



Ejercicios de integración

Integrales en una variable

Ejercicio 1 *Calcula las siguientes primitivas:*

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}} dx.$ | 13. $\int x^2 \ln x dx.$ | 26. $\int \frac{x^4+x^2+2x+1}{x^4(x+1)^2} dx.$ |
| 2. $\int \frac{4x}{\sqrt{8-x^2}} dx.$ | 14. $\int x\sqrt{1+x} dx.$ | 27. $\int \frac{x^7+x^3}{x^4-1} dx.$ |
| 3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx.$ | 15. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx.$ | 28. $\int \frac{x-1}{x+1} dx.$ |
| 4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$ | 16. $\int t g x dx.$ | 29. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3} dx.$ |
| 5. $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx.$ | 17. $\int (1+t g x)^2 dx.$ | 30. $\int \frac{2x^2-x-2}{(x-3)(x^2+x+1)} dx.$ |
| 6. $\int \frac{x}{a^4-x^4} dx.$ | 18. $\int \sec x dx.$ | 31. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx.$ |
| 7. $\int \frac{1}{e^x+1} dx.$ | 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}.$ | 32. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}.$ |
| 8. $\int \operatorname{cosec} x dx.$ | 20. $\int \frac{\arcsen x}{x^2} dx.$ | 33. $\int \frac{dx}{x^3-1} dx.$ |
| 9. $\int \arcsen \sqrt{x} dx.$ | 21. $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}.$ | 34. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$ |
| 10. $\int \frac{5x^2}{\sqrt{x}} dx.$ | 22. $\int x^n \ln x dx.$ | 35. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$ |
| 11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} dx.$ | 23. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3} dx.$ | 36. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3-x}}.$ |
| 12. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx.$ | 24. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx.$ | 37. $\int \frac{\sqrt{4+3x}}{4-3x} dx.$ |
| 25. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx.$ | | |

Ejercicio 2 *Calcula el área encerrada por las curvas de ecuaciones $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ e $y = -x^2 + 3x - 1$.*

Ejercicio 3 *Halla el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \ln(x+5)$ y las rectas $y = 0$, $x = -\frac{9}{2}$ y $x = 1$.*

Ejercicio 4 *Calcula la siguiente integral:*

$$\int_0^3 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx.$$

Calcula ahora el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje $y = 0$ en el intervalo $[0, 3]$. ¿Coincide este área con el valor de la integral anterior? ¿Por qué?

Ejercicio 5 *Calcula las siguientes integrales impropias:*

1. $\int_1^{\infty} e^x dx.$

2. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

Observa que ambas integrales dan lo mismo. ¿Podrías haber llegado a esa conclusión sin necesidad de calcularlas?

Soluciones

Ejercicio 1

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\frac{2}{9}\sqrt{x^3-1}(x^3+5)+C.$ | 15. $\frac{e^x}{1+x}+C.$ | 28. $x-2\ln x+1 +C.$ |
| 2. $-4\sqrt{8-x^2}+C.$ | 16. $-\ln \cos x +C.$ | 29. $-\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{5}{x-1}+2\ln x-1 +C.$ |
| 3. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln \sqrt[6]{x}+1 +C.$ | 17. $\operatorname{tg} x-2\ln \cos x +C.$ | 30. $\ln x-3 +\frac{1}{2}\ln x^2+x+1 +\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}(2x+1)^{\frac{\operatorname{sgrt} 3}{3}}+C.$ |
| 4. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\operatorname{arcsen} x+C.$ | 18. $\ln \sec x+\operatorname{tg} x +C.$ | 31. $x-2\operatorname{arctg} x+C.$ |
| 5. $2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C.$ | 19. $\frac{1}{b}\operatorname{arcsec}\frac{bx}{a}+C.$ | 32. $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x+C.$ |
| 6. $\sqrt{14}a^2(-\ln a-x -\ln a+x +\ln a^2+x^2)+C.$ | 20. $-\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}+\ln\left \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right ^{\frac{1}{2}}+C.$ | 33. $\frac{1}{3}\ln x-1 -\frac{1}{6}\ln x^2+x+1 -\frac{1}{3}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}+C.$ |
| 7. $-\ln 1+e^{-x} +C.$ | 21. $\operatorname{arctg}(\ln x)+C.$ | 34. $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[4]{x}+4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C.$ |
| 8. $\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} +C.$ | 22. Si $n \neq -1$ $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}((n+1)\ln x-1)+C$, si $n = -1$ $\frac{1}{2}\ln^2 x +C.$ | 35. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$ |
| 9. $\frac{2x-1}{2}\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C.$ | 23. $-\frac{3}{5}\sqrt[5]{x^5}-\frac{1}{2x^2}+C.$ | 36. $4\sqrt[4]{x}+4\ln \sqrt[4]{x} -1+C.$ |
| 10. $2x^2\sqrt{x}+C.$ | 24. $-\frac{1}{a}\operatorname{arcsec}(\frac{x}{a})+C.$ | 37. $-\frac{2}{3}\sqrt{4+3x}+\frac{\sqrt{8}}{3}(\ln \sqrt{8}+\sqrt{4+3x} +\ln \sqrt{8}-\sqrt{4+3x})+C.$ |
| 11. $\frac{1}{b}\operatorname{arcsen}\frac{bx}{a}+C.$ | 25. $-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^6}+C.$ | |
| 12. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\frac{x}{2}+C.$ | 26. $-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x+1}+C.$ | |
| 13. $\frac{x^3}{9}(3\ln x -1)+C.$ | 27. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}\ln x-1 +\frac{1}{2}\ln x+1 +\frac{1}{2}\ln x^2+1 +C.$ | |
| 14. $\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{1+x}(x-\frac{2}{5}(1+x))+C.$ | | |

Ejercicio 2 $\frac{37}{12}.$

Ejercicio 3 $6\ln 6 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{9}{2} \simeq 5,9040.$

Ejercicio 4 $-\frac{9}{4}$ y $\frac{37}{12}.$

Ejercicio 5 $e-1.$