UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniería de Edificación 1^0A

Ejercicios de Matemática Aplicada

Integración.

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $\displaystyle\int_{2x+1}^{x^3} sen(t^2)dt$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{x^2} e^{t^3}dt$

   c) $\displaystyle\int_{3x}^{x^2} \frac{dt}{1-t^2}$

2. Calcule las siguientes integrales en el caso que sean convergentes:

   a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{3} (x-2)^{-1}dx$

   c) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{x-1}$

3. Hallar el área del recinto limitado por:

   a) $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.

   b) $y = sen(x)$, $y = cos(x)$, $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

   c) $y = x^2$ y $y^2 = x$.

   d) $x = 4y - y^2$ y $x = 2y - 3$.

   e) $y = \frac{1}{x}$, $x = 0$, $y = 1$ y $y = 2$.

4. Calcular la longitud de los arcos de curva de las funciones dadas, comprendidos entre los puntos de abcisas indicados:

   a) $y = x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo $[0, 4]$.

   b) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

   c) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{lnx}{2}$ en el intervalo $[1, 2]$.

5. Calcular el volumen de revolución:

   a) que se obtiene girando la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ sobre el eje x de 0 a 1.

   b) al girar alrededor del eje OY el arco de la curva $y = sen(x)$ comprendido entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

6. Evaluar las siguientes integrales:

   a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$

   b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y dy dx$

   c) $\int\int_R (x - 3y^2) d(x, y)$, donde $R = \{(x, y) \text{ tal que } 0 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq 2\}$.

   d) $\int\int_R y sen(xy) d(x, y)$ donde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

   e) $\int\int_D (x + 2y) d(x, y)$, donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$.

   f) $\int\int_R (3x + 4y^2) d(x, y)$, donde R es la región en el semiplano superior que está acotada por los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

   g) $\int_A \frac{1}{(4 - x^2 - y^2)(1 + x^2 + y^2)} d(x, y)$ donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, |y| \leq x\}$.

   h) $\int_A (x^2 + y^2)\sqrt{1 - x^2 - y^2} d(x, y)$, donde el recinto de integración es $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$.

7. Sea f una función definida en $I = [1, 2] \times [1, 4]$ del siguiente modo:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^{-2}, & x \leq y \leq 2x, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

   Indique, mediante un dibujo, la porción de A del rectángulo I en la que f no es nula y calcule el valor de la integral $\int_A f d(x, y)$, supuesta su existencia.

8. Halle el área de la superficie engendrada al girar alrededor del eje x el arco de curva $y = x^3$ en $[0, 1]$.

9. Calcular el volumen del sólido S que está acotado por el parabolide $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$, $y = 2$ y los tres planos coordenados.

10. Determine el volumen del sólido que está bajo el parabolide $z = x^2 + y^2$ y encima de la región D en el plano xy acotado por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

11. Determine el volumen del sólido acotado por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

12. Evaluar la integral triple

$$\int\int\int_B xyz^2 d(x,y,z)$$

donde $B = \{(x,y,z) \text{ tal que } 0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 3\}$.

13. Evaluar $\displaystyle\int\int\int_E zd(x,y,z)$, donde E es el tetraedro sólido acotado por los cuatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

14. Utilice una integral triple para encontrar el volumen de un tetraedro T acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$.

15. Determine el centro de masa de un sólido con densidad constante que está acotado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z$, $z = 0$ y $x = 1$.

16. Un sólido E está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, debajo del plano $z = 4$, y encima del parabolide $z = 1 - x^2 - y^2$. La densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia al eje del cilindro. Determine la masa de E. Nota: Use coordenadas cilíndricas, $f(x,y,z) = K\sqrt{x^2+y^2} = Kr$ donde K es la constante de proporcionalidad.

17. Evalúe

$$\int_{-2}^{2}\int_{-4\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx$$

usando coordenadas cilíndricas.

18. Evalúe

$$\int\int\int_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} d(x,y,z),$$

donde B es una bola unitaria $B = \{(x,y,z) \text{ tal que } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

19. Utilice coordenadas esféricas para determinar el volumen del sólido que está por encima del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

20. Calcule la integral

$$\int\int\int_V (2zx^2 + 2zy^2)dxdydz,$$

siendo V el volumen exterior a la hoja superior del cono $z^2 = x^2+y^2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z \geq 0$.