Tema 1

Álgebra lineal básica

1. Espacios vectoriales reales

Definición 1.1

Un espacio vectorial real o un $\mathbb{R}$-espacio vectorial es una terna $(V,+,\cdot)$, donde " $+$ " es una ley de composición interna de V

$$\begin{array}{rccc} +: & V\times V & \to & V \\ & (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

que cumple las siguientes propiedades:

+1) asociativa: $(u+v)+w = u+(v+w)\ \forall\, u,v,w\in V$,
+2) conmutativa: $u+v=v+u\ \forall\, u,v\in V$,
+3) elemento neutro o nulo: $\exists\, 0\in V$ tal que $u+0=u\ \forall\, u\in V$,
+4) elemento simétrico u opuesto: $\forall\, u\in V\ \exists\, -u\in V$ tal que $u+(-u)=0$,

el cumplir estas cuatro propiedades es equivalente a decir que $(V,+)$ es un grupo abeliano,

y $\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{R}\times V & \to & V \\ & (\lambda,v) & \mapsto & \lambda\cdot v \end{array}$ es una ley de composición externa verificando:

·1) $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$,
·2) $(\lambda+\mu)\cdot v=\lambda\cdot v+\mu\cdot v$,
·3) $(\lambda\cdot\mu)\cdot v=\lambda\cdot(\mu\cdot v)$,
·4) $1\cdot v=v$, $\qquad\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ y $u,v\in V$.

A los elementos del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V les llamaremos vectores y a los de $\mathbb{R}$ escalares, a las operaciones " $+$ " suma y a " $\cdot$ " producto por escalares.

Ejemplos 1.2

- $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ es un espacio vectorial real donde $\mathbb{R}^n=\{(a_1,\ldots,a_n):a_i\in\mathbb{R}\}$ con las operaciones $(a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n)=(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$ y $\lambda\cdot(a_1,\ldots,a_n)=(\lambda a_1,\ldots,\lambda a_n)$.
- $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ (matrices reales de orden $n\times m$) es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma de matrices y el producto de un número real por una matriz.
- $\mathbb{R}_n[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots a_nx^n:a_i\in\mathbb{R}\}$, el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n, es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma de polinomios y el producto de un número real por un polinomio. Al igual que $\mathbb{R}[x]$, el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales.

A partir de hora, por simplificar, llamaremos a un $\mathbb{R}$-espacio vectorial simplemente espacio vectorial.

Definición 1.3: Subespacios vectoriales

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y H un subconjunto no vacío de H ($\emptyset \neq H \subseteq V$), diremos que H es un subespacio vectorial de V si $(H, +, \cdot)$ es un espacio vectorial, donde "$+$" y "$\cdot$" son las restricciones de las operaciones sobre H.

$$\begin{array}{rrcl} + : & H \times H & \to & H \\ & (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \cdot : & \mathbb{R} \times H & \to & H \\ & (\lambda, v) & \mapsto & \lambda \cdot v \end{array}$$

Si H es un subespacio vectorial de V lo denotaremos como $H \leq V$.

Proposición 1.4: Condiciones para ser subespacio

Sea $\emptyset \neq H \subseteq V$, donde V es un espacio vectorial, entonces H es un subespacio vectorial de V si y sólo si verifica las siguientes propiedades:

(1) si $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 + h_2 \in H$

(2) si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $h \in H \Rightarrow \lambda \cdot h \in H$

