UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniería de Edificación 1^0

Ejercicios de Matemática Aplicada

Aplicaciones lineales y Diagonalización de matrices

1. Razonar si las siguientes aplicaciones son lineales:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x)$

   b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y^2$

   c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + 5y, y - x, y + 3x)$

   d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y^2, y + 2z)$

2. Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x, y + z)$. Se pide:

   a) Demostrar que es el lineal.

   b) Hallar el núcleo, su dimensión, una base y sus ecuaciones.

   c) Hallar la imagen y su dimensión.

3. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, z)$. Hallar $Ker(f)$, $Im(f)$ y $f(V)$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

4. Calcular la $Im(f)$ y el $Ker(f)$ de la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que viene definida por $f(x, y, z) = (x + y - z, x + y + z)$.

5. Dada $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x - y, x - y)$ comprobar que es un isomorfismo y calcular su aplicación inversa f^{-1}. Comprobar que el resultado obtenido es la función inversa.

   ¿Se puede calcular siempre la aplicación inversa de una apliación lineal?

6. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Estudiar si se trata de una aplicación inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

7. Sea f una aplicación lineal, ¿$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ puede ser sobreyectiva?

8. Sea f una aplicación lineal, ¿$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es siempre inyectiva?

9. Para las siguientes aplicaciones lineales calcular: matriz asociada en las bases canónicas, dimensión del núcleo y de la imagen y una base para ambos.

   a) $f(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (2, 0, 2)$ y $f(0, 0, 1) = (3, 2, 3)$.

b) $f(1,1,0)=(1,0)$, $f(0,1,1)=(0,1)$ y $f(1,0,1)=(1,1)$.

10. Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$$f(x,y,z)=(x+y,y+z,x+z),$$

se pide:

   a) Matriz asociada en las bases canónicas.
   b) Una base para el núcleo y otra para la imagen.
   c) Hallar una base para $f(S)$ siendo $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x-y=0\}$.

11. Calcular la dimensión del núcleo de la aplicación lineal cuya matriz asociada es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar una base de $Im(f)$ y clasifica la aplicación lineal.

12. Consideramos la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal de matriz asociada A con respecto a las bases canónicas. Encontrar una base de $Im(f)$ y clasifica la aplicación lineal.

13. Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z)=(x+y,x-z)$. Hallar $Im(f)$.

14. Siendo $B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $f(x,y,z)=(x+y,y+z,x)$, hallar la matriz asociada a f cuando:

   a) En el espacio inicial se considera la base canónica y en el final la base B.
   b) En el espacio inicial se considera la base B y en el final la base canónica.
   c) En ambos se considera la base B.

15. Supongamos que tenemos una base $B=\{u,v\}$ de $\mathbb{R}^2$ y un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que cumple $f(u)=5u+2v$ y $f(v)=3u-v$. Hallar la matriz asociada a f respecto de la base B.

16. Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z)=(x-y+2z,x+3y)$ y sean las bases $B_1=\{(1,0,-1),(2,1,0),(0,1,1)\}$ y $B_2=\{(-2,1),(1,-1)\}$. Se pide,

   a) Matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
   b) Matriz asociada a f respecto de la base B_1 de $\mathbb{R}^3$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$.
   c) Matriz asociada a f respecto de las base canónica. de $\mathbb{R}^3$ y la base B_2 de $\mathbb{R}^2$.
   d) Matriz asociada a f respecto de las bases B_1 y B_2.

17. Sean V y V' dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales son bases $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$, respectivamente. Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal tal que $v_1+v_2, v_1+v_3 \in Ker(f)$, $f(v_3) = f(v_2 + v_3 + v_4) = w_3$. Calcular la matriz asociada a f en las bases B y B', y bases del $Ker(f)$ y de la $Im(f)$.

18. Consideremos las bases $B = \{(2, -1), (1, 1)\}$ y $B' = \{(-1, 2, 0), (3, 1, 1), (0, -1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$$M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

calcular la matriz de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Nota. Para la resolución del ejercicio usa la siguiente propiedad:

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales donde $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de V y $\mathcal{B}_1'$ y $\mathcal{B}_2'$ de V', entonces

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2'}(f) = P_{\mathcal{B}_1'}^{\mathcal{B}_2'} \cdot M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}(f) \cdot P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$$

19. Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verifica:

$$f(0, 1, -1) = (0, 3, -3) \qquad f(1, 0, -1) = (5, 2, -1) \qquad f(1, 2, -2) = (4, 7, -5)$$

Se pide:

a) Matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Estudiar si el endomorfismo f es diagonalizable, en caso afirmativo determinar la matriz diagonal y la matriz de paso.

20. Sea f un endomorfismo. Estúdiese cuales son sus valores propios, si es diagonalizable y en caso afirmativo, búsquese la matriz diagonal y la de paso cuando la matriz asociada en base canónica sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

21. Estudiar si son diagonalizables las siguientes matrices, calculando, cuando sea posible la diagonalización, la matriz de paso P y la matriz diagonal D.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

22. Estudiar para que valores de los parámetros que aparecen son diagonalizables las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

23. Determinar el valor de A^n, B^n y C^n para cada $n \in \mathbb{N}$, para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$