad y = m(x-a)^2+b \quad [x = m(y-b)^2+a]$$

$$y = m(x-a)^3+b \quad [x = m(y-b)^3+a]; \quad \ldots\ldots\ldots$$

Si al considerar funciones dependiendo de un parámetro y al calcular el límite direccional, éste dependiera del parámetro (m) entonces el $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ no existirá.

Ejemplo 8.4

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} = \nexists$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{1+m}{1+m^2} \quad \text{que depende de } m \Rightarrow \nexists \text{ el límite}$$

8.3. Paso a coordenadas polares.

Vamos a ver como calcular el límite de una función $f(x,y)$ (coordenadas cartesianas) en coordenadas polares:

La relación entre las coordenadas cartesianas y polares es $\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\operatorname{sen}\theta \end{cases}$, donde $r \geq 0$ y $\theta \in [0,2\pi)$.

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y queremos calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Consideramos la función $f(x,y)$ en coordenadas polares,
$f(r,\theta) = f(r\cdot\cos\theta, r\cdot\operatorname{sen}\theta)$, y aplicamos, si es factible, el siguiente resultado.

Lema 8.5

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $L\in\mathbb{R}$ y $F(r)$ ($F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) una función tal que $\lim\limits_{r\to 0} F(r) = 0$. Si $|f(r,\theta)-L| \leq F(r)\ \forall\,\theta\in[0,\pi)$ y $|r|<\epsilon$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$.

Si $|f(r,\theta)| \leq F(r)\ \forall\,\theta\in[0,\pi)$ y $|r|<\epsilon$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Si $\lim\limits_{r\to 0} f(r,\theta) = L$, no dependiendo de θ, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$.

Ejemplo 8.6

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$f(r,\theta) = \frac{r\cdot\cos\theta\cdot r^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta}{r^2\cdot\cos^2\theta + r^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{r^3\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} = r\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta \qquad \text{y}$$

$$|r\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta| \le r \qquad \text{y} \qquad \lim_{r\to 0} r = 0$$

8.3.1. Un proceso para calcular el límite. Primero calculamos los límites iterados, si estos no coinciden entonces no existe el límite. Si los límites iterados coinciden, entonces tendremos un candidato a límite, luego podemos comprobar, por acotación o coordenadas polares, si lo es o bien para asegurarnos calculamos los límites direccionales (rectas y parabolas). Si obtenemos un límite distinto, entonces no existe el límite. Si por el contrario seguimos obteniendo el mismo límite, entonces este se convierte en un serio candidato al límite. Para comprobar, si en efecto lo es, pasamos a coordenadas polares o bien utilizamos el método de acotación.

Ejemplo 8.7

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4+y^5}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

Límites iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2x^4+y^5}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{2x^4+y^5}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \lim_{x\to 0} y^2 = 0$$

Límites direccionales:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2x^4+y^5}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4+m^5x^5}{(x^2+m^2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2+m^5x)}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} \frac{2x^4+y^5}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4+m^5x^{10}}{(x^2+m^2x^4)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2+m^5x^6)}{(1+m^2x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Paso a coordenadas polares:

$$f(r,\theta) = \frac{2r^4\cos^4\theta + r^5\operatorname{sen}^5\theta}{r^3} = r(2\cos^4\theta + r\operatorname{sen}^5\theta)$$

$|r(2\cos^4\theta + r\operatorname{sen}^5\theta)| \le r(2\cos^4\theta + r|\operatorname{sen}^5\theta|) \le r(2+r)$ y $\displaystyle\lim_{r\to 0} r(2+r)$=0,

por tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4+y^5}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

9. Continuidad de funciones

Definición 9.1: Continuidad

Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ y $a\in\mathbb{R}^n$, diremos que f es continua en a si $\forall\,\epsilon>0\;\exists\,\delta>0$ tal que si $\|x-a\|<\delta$ entonces $\|f(x)-f(a)\|<\epsilon$.
Sea $A\subset\mathbb{R}^n$, diremos que f es continua en A si lo es en todo punto de A.
Si f no es continua en un punto a, diremos que es discontinua en a.

Teorema 9.2

Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ y $a\in\mathbb{R}^n$. Entonces f es continua en a sí y sólo sí existe el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y es igual a $f(a)$.

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Ejemplo 9.3

Estudiar la continuidad de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$, donde

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Si comprobamos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}=0$, entonces f será continua en $(0,0)$.

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 1\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

luego f es continua en $(0,0)$.

Teorema 9.4

Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ con funciones coordenadas $f(x)=(f_1(x),\dots,f_m(x))$, $a\in\mathbb{R}^n$ y $A\subset\mathbb{R}^n$.
Entonces:

- f es continua en $a\Leftrightarrow f_i$ es continua en $a\;\forall\, i=1,\dots,m$
- f es continua en $a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a} f_i(x)=f_i(a)\;\forall\, i=1,\dots,m$
- f es continua en $A\Leftrightarrow f_i$ es continua en $A\;\forall\, i=1,\dots,m$

Ejemplo 9.5

Estudiar la continuidad de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$, donde

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2},\operatorname{sen}(xy)\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0) & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\leq\frac{x^2|y|}{x^2}=|y| \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\operatorname{sen}(xy)=0$$

luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=(0,0)=f(0,0)\Rightarrow f$ es continua en $(0,0)$.