Ejemplos 1.5

- Subespacios propios: V y $\{0\}$ son el mayor y el menor subespacio de V.
- Si $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ entonces $H \leq \mathbb{R}^3$. Vamos a demostrarlo viendo que H cumple las dos condiciones para ser subespacio.
  (1) Si $h_1, h_2 \in H$, entonces son de la forma $h_1 = (a, b, c)$ y $h_2 = (a', b', c')$ donde $a + b + c = 0$ y $a' + b' + c' = 0$. $h_1 + h_2 = (a + a', b + b', c + c')$ entonces $h_1 + h_2 \in H$ si $(a + a') + (b + b') + (c + c') = 0$, pero $(a + a') + (b + b') + (c + c') =$ $= (a + b + c) + (a' + b' + c') = 0 + 0 = 0$, por tanto se cumple la primera condición.
  (2) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $h = (a, b, c) \in H$, entonces $a + b + c = 0$ y $\lambda \cdot h = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ por lo cual $\lambda \cdot h \in H$ si $\lambda a + \lambda b + \lambda c = 0$, pero $\lambda a + \lambda b + \lambda c = \lambda(a + b + c) =$ $= \lambda 0 = 0$, por tanto también se cumple la segunda condición.
- Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $F = \{v \in \mathbb{R}^n : A \cdot v = 0\}$ entonces $F \leq \mathbb{R}^n$, demostrémoslo:
  (1) Si $u, v \in F$, entonces $A \cdot u = A \cdot v = 0$, $A \cdot (u + v) = A \cdot u + A \cdot v = 0 + 0 = 0$ por tanto $u + v \in F$ y se cumple la primera condición.
  (2) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in F$ ($A \cdot v = 0$), $A \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (A \cdot v) = \lambda \cdot 0 = 0$ por lo $\lambda \cdot v \in F$ y se cumple la segunda condición.
- Sea $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2\}$, en este caso G no es subespacio de $\mathbb{R}^3$ ya que no cumple la primera condición, para verlo basta con encontrar un contraejemplo: $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 0, 1) \in G$, pero $u + v = (3, 1, 2) \notin G$ ya que $3 + 1 \neq 2$.
- Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0\}$, este subconjunto de $\mathbb{R}^3$ cumple la primera condición: si $u = (a, b, c)$ y $v = (a', b', c') \in U$ ($a, a' < 0$),
  $u + v = (a + a', b + b', c + c')$ y $a + a' < 0 + 0 = 0$ por lo que $u + v \in U$. Pero U no es un subespacio vectorial ya que no cumple la segunda: $u = (-1, 2, 4) \in U$, $-2 \cdot u = (2, -4, -8) \notin U$ ya que $2 > 0$.

2. Combinación y dependencia lineal

Definición 2.1: Combinación lineal

Sea V un espacio vectorial y $u, v_1, \ldots, v_n \in V$, diremos que u es combinación lineal (c. l.) de $v_1, \ldots, v_n$ si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que
$u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

Definición 2.2: Subespacio generado

Sea V un espacio vectorial y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un conjunto de vectores de V, llamaremos subespacio generado por $\{u_1, \ldots, u_n\}$ a

$$< u_1, \ldots, u_n > := \{v \in V : v \text{ es c. l. de } u_1, \ldots, u_n\},$$

es decir, es el subespacio formado por todas las combinaciones lineales de los $u_1, \ldots, u_n$. Este subespacio es el menor subespacio de V que contiene a los u_i, es decir si $F \leq V$ con $u_1, \ldots, u_n \in F$ entonces $< u_1, \ldots, u_n > \leq F$.

Definición 2.3: Sistema generador

Sea V un espacio vectorial, diremos que un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un sistema generador de V si $V =< u_1, \ldots, u_n >$.

Ejemplo 2.4

Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$, vamos a ver que $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es un sistema generador de V.
Según la definición de V, la condición que han de cumplir un vector de $\mathbb{R}^3$ para que esté en V es que las dos primeras coordenadas sean iguales ($x - y = 0$), por tanto los vectores de V son todos de la forma (a, a, b) para algún a y b de $\mathbb{R}$.
$(a, a, b) = a(1, 1, 0) + b(0, 0, 1)$, lo que demuestra que $V =< (1, 1, 0), (0, 0, 1) >$.

Definición 2.5: Dependencia lineal

Sea V un espacio vectorial, diremos que un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de V son linealmente independientes (l. ind.) si cumplen la siguiente propiedad:

$$\text{Si } \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_i = 0 \,\forall\, i = 1, \ldots, n.$$

En caso contrario diremos que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ son linealmente dependientes (l. d.).

Observaciones:

- Si $v \neq 0$ entonces $\{v\}$ es l. ind.
- Cualquier conjunto no vacío de uno l. ind. es l. ind.
- Si $0 \in \{u_1, \ldots, u_n\} \;\Rightarrow\; \{u_1, \ldots, u_n\}$ es l. d.
- $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es l. ind. si y sólo si ningún vector es c. l. de los demás.
- $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es l. d. si y sólo si algún vector es c. l. de los demás.

