Tema 8

Ecuaciones diferenciales

1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Definición 1.1: Ecuación diferencial

Se llama ecuación diferencial de orden n a una ecuación que relaciona la variable independiente t, la función incógnita y ($y = f(t)$) y sus derivadas sucesivas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Esto es, una expresión de la forma $F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, donde F es una función real de $n+2$ variables, $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$.

En una ecuación diferencial $F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$:

- t es la variable independiente.
- y es la incógnita o variable dependiente ($y = y(t)$)
- n es el orden de la ecuación, es decir, el orden de una ecuación diferencial es el mayor orden de las derivadas de la incógnita que aparecen en la ecuación.

Definición 1.2: Solución de una ecuación diferencial

Dada una ecuación diferencial $F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, se llama solución de dicha ecuación a una función $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, n-veces derivable tal que $F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n)}) = 0 \; \forall\, t \in I$.

Ejemplo 1.3

Consideremos la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, las soluciones de esta ecuación son de la forma $y(t) = a \operatorname{sen} t + b \cos t$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Ahora vamos a comprobarlo:

$$y = a \operatorname{sen} t + b \cos t \Rightarrow y' = a \cos t - b \operatorname{sen} t \Rightarrow y'' = -a \operatorname{sen} t - b \cos t \Rightarrow y + y'' = 0$$

Como hemos visto en este ejemplo la solución general de la ecuación depende de dos constantes. Esto sucede siempre, la solución general depende de tantas constantes como grado tenga la ecuación, a menos que impongamos condiciones a la solución, a éstas se les denominan condiciones iniciales y suelen ser valores impuestos a la función solución y a sus derivadas en ciertos puntos.

Definición 1.4: Problema de Cauchy

Un problema de Cauchy es una ecuación diferencial con condiciones iniciales (tantas como grado tenga la ecuación), es decir una ecuación $F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ donde se le impone las condiciones
$y(t_0) = c_0,\ y'(t_1) = c_1,\ y''(t_2) = c_2, \ldots,\ y^{(n-1)}(t_{n-1}) = c_{n-1}$.

Ejemplo 1.5

Si consideramos ahora la ecuación $y'' + y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = 3$ e $y'(0) = -1$, su solución es $y(t) = 3 \cos t - \operatorname{sen} t$.

1.0.1. Clasificación de ecuaciones diferenciales.

(1) Según el tipo:
- Ecuación diferencial ordinaria: cuando la incógnita es una función de una variable.
- Ecuación en derivadas parciales: cuando la incógnita es una función de varias variables.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ecuación de Laplace}$$

(2) Según el orden: $y'y + y = \operatorname{sen} t$ ecuación de primer orden, $y^{(4)} - 2y' + y^2 = 0$ ecuación de cuarto orden.

(3) Según la linealidad:
- Ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b \quad \text{donde } a_i, b \in \mathbb{R}$$
$$y'' + 3y' + 2y = 5$$

- Ecuación diferencial lineal con coeficientes no constantes:

$$a_n(t) y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t) y' + a_0(t) y = b(t) \quad \text{donde } a_i, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$ty'' + (t^2 - 1)y' - y \operatorname{sen} t = t \cos t$$

- Ecuación diferencial no lineal.

$$yy'' + y' - y^2 = e^{2t}$$

2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Estas ecuaciones son de la forma $F(x, y, y') = 0$, donde x es la variable independiente e y la función incógnita ($y = y(x)$). La forma normal o usual en la que nos podemos encontrar una de estas ecuaciones es $y' = f(x, y)$.

Consideremos la ecuación $Q(x, y)y' + P(x, y) = 0$, teniendo en cuenta que $y' = \frac{dy}{dx}$ la ecuación la podemos escribir como $Q(x, y)\frac{dy}{dx} + P(x, y) = 0$ que es equivalente a $Q(x, y)dy + P(x, y)dx = 0$ que es otro formato en el que nos puede aparecer una ecuación diferencial.

2.0.1. Solución. La solución general de una ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$ se puede obtener de forma explícita $y = y(x, c)$ o de forma implícita $G(x, y, c) = 0$ donde c es una constante. Para cada valor de la constante c obtendremos una solución particular de la ecuación, estos valores se podrán determinar mediante condiciones iniciales (problema de Cauchy).

Un problema de Cauchy sería de la forma: $\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

La ecuación $y' = y$ tiene como solución general a $y(x) = ce^x$, si le imponemos la condición inicial $y(0) = 3$, entonces la solución sería $y(x) = 3e^x$.

3. Estudio y clasificación de las ecuaciones diferenciales de primer orden

3.1. Ecuaciones de variables separadas. Podemos encontrarlas expresadas de dos formas diferentes:
- $g(y)y' + f(x) = 0$ cuya solución se obtiene integrando la ecuación y resulta:

$$\int g(y)y'\,dx + \int f(x)\,dx = c \;\Rightarrow\; \int g(y)\,dy + \int f(x)\,dx = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Hay que tener en cuenta que $dy = y'dx$.

- $f(x)dx + g(y)dy = 0$ cuya solución se obtiene de igual forma:

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.1

Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones generales:

(1) $y' = x$.

Integrando la ecuación: $\int y'\,dx = \int x\,dx \Rightarrow\; y = \frac{x^2}{2} + c$.

(2) $yy' - x^2 = 0$.

$yy' = x^2 \;\Rightarrow\; \int yy'\,dx = \int x^2\,dx \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{\frac{2x^3}{3} + c}$.

(3) $xdx + 2y^2dy = 0$.

$\int x\,dx + \int 2y^2\,dy = c \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{2} + \frac{2y^3}{3} \;\Rightarrow\; y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{4} + c}$