Proposición 9.6

Sean $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ dos funciones continuas en $a\in\mathbb{R}^n$, entonces:

- $\alpha\cdot f+\beta\cdot g$ es continua en $a\ \forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
- $\|f\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es continua en a.
- si $m=1\Rightarrow\begin{cases} f\cdot g \text{ es continua en } a\\ \text{Si } g(a)\neq 0\Rightarrow \dfrac{f}{g} \text{ es continua en } a\end{cases}$

Proposición 9.7

Sean $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ y $a\in\mathbb{R}^n$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g\circ f$ es continua en a. Esto nos dice que la composición de funciones continuas es una función continua.

10. Discontinuidades de funciones de una variable

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $a\in\mathbb{R}$, f puede presentar tres tipos de discontinuidades:

(1) **Discontinuidad evitable:** f presenta una discontinuidad evitable en a si los dos límites laterales son iguales y finitos, pero distintos de $f(a)$ o no existe $f(a)$.

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)\begin{cases}\neq f(a)\\ \text{ó}\\ \nexists f(a)\end{cases}$$

Ejemplo 10.1

a) Estudiar la continuidad de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ en $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$ y $\nexists\, f(a)$, por tanto en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable.

b) Estudiar la continuidad de $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

$f(0) = 1,\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0 \neq f(0) = 1$ por tanto en $x = 0$ hay una discontinuidad evitable.

(2) **Discontinuidad de salto finito:** f presenta en a una discontinuidad de salto finito si existen y son finitos los dos límites laterales, pero distintos.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Ejemplo 10.2

Estudiar la continuidad de $h(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < -1 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en $x = -1$.

$f(-1) = 2,\ \lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} x^2 - 1 = 0,\ \lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x^2 + 1 = 2.$

$\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$ por tanto en $x = -1$ hay una discontinuidad de salto finito.

(3) **Discontinuidad de salto infinito:** f presenta en a una discontinuidad de salto infinito si alguno de los límites laterales es infinito.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \ \text{ó} \ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

Ejemplo 10.3

Estudiar la continuidad de $j(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$ en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x} = \infty \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

En $x = 0$ hay una discontinuidad de salto infinito.

(4) **Discontinuidad de tercera especie:** f presenta en a una discontinuidad de tercera especie si no existe alguno de los límites laterales.

$f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ tiene una discontinuidad de 3ª especie ya que $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$.

11. Propiedades de funciones continuas

Definición 11.1: Función acotada

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, diremos que una función
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ esta acotada en S si existe $M > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M \; \forall \, x \in S$.
Si m=1

(1) Diremos que f está acotada superiormente en S si existe $K > 0$ tal que $f(x) \leq K \; \forall \, x \in S$. En este caso al número K se le llama cota superior de f.

(2) Diremos que f está acotada inferiormente en S si existe $N > 0$ tal que $f(x) \geq N \; \forall \, x \in S$. En este caso al número N se le llama cota inferior de f.

Definición 11.2: Extremos absolutos

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $S \subset \mathbb{R}^n$.

(1) Si f es acotada superiormente en S, se llama supremo de f en S a la menor de sus cotas superiores.

Se dice que f tiene en S un máximo absoluto si existe $x_0 \in S$ tal que $f(x) \leq f(x_0) \; \forall \, x \in S$.

(2) Si f es acotada inferiormente en S, se llama ínfimo de f en S a la mayor de sus cotas inferiores.

Se dice que f tiene en S un mínimo absoluto si existe $x_0 \in S$ tal que $f(x) \geq f(x_0) \; \forall \, x \in S$.

Teorema 11.3

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Entonces f está acotada en K y posee un máximo y un mínimo absoluto en K.

Teorema 11.4: Bolzano

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Corolario 11.5: Teorema del valor medio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y λ un número real situado entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \lambda$.

Definición 11.6: Monotonía

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $I \subset \mathbb{R}$, diremos que f es:

(1) Creciente en I si $\forall \, a, b \in I$ con $a \leq b$ se tiene que $f(a) \leq f(b)$.

(2) Decreciente en I si $\forall \, a, b \in I$ con $a \leq b$ se tiene que $f(a) \geq f(b)$.

(3) Estrictamente creciente en I si $\forall \, a, b \in I$ con $a < b$ se tiene que $f(a) < f(b)$.

(4) Estrictamente decreciente en I si $\forall \, a, b \in I$ con $a < b$ se tiene que $f(a) > f(b)$.

(5) Monótona en I si es creciente o decreciente en I.

(6) Estrictamente monótona en I si es estrictamente creciente o decreciente en I.