Ejemplos 2.6

- $\{(1,-1,0),(3,2,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ son l. ind.
  Para comprobar la afirmación anterior bastará demostrar que la ecuación $x(1,-1,0)+y(3,2,0)=(0,0,0)$ tiene como solución única $x=y=0$.
  $$x(1,-1,0)+y(3,2,0)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ -x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$
- $\{(1,-1,2),(-1,2,1),(3,0,3)\} \subset \mathbb{R}^3$ son l. d.
  $$(3,0,3)=2\cdot(1,-1,2)+(-1)\cdot(-1,2,1)$$

3. Base y dimensión de un espacio vectorial

Definición 3.1: Base de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial y $\{u_1,\ldots,u_n\}$ un conjunto de vectores de V:

- Se llama rango de $\{u_1,\ldots,u_n\}$ al número máximo de vectores l. ind. que hay.
  $$\mathrm{rang}(\{u_1,\ldots,u_n\})=k \Leftrightarrow < u_{i_1},\ldots,u_{i_k} > = < u_1,\ldots,u_n > \text{ siendo } k \text{ mínimo.}$$
- Se dice que $\mathcal{B}=\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de V si:
  (1) $\mathcal{B}$ es un sistema generador de V ($V =< v_1,\ldots,v_n >$).
  (2) $\mathcal{B}$ está formada por vectores l. ind.

$\mathcal{B}=\{v_1,\ldots,v_n\}$ base de $V \Leftrightarrow \mathcal{B}$ es generador y l. ind. $\Leftrightarrow V =< v_1,\ldots,v_n >$ y $\mathrm{rang}(\mathcal{B})=n$.

Observaciones:

- Cualquier sistema generador puede convertirse en una base eliminando vectores l. d.
- Cualquier conjunto de vectores que sean l. ind. pueden convertirse en una base añadiendo vectores que sean l. ind. con los demás.

Ejemplos 3.2

- Los vectores $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ son un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$ pero no forman base porque no son l. ind., basta observar que $(1,1,1) = 0\cdot(1,1,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(1,0,1)$, por lo que si eliminamos el vector $(1,1,1)$ podríamos tener una base. Para comprobar esto último bastará con ver que $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$ son l. ind.

$$x(1,1,0)+y(0,1,0)+z(1,0,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

  En consecuencia $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, de hecho cualquier vector $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ se puede obtener como:

$$(a,b,c)=(c-a)\cdot(1,1,0)+(b-c+a)\cdot(0,1,0)+c\cdot(1,0,1).$$

- Los vectores $\{(1,0,1),(1,0,0)\}\subset\mathbb{R}^3$ son l. ind.

$$x(1,0,1)+y(1,0,0)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0,$$

  pero no forman una base. Vamos a ver que si le añadimos el vector $(0,1,0)$ formarían una base, para lo cual tendremos que comprobar que $\{(1,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ es un sistema generador y de hecho cualquier vector $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ se puede obtener como:

$$(a,b,c)=c\cdot(1,0,1)+(a-c)\cdot(1,0,0)+b\cdot(0,1,0).$$

Proposición 3.3

Si $\{u_1,\dots,u_n\}$ y $\{v_1,\dots,v_k\}$ son dos bases de un mismo espacio vectorial V entonces $n=k$, es decir cualquier base de un espacio vectorial tiene el mismo número de vectores.

Definición 3.4: Dimensión de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial, llamaremos dimensión de V al número de vectores que tiene cualquier base de V.

$$\text{Si } \{v_1,\dots,v_n\} \text{ base de } V \Rightarrow \dim V = n.$$

Observación: La $\dim V$ es el número máximo de vectores l. ind. que hay en cualquier conjunto de vectores de V, al igual que el número mínimo de vectores necesarios para formar un sistema generador.

Ejemplos 3.5

- $\dim \mathbb{R}^n = n$: $\{(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}$ que recibe el nombre de base canónica.

  $$(a_1,\dots,a_n) = a_1\cdot(1,0,\dots,0) + a_2\cdot(0,1,0,\dots,0) + \dots + a_n\cdot(0,\dots,0,1)$$
- $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$: $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$ que recibe el nombre de base canónica.

  $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = a_0\cdot 1 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + \dots + a_n\cdot x^n$$
- Si $U \le V \Rightarrow \dim U \le \dim V$ y si $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$.

Ejercicio 3.1. Encontrar una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$,
$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$.

Si resolvemos la ecuación $x+y+z=0$ obtenemos como solución paramétrica $(x,y,z) = (\lambda, \mu, -\lambda-\mu)$, por lo que los vectores de V son de la forma
$(\lambda,\mu,-\lambda-\mu) = \lambda(1,0,-1) + \mu(0,1,-1)$. En consecuencia $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ es una base de V.

