



Ejercicios de Matemática Aplicada

Límites y continuidad de funciones

1. Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}{\ln(x^2 - 3)} \quad b) f(x) = \frac{\arccos(e^{x^2-1})}{\operatorname{sen}(x+1)} \quad c) f(x, y, z) = x \ln(yz)$$

$$d) f(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{xy}{x^2 + y^2 - 4} \right) \quad e) f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{x^2 - y^2}\right)$$

$$f) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \quad g) f(x, y, z) = \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2 - 4}, \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \right)$$

2. Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-3} - x \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 3x^2}{3x + x^2} \quad c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} \quad h) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + 2^{\tan x}}$$

3. Calcular los siguientes límites utilizando infinitésimos equivalentes:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 3x)} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad c) \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}[\tan(\operatorname{sen}(x-1))]}{\operatorname{sen}[\tan(x-1)]}$$

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones y donde presenten una discontinuidad indicad de que clase es:

$$a) f(x) = \begin{cases} \cos(x - \pi), & \text{si } -\pi \leq x \leq 0, \\ 3^{\frac{1}{x}}, & \text{si } 0 < x \leq 4, \\ \ln(x - 4), & \text{si } 4 < x \leq 10, \\ \frac{4}{x-10}, & \text{si } x > 10 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$$

5. La función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + n}{x^3 + mx^2 - 14x}$ presenta en $x = 2$ una discontinuidad evitable. Hallar m y n y clasificar las demás discontinuidades de f .

6. Hallar la relación existente entre a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{x}, & \text{si } x > 0, \\ ax + b, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

7. Calcular el valor de a , de ser posible, para que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ a, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en todo \mathbb{R} .

8. Hallar los valores de a y b , de ser posible, para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a, & \text{si } x < -3, \\ ax + b, & \text{si } -3 \leq x \leq 3, \\ b - 5x, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

9. Dada la ecuación $x^3 + 5x^2 - 10 = 0$, encontrar tres intervalos cerrados disjuntos de forma que en el interior de cada uno de ellos haya una raíz de la ecuación.

10. Demuestra que la ecuación $x \cdot \cos \frac{x}{2} + 15 \sin x = 0$ tiene alguna raíz real.

11. Sea $g(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 + 2$, probar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(c) = -1$.

12. Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$\begin{aligned} a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \quad b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \quad c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{5}}} \\ d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \quad e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & \quad f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \\ & \quad g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^4+y^5}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Nota: Usa en algún apartado el paso a coordenadas polares.

13. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^4+y^4+2x^2y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

14. Calcular k , si es posible, para que las siguientes funciones sean continuas:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(y+1) - y(x-y)}{x^2 - xy + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ k, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ k, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ k, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$