UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniería de Edificación 1^0

Ejercicios de Matemática Aplicada

Diferenciación de funciones de una variable y aplicaciones.

1. Siendo $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, calcular $f'(1)$ utilizando la definición de derivada. Hallar la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abcisa $x=1$.

2. Estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=0$ de las siguientes funciones:

$$a)f(x)=\begin{cases} x+\operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \\ (x+1)^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \qquad b)f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x<0 \\ e^x-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

$$c)f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

3. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=|x+1|+|x-1|$.

4. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$a)y=2x^3+\frac{x^2}{2}+\sqrt{3}x+1 \quad b)y=\sqrt[3]{x^2+1} \quad c)y=3x^{\frac{3}{4}}-(\sqrt{x})^3$$

$$d)y=(2-x^2)\cos x-2\operatorname{sen} x \quad e)y=x\sqrt{x^2+1} \quad f)y=\frac{\operatorname{sen} x-x\cos x}{\cos x+x\operatorname{sen} x}$$

$$g)y=\arctan\sqrt{x-1}+\arccos\sqrt{\frac{x-1}{x}} \quad h)y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \quad i)y=\ln\sqrt{\frac{1+\tan x}{-1+\tan x}}$$

$$j)y=\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \quad k)y=x^{\operatorname{sen} x} \quad l)y=x^{x^x}$$

5. Estudiar la monotonía y hallar los extremos relativos de las siguientes funciones:

$$a)f(x)=x^3-9x^2+24x-16 \quad b)g(x)=x+5-2\operatorname{sen} x \quad c)h(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$$

$$d)i(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2} \quad e)j(x)=\ln(x^2-3x+2) \quad f)k(x)=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

6. Hallar los extremos absolutos de las funciones siguientes, en los intervalos que se indican:
$a)f(x)=x^5+x+1$, en $[0,2]$
$b)g(x)=\frac{x-2}{x^2+1}$, en $[-1,3]$
$c)h(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$, en $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

7. Comprobar que la ecuación $4x^3+3x^2+2x+1=0$ tiene una única solución real.

8. Idem para la ecuación $x^7+3x+3=0$.

9. Probar que $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones.

10. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x^3 - 12x + 1 = 0$?

11. Demuestra que la ecuación $e^x - 7x = 0$ tiene exactamente dos soluciones.

12. Calcular un punto del intervalo $[1, 3]$ en el que la tangente a la curva $y = x^3 - x^2 + 2$ sea paralela a la recta determinada por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 20)$. ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

13. Calcular los siguientes límites aplicando la regla de l'Hôpital:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} \quad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \quad c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \quad d)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan(5x)}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\operatorname{sen}(ax))}{\ln(\operatorname{sen} x)} \quad f)\ \lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^x \quad g)\ \lim_{x\to -\infty} x^2 e^x \quad h)\ \lim_{x\to 0} x\ln x \quad i)\ \lim_{x\to 0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

14. Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = e^{\frac{1}{1+x}}$ alrededor del punto $x = 0$.

15. Idem para $f(x) = e^{-x^2} \ln x$ alrededor del punto $x = 1$.

16. Dada la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, hallar su desarrollo de McLaurin de grado 4.

17. Dar una cota del error al calcular $e^{0,1}$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 2 de e^x en $x = 0$.

18. Dada la función $f(x) = \sqrt{x+1}$, hallar:

    a) El polinomio de Taylor de grado 4 en $x = 0$.

    b) Un valor aproximado para $\sqrt{1,02}$ usando un polinomio de segundo grado y dar una cota del error cometido.

19. Calcular el valor de sen(0,5) con un error inferior a una milésima.

20. Desarrollar el polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en potencias de $(x - 1)$.

21. Escribir el polinomio $p(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 7$ en potencias de $(x + 1)$ y de $(x - 1)$.

22. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = e^x(x - 2)$.

    a) Calcula las asíntotas de f.

    b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

    c) Determina, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.

23. Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$$

para $x \neq -1$, $x \neq 2$.

a) Estudia y calcula las asíntotas de de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal.

24. Realiza un estudio completo de la siguientes funciones y dibújalas: $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3}$, $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$, $f(x) = \frac{x^3-9x}{x^2-4}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$, $f(x) = xe^x$, $f(x) = x^2e^{-x}$, $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$,