4. Coordenadas de un vector respecto a una base. Matriz del cambio de base

Proposición 4.1

Sea V un espacio vectorial y $\{u_1,\dots,u_n\} \subset V$. Entonces $\{u_1,\dots,u_n\}$ es base de V si y sólo si cada vector de V se expresa de forma única como c. l. de los u_i.

Definición 4.2: Coordenadas de un vector respecto a una base

Si $\mathcal{B} = \{u_1,\dots,u_n\}$ es una base de un espacio vectorial V y $u \in V$, sabemos que $u = \alpha_1u_1 + \dots + \alpha_nu_n$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}\ \forall\, i = 1,\dots,n$ y donde los α_i son únicos. Los escalares $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ reciben el nombre de coordenadas del vector u en la base $\mathcal{B}$, lo cual denotaremos como:

$$[u]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

Ejemplo 4.3

Al expresar un vector de $\mathbb{R}^n$, $(a_1,\dots,a_n)$, siempre lo solemos hacer a través de sus coordenadas en la base canónica.

$$(a_1,a_2,\dots,a_n) = a_1\cdot(1,0,\dots,0) + a_2\cdot(0,1,0,\dots,0) + \dots + a_n\cdot(0,\dots,0,1)$$

Ejercicio 4.1. Encontrar las coordenadas del vector $u = (7,-2,-2) \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(-1,1,1),(2,1,-1)\}$.

Las coordenadas serán la solución de la ecuación:

$$(7,-2,-2) = x(1,0,1) + y(-1,1,1) + z(2,1,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ y + z = -2 \\ x + y - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, y = -3, z = 1$$

Por tanto $[(7,-2,-2)]_{\mathcal{B}} = (2,-3,1)$.

4.0.1. Matriz del cambio de base. En esta sección realizaremos una serie de cálculos que nos llevarán a la obtención de una matriz (matriz del cambio de base), la cual nos servirá para calcular las coordenadas de un vector respecto de una base, sin necesidad de resolver un sistema de ecuaciones como en el ejercicio 4.1.

Sea V un espacio vectorial con bases $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$, $u \in V$ con coordenadas $[u]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$ y $[u]_{\mathcal{B}'} = (y_1, \dots, y_n)$.

Vamos a ver la relación existente entre $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$:

$$[u]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow u = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot u_j \qquad [u]_{\mathcal{B}'} = (y_1, \dots, y_n) \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i$$

Pongamos que $[u_j]_{\mathcal{B}'} = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \Rightarrow u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot v_i \; \forall \; j = 1, \dots, n$, por tanto nos queda:

$$u = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot u_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) \cdot v_i$$

Entonces tenemos expresado a u con dos c. l. de los v_i, $u = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i$ y $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) \cdot v_i$, y como la c. l. ha de ser única por ser $\mathcal{B}'$ una base, se ha de cumplir que $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \; \forall \; i = 1, \dots, n$, igualdad que en forma matricial queda:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A la matriz anterior, de orden $n \times n$, se le denomina matriz de paso de la base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ la cual denotamos por $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Esta matriz tiene como columnas las coordenadas de cada uno de los vectores de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$.

En conclusión $\quad [u]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}}$

Observación: La matriz $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ es regular (invertible) y se cumple que $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$

Proposición 4.4

Sea V un espacio vectorial, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ tres bases de V, entonces:

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Ejemplo 4.5

Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ otra base cualquiera, supongamos que $u_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj})\ \forall\ j = 1, \dots, n$, entonces:

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Es decir las columnas de $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ son los vectores de $\mathcal{B}$, además $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}$.

Ejercicio 4.2. Sean $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(1,-1,1),(-1,0,0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Calcular $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ y las coordenadas de $u \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}'$ sabiendo que $[u]_{\mathcal{B}} = (2,-6,4)$.

Para calcular la matriz $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ tendríamos que calcular las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$ para lo cual deberíamos resolver tres sistemas de ecuaciones. Pero hay otra forma más sencilla: teniendo en cuenta el resultado de la
proposición 4.0.1, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}})^{-1} \cdot P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ($\mathcal{C}$ base canónica), y según el ejemplo 4.0.1 estas matrices son aquellas cuyas columnas son los vectores de las dos bases. Por tanto para calcular $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ bastará con calcular la matriz inversa, de aquella cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}'$, y multiplicarla por la matriz que tiene como columnas los vectores de $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$[u]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = (-13, 7, 1)$$

5. Ecuaciones de un subespacio vectorial

Dado un espacio vectorial V y un subespacio $U \leq V$, llamaremos ecuación de U a cualquier expresión algebraica a partir de la cual podamos determinar todos los vectores de U. Vamos a estudiar dos tipos de ecuaciones: las ecuaciones implícitas y la paramétricas.

