UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniería de Edificación 1^0A

Ejercicios de Matemática Aplicada

Diferenciación de funciones de varias variable y aplicaciones

1. Calcular las derivadas parciales de la función $f(x,y) = xy + x - y$ en el punto $(0,0)$.

2. Calcular las dos derivadas parciales de la función $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2$ en el punto $(1,0)$.

3. Hallar, aplicando la definición, las derivadas parciales de la función
$$f(x,y) = x^2y^3 + 5.$$

4. El precio de un piso P en función de la superficie S y de la calidad de los materiales C viene dado por una función $P(S,C)$. ¿Es razonable que $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$? ¿Es razonable que $\frac{\partial P}{\partial S} < 0$?

5. Estudiar la continuidad y calcular las dos derivadas parciales en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

6. Estudiar la continuidad y calcular las dos derivadas parciales en el punto $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

7. Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función
$$f(x,y) = x^2ye^{x^2+y^2}.$$

8. Hallar las derivadas parciales de tercer orden de la función:
$$f(x,y) = x^2 + 2xy^2 - y^3.$$

9. Hallar el vector gradiente de la función
$$f(x,y) = x^2y + xy^3$$
en el punto $(-1,2)$.

10. Hallar el vector gradiente de la función

$$f(x, y, z) = \frac{x+y}{z}$$

en un punto genérico.

11. Hallar el vector normal a la parábola de ecuación $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

12. Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el punto $(2, -1, 5)$.

13. Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$ en el punto $(1, -1, 4)$.

14. Hallar el diferencial de la función vectorial $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2, 5x^3 + 2y^6).$$

15. Si $f(x, y) = xe^y$ obtenga el gradiente de f y calcule la derivada direccional de f en $(2, 0)$ en la dirección $(\frac{1}{2}, 2)$. Nota: Use el vector unitario.

16. Si $f(x, y, z) = x\text{sen}(yz)$ obtenga el gradiente de f y calcule la derivada direccional de f en $(1, 3, 0)$ en la dirección $(1, 2, -1)$. Nota: Use el vector unitario.

17. De una función $z = f(x, y)$ diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ se sabe que el plano tangente a $f(x, y)$ en el punto $(1, 2)$ es : $2x + 3y + 4z = 1$. ¿ Se puede calcular con estos datos la derivada direccional de f en la dirección que une el punto $(1, 2)$ con el punto $(3, 4)$? Justificar la respuesta.

18. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y)$. Si hacemos el cambio a coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

calcular $\frac{\partial f}{\partial r}$ y $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

19. Dada la función $z = x^2y - y^2$, donde $x = \text{sen}t$, $y = e^t$. Hallar $\frac{dz}{dt}$, cuando $t = 0$,

    a) Por sustitución previa

    b) Mediante la Regla de la Cadena.

20. Encontrar los extremos relativos de la función:

$$f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1.$$

21. Econtrar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = xy^2$ en el conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq \frac{-5}{3}\right\}.$$

22. Econtrar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$ en el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y^2 - x \leq 9, \quad 3x - 4y + 12 \leq 0, \quad 3x + 4y + 12 \leq 0\}.$$

23. Econtrar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ en la región

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \leq 1, \quad y \geq x^2 - 1, \quad x^2 - y^2 \geq 1\}.$$

24. Calcular la distancia mínima y máxima del punto $(1,0)$ al conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x-2)^2 + y^2 \leq 4, \quad 2y \leq 6 - x, \quad x \leq 3\}.$$

25. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

   a) Calcular los extremos de f en $\mathbb{R}^2$.

   b) Calcular los extremos de f sobre el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 4y + x = 0\}.$$