UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniería de Edificación 1^0

Ejercicios de Matemática Aplicada

Álgebra lineal

1. Comprobar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales o no:

   a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

   b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2\}$

   c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0\}$

   d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

   e) $E = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(1) = 0\}$

   f) $F = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x]\}$

2. Calcular 3 combinaciones lineales de
$$L = \{(-1, 1, 0, 1), (0, 0, -1, 1), (0, 0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^4.$$

3. ¿Es el vector $v = (0, 4, 9)$ combinación lineal de $L = \{(1, 1, 3), (-1, 3, 5)\}$?

4. ¿Es el vector $v = (1, -4, -1)$ combinación lineal de $L = \{(1, -1, 2), (1, -2, 1)\}$?

5. Calcula un sitema generador de $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$. Demuestra que lo es.

6. Determinar el valor de a para que el vector $(1, a, 5) \in \mathbb{R}^3$ pertenezca al subespacio $< (1, 2, 3), (1, 1, 1) >$.

7. Determinar los valores de a y b, si es que existen, para que
$$< (a, 1, -1, 2), (1, b, 0, 3) > = < (1, -1, 1, -2), (-2, 0, 0, -6) > .$$

8. ¿Es el conjunto de vectores $\{(1, -1), (0, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$? En caso afirmativo demuéstralo.

9. ¿Es el conjunto de vectores $\{(1, 1, 1), (0, -1, 1), (0, 0, -1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$? En caso afirmativo demuéstralo.

10. Sea el subespacio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Hallar base, dimensión y ecuaciones paramétricas.

11. Sea el subespacio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y - z = 0\}$. Hallar base, dimensión y ecuaciones paramétricas.

12. Dados los vectores $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 0, 1)$, $u_3 = (3, 2, 2, 3)$ de $\mathbb{R}^4$, se pide:

a) Comprobar que son linealmente dependientes.

b) Hallar un subconjunto máximo de vectores linealmente independientes.

c) Completar hasta obtener una base de $\mathbb{R}^4$.

13. Consideramos la base de $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B} = \{(1,-1),(-1,0)\}$. Calcula las coordenadas del vector $v = (3,-2)$ respecto de dicha base.

14. Expresar el vector $v = (-5, 8, 11)$ como combinación lineal de los vectores

$$u_1 = (1,3,4), \quad u_2 = (1,2,5), \quad u_3 = (-1,2,3).$$

¿Cuáles son las coordenadas del vector v respecto de u_1, u_2, u_3?

15. Las coordenadas de un vector v referidas a la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(0,-1)\}$ son $(1,3)$. Halle las coordenadas de v en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

16. Sea el subespacio T de $\mathbb{R}^4$ cuya base es $\{(1,2,0,1),(-1,1,0,0)\}$. Hallar la dimensión y las ecuaciones paramétricas de T.

17. Sea $V \leq \mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,2,1),(1,3,2)\}$ y $W \leq \mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,1,0),(3,8,5)\}$. Probar que $V = W$.

18. Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^4$ con base $<(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0)>$. Hallar dimensión y ecuaciones cartesianas (ecuación general o implícita) de H.

19. Sea el subespacio S de $\mathbb{R}^3$ cuya base es $\{(1,2,-1),(0,1,2)\}$. Hallar sus ecuaciones cartesianas.

20. Calcular bases de los subespacios de $\mathbb{R}^3$ S, T, $S+T$ y $S \cap T$, siendo

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\} \quad \text{y} \quad T = <(1,1,1),(1,1,0),(-1,-1,1)> .$$

21. Calcular bases de los subespacios de $\mathbb{R}^3$ S, T, $S+T$ y $S \cap T$, siendo

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-2z=0\} \quad \text{y} \quad T = <(1,1,1),(2,-1,-1)> .$$

22. Calcular bases de los subespacios de $\mathbb{R}^4$ S, T, $S+T$ y $S \cap T$, siendo

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y=0\} \quad \text{y} \quad T = <(1,1,2,1),(2,3,-1,1)> .$$

23. Sean $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(1,-1,1),(-1,0,0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y las coordenadas de $u \in \mathbb{R}^3$ en $\mathcal{B}'$ sabiendo que $[u]_{\mathcal{B}} = (2,-6,4)$.

24. Escribir la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, donde $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,1,2),(2,2,1),(1,2,2)\}$.

25. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$ tales que las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ en la base $\mathcal{B}$ son $[u_1]_{\mathcal{B}} = (1,1,1)$, $[u_2]_{\mathcal{B}} = (1,1,2)$ y $[u_3]_{\mathcal{B}} = (1,2,3)$. Sea $v \in \mathbb{R}^3$ tal que sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$ son $[v]_{\mathcal{B}} = (6,9,14)$. Calcular la matriz de cambio de base $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ y las coordenadas de v en la base $\mathcal{B}'$.

26. Hallar por medio del método de Gauss-Jordan la inversa, si existe, de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & -2 & -9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

27. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar A^2, A^{-1} y $|A|$.

28. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar $|A - \lambda I|$ siendo $\lambda = 8$.

29. Hallar el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

30. Hallar la independencia o dependencia lineal de las columnas o filas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

31. Hallar los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & -9 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

32. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcular:

$$a) \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

33. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcular:

$$a)\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

34. Sea $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tales que $|A| = 2$ y $|B| = -3$, calcular, $|3A|$, $|AB|$, $|A^T B|$, $|A^{-1}B|$ y $|B^{-1}A|$.

35. Resolver por el Método de Eliminación Gaussiana el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 3t = 4 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ 3x - y - z + 2t = -3 \\ -x + 2y + 3z - t = 4 \end{cases}$$

36. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando la regla de Cramer:

$$a)\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y - z = 3 \\ 6x - 5y - z = 11 \end{cases}$$

37. Discutir según los parámetros el número de soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + z = 9 \\ 4x + y + az = 13 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + 3y - 2z = 0 \\ -x - 4z = 3 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + ay + z = 2 \\ x + ay - z = 3 \end{cases} \quad e)\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = b^2 \end{cases}$$