5.0.1. Ecuación general o implícita. Se trata de una ecuación o sistema homogéneo de ecuaciones lineales en donde todas las ecuaciones son independientes, es decir no hay una ecuación que sea combinación lineal de las demás. Por ejemplo:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x - t = 0 \\ x + 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \}$$

Si tenemos la ecuación implícita de un subespacio, su dimensión es igual al número de incógnitas menos el de ecuaciones, y la base del subespacio la podemos obtener resolviendo el sistema de ecuaciones como se hace el el ejercicio 3.1.

5.0.2. Ecuación paramétrica. Como su nombre indica, es una ecuación dada de forma explícita a través de un número de parámetros, es decir nos define las coordenadas de los vectores a través de parámetros. En este caso los coeficientes que acompañan a los parámetros han de formar vectores l. ind. y estos vectores formarán una base del subespacio, la dimensión es el número de parámetros que aparecen. Por ejemplo:

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = 2\lambda - 3\mu \\ z = \lambda + 2\mu \\ t = -\lambda + \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

En este caso, $\dim W = 2$ y una base es $\{(1, 2, 1, -1), (-1, -3, 2, 1)\}$.

6. Matrices

Representaremos por $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices reales de orden $n \times m$ (n filas y m columnas). El caso de las matrices cuadradas (mismo número de filas que de columnas) de orden n lo denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$.

Definición 6.1

- Dada una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ el elemento a_{ij} es el elemento de la fila i que ocupa la columna j.
- Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, llamaremos diagonal principal de A a los elementos de la forma a_{kk}.
- Llamaremos matriz identidad de orden n, I_n, a aquella matriz cuadrada de orden n donde todos los elementos de la diagonal principal son 1 y los demás son nulos.
- Llamaremos matriz nula, 0, a aquella matriz que tiene todos sus elementos nulos.
- Dada una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, llamaremos matriz traspuesta de A, $A^T \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, a aquella matriz obtenida al intercambiar las filas por columnas en A.
- Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, diremos que es simétrica si $A = A^T$.
- Diremos que una matriz A es triangular inferior (superior) si todos los elementos situados por debajo (arriba) de la diagonal principal son todos nulos.
- Dada una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$, diremos que es regular si tiene inversa, es decir, si $\exists\, A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

6.1. Operaciones con matrices.

6.1.1. Suma de matrices. $(M_{n\times m}(\mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano por cumplir las siguientes propiedades:

- Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Conmutativa: $A + B = B + A$
- Elemento neutro o nulo: $\exists\, 0 \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que $A + 0 = A$
- Elemento simétrico u opuesto: $A + (-A) = 0$

6.1.2. Producto de matrices. No todo par de matrices se pueden multiplicar, para realizar el producto $A \cdot B$ es preciso que el número de columnas de A sea igual al de filas de B, es decir, si $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ entonces $B \in M_{m\times h}(\mathbb{R})$.

Además el producto de matrices no es conmutativo es decir que $A \cdot B \neq B \cdot A$, a parte de que si podemos realizar el producto $A \cdot B$ no se tiene por que poder realizar $B \cdot A$.

$(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ es un anillo unitario no conmutativo por cumplir además las propiedades:

- Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Elemento neutro: $\exists\, I_n \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$
- Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

6.2. Transformaciones elementales. Dada una matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, llamaremos transformaciones elementales de filas (columnas) de A a cada una de las siguientes transformaciones:

- Intercambiar la posición de dos filas (columnas).
- Multiplicar todos los elementos de una fila (columna) por un escalar no nulo.
- Sumar a un a fila (columna) dada, otra multiplicada por un escalar.

Definición 6.2: Matrices semejantes

Diremos que dos matrices $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ son equivalentes, $A \sim_e B$, si una se obtiene a partir de la otra por medio de transformaciones elementales.

Proposición 6.3

Dos matrices $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ son equivalentes si y sólo si existen matrices regulares $P \in M_n(\mathbb{R})$ y $Q \in M_m(\mathbb{R})$ tales que $A = P \cdot B \cdot Q$.

Observación: Si dos matrices $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ son equivalentes y A se obtiene de B sólo a partir de transformaciones por filas (columnas) entonces existe una matriz regular $P \in M_n(\mathbb{R})$ ($Q \in M_m(\mathbb{R})$) tal que $A = P \cdot B$ ($A = B \cdot Q$).

Definición 6.4: Rango

Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, el rango de A ($\operatorname{rang}(A)$) es el número máximo de vectores fila o columna l. ind. de A. ($\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$)
Por definición se deduce que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$.

Proposición 6.5

Dos matrices son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.

Observación: El rango de una matriz triangular es el número de filas no nulas que tiene.

Ejemplo 6.6

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}$.
Para calcular el rango de de A vamos a realizar transformaciones elementales por filas hasta obtener una matriz triangular, cuyo rango será el mismo que de A ya que serían semejantes. El primer paso es conseguir ceros en las entradas a_{21} y a_{31} utilizando como pivote el elemento a_{11}, para ello vamos a sumar la primera fila multiplicada por -2 a la segunda y la primera multiplicada por -4 a la tercera. Así obtenemos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -9 & -7 \\ 0 & 6 & -27 & -21 \end{pmatrix}$. Para finalizar, en la nueva matriz, tenemos que conseguir un cero en a_{32} utilizando como pivote el a_{22}, por tanto vamos a sumar la segunda fila multiplicada por -3 a la tercera y obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esta última matriz es triangular con sólo dos filas no nulas por tanto su rango y el de A es 2.

Proposición 6.7: Método de Gauss-Jordan

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ regular, entonces es posible llegar, a partir de A, a la matriz identidad I_n mediante transformaciones elementales sólo por filas (columnas).

Observación: Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es regular entonces $A \sim_e I_n$ y además la matriz identidad I_n se puede obtener de A mediante transformaciones por filas (columnas) por lo que existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ ($Q \in M_n(\mathbb{R})$) regular tal que $I_n = P \cdot A$ ($I_n = A \cdot Q$), por tanto $P = A^{-1}$ ($Q = A^{-1}$).

Ejemplo 6.8

Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Para calcular la matriz inversa vamos a utilizar el método de Gauss-Jordan, el cual consiste en aplicar a la matriz identidad las mismas transformaciones elementales por filas, que se le aplican a la matriz A para convertirla en la identidad. La matriz resultante de aplicarle a la identidad dichas transformaciones es la inversa de A.

Para realizar el proceso, utilizamos una nueva matriz obtenida ampliando las filas de la matriz A con la identidad y vamos realizando transformaciones hasta que la parte correspondiente de la matriz A se convierta en la identidad, la correspondiente a la identidad será la inversa de A.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, el primer paso es hacer ceros en a_{21} y a_{31} utilizando como pivote a a_{11}, para ello vamos a sumar la primera fila multiplicada por -1 a la segunda y la primera multiplicada por 2 a la tercera. Así obtenemos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ahora tenemos que conseguir un cero en a_{32} utilizando como pivote el a_{22}, por tanto vamos a sumar la segunda fila a la tercera y obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lo siguiente es conseguir ceros en a_{13} y a_{23} utilizando como pivote a a_{33}, sumamos la tercera fila multiplicada por $\frac{-1}{3}$ a la primera y a la segunda $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. El siguiente paso es conseguir un cero en a_{12} utilizando como pivote a a_{22}, sumamos la segunda fila a la primera $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Por último es conseguir que en la diagonal principal sólo hayan unos, que en nuestro caso sólo tenemos que multiplicar la tercera fila por $\frac{1}{3}$ y finalizamos obteniendo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Por tanto la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

6.3. Determinante de una matriz cuadrada. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, vamos a definir el determinante de A ($\det A$, $|A|$), por inducción en n:

- Si $n = 1 \to A = (a_{11}) \to |A| = a_{11}$
- Si $n > 1 \to$ supongamos que sabemos calcular el determinante de matrices de orden $n-1$, definimos el determinante de A como:
  Sea A_{ij} la matriz que se obtiene de A quitándole la fila i-ésima y la columna j-ésima.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  Llamamos ij-ésimo menor adjunto de A al valor $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$. Entonces fijando una columna j_0 (o fila i_0) se define el determinante de A como:

$$\det(A) = a_{1j_0}\alpha_{1j_0} + a_{2j_0}\alpha_{2j_0} + \cdots + a_{nj_0}\alpha_{nj_0}$$ [1]

$$(\det(A) = a_{i_01}\alpha_{i_01} + a_{i_02}\alpha_{i_02} + \cdots + a_{i_0n}\alpha_{i_0n})$$ [2]

  Por ejemplo si calculamos el determinante desarrollándolo por la primera columna quedaría:

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1}$$

Observación: Tal y como se ha definido el determinante, al dar igual desarrollarlo por una fila o una columna, se deduce que $\det(A) = \det(A^T)$.

Definición 6.9: Matriz adjunta

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, a la matriz $A_{adj} = (\alpha_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ formada por los menores adjuntos de A recibe el nombre de matriz adjunta de A.

[1] Determinante de A desarrollado por la columna j_0-ésima

[2] Determinante de A desarrollado por la fila i_0-ésima

Ejemplos 6.10

- Si $A = (a_{11}) \to \ |A| = a_{11}$
- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \ |A| = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{21}(-1)^{2+1}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

  $$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$
  $= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) =$
  $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}.$

  Resultado que coincide con la conocida regla de Sarrus para calcular determinantes de orden 3.
- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

6.3.1. Propiedades de los determinantes. Sean $A, B, C \in M_n\mathbb{R}$:

- Si A, B y C sólo se diferencian en la columna j_0-ésima (fila i_0-ésima), siendo $col_{j_0}(A) = \lambda \cdot col_{j_0}(B) + \mu \cdot col_{j_0}(C)$ ($fil_{j_0}(A) = \lambda \cdot fil_{i_0}(B) + \mu \cdot fil_{i_0}(C)$), entonces $\det(A) = \lambda \cdot \det(B) + \mu \cdot \det(C)$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 + \mu c_1 \\ a_2 & \lambda b_2 + \mu c_2 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \mu \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

- Si una fila o columna de A se multiplica por un escalar, el determinante queda multiplicado por el escalar.
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- Si una matriz tiene una fila o columna nula su determinante es nulo.
- Si alguna fila o columna es c. l. de las demás, el determinante es nulo.
- Si en una matriz se intercambian dos filas o columnas, el determinante cambia de signo. En general, si se realiza un número par de cambios el determinante no varía, pero si es impar cambia de signo.
- Si en una matriz a una fila o columna se le suma una c. l. de las demás el determinante no varía.
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, $\quad \det(A^k) = \det(A)^k$.
- Si A es regular $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Proposición 6.11

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$, además se tiene que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A_{adj})^T$$

Definición 6.12

Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ y sea $r \leq n, m$, se llama menor de orden r al determinante de cualquier submatriz cuadrada de A de orden r.
Si $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}$, una submatriz cuadrada de orden r es $A_r = (a_{i,j})_{\substack{i = i_1, \dots, i_r \\ j = j_1, \dots, j_r}}$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ y $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$, y un menor de orden r es $\det(A_r)$.
Se le llama menor principal de orden r al $\det\left((a_{i,j})_{i,j=1}^{r,r}\right)$.

Proposición 6.13

Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, el rango de A es r si y sólo si existe en A un menor de orden r no nulo y todo menor de orden $r+1$ es nulo.

Observaciones: Podemos calcular el rango de una matriz utilizando menores:

- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ y su determinante es no nulo, entonces su rango es n.
- Si $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, buscamos, por ejemplo, un menor de orden 2 no nulo (si no lo hay su rango será menor que 2) y este mismo menor lo vamos ampliando de orden hasta que todos los de un cierto orden $k > 2$ que lo contengan sean nulos, entonces $\operatorname{rang}(A) = k - 1$.

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}$.

Si cogemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, por tanto el rango es mayor igual que 2, ahora orlamos (ampliamos) el menor no nulo encontrado.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 0$.

Las dos únicas ampliaciones posibles son nulas por lo que el rango es dos.

7. Sistemas de ecuaciones lineales

Dado el sistema de n ecuaciones con m incógnitas $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$, llamaremos matriz de coeficientes a la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$, matriz de términos independientes a $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, matriz incógnita a $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ y matriz ampliada del sistema $(A|B)$ a la matriz que se obtiene al añadirle a A la columna que forman los elementos de B.

Con estos datos podemos expresar el sistema de forma matricial como $A \cdot X = B$.

Definición 7.1

Con la notación anterior, dado el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$.

- Diremos que $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ es solución del sistema si $A \cdot C = B$.
- Diremos que dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.
- Diremos que el sistema es **compatible determinado** (S.C.D.) si tiene una única solución, **compatible indeterminado** (S.C.I.) si tiene infinitas soluciones e **incompatible** (S.I.) si no tiene solución.

Proposición 7.2

Dados dos sistemas de ecuaciones $A_1 \cdot X = B_1$ y $A_2 \cdot X = B_2$, si $(A_1|B_1)$ y $(A_2|B_2)$ son equivalentes por filas entonces ambos sistemas son equivalentes.

Demostración. Si $(A_1|B_1)$ y $(A_2|B_2)$ son equivalentes por filas entonces existe una matriz P tal que $P \cdot (A_1|B_1) = (A_2|B_2) \Leftrightarrow P \cdot A_1 = A_2$ y $P \cdot B_1 = B_2$.

C solución de $A_1 \cdot X = B_1 \Leftrightarrow A_1 \cdot C = B_1 \Leftrightarrow P \cdot A_1 \cdot C = P \cdot B_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A_2 \cdot C = B_2 \Leftrightarrow C$ solución de $A_2 \cdot X = B_2$. □

7.1. Método de Gauss. Dado el sistema de ecuaciones $A \cdot X = B$, el método de Gauss consiste en realizar transformaciones elementales por filas a la matriz $(A|B)$ para obtener una matriz triangular inferior $(A'|B')$, de forma que el sistema de ecuaciones $A' \cdot X = B'$ es sencillo de resolver y es equivalente al original.

Ejemplo 7.3

Resolver el sistema $\begin{cases} x - 4y + z = 8 \\ 3x - 12y + 5z = 26 \\ 2x - 9y - z = 14 \end{cases}$.

La matriz del sistema es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 8 \\ 3 & -12 & 5 & 26 \\ 2 & -9 & -1 & 14 \end{array}\right)$, para convertirla en triangular primero tenemos que hacer ceros en a_{21} y a_{31} utilizando como pivote a a_{11}, para ello vamos a sumar la primera fila multiplicada por -3 a la segunda y la primera multiplicada por -2 a la tercera. Así obtenemos la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right)$ en la cual si intercambiamos las filas segunda y tercera obtenemos la matriz triangular $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$, por lo que obtenemos el sistema equivalente $\begin{cases} x - 4y + z = 8 \\ -y - 3z = -2 \\ 2z = 2 \end{cases}$ cuya solución es $z = 1$, $y = -1$ y $x = 3$.

7.2. Teorema de Rouche-Frobenius. Dado el sistema de ecuaciones $A \cdot X = B$, entonces:

(1) Si el $\text{rang}(A) = rang(A|B)$ el sistema es compatible:
- *a)* si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$ igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
- *b)* si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$ menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

(2) Si el $\text{rang}(A) < \text{rang}(A|B)$ el sistema es incompatible.

Ejemplo 7.4

Discutir el sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+ay+z=2 \\ x+ay-z=3 \end{cases}$ según el valor del parámetro a.

Para discutir el sistema vamos a aplicar el teorema de Rouche-Frobenius, por lo cual calcularemos los rangos de la matriz de coeficientes A y la ampliada $(A|B)$ según el valor que tome a.

$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & a & 1 & | & 2 \\ 1 & a & -1 & | & 3 \end{pmatrix}$, el $\det(A) = -a+3$ por tanto si $a \neq 3$ su determinante no es nulo por lo que su rango será 3 igual al de la ampliada y al número de incógnitas lo que nos da un sistema compatible determinado.

Ahora vamos a estudiar el caso $a = 3$.

$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 3 & 1 & | & 2 \\ 1 & 3 & -1 & | & 3 \end{pmatrix}$, el $\text{rang}(A) = 2$ ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y el $\text{rang}(A|B) = 3$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, por tanto en este caso el sistema es incompatible.

Resumiendo: $\begin{cases} \text{Si } a \neq 3 \text{ S.C.D.} \\ \text{Si } a = 3 \text{ S.I.} \end{cases}$

7.3. Regla de Crammer. Dado el sistema de ecuaciones $A \cdot X = B$ con $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $\det(A) \neq 0$. Definimos A_j como la matriz obtenida de A al cambiar su columna j-ésima por la columna B, entonces la solución del sistema es:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \; \forall\, i = 1, \ldots, n$$

Ejemplo 7.5

Resolver, utilizando la regla de Crammer, el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$.

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 2, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1, \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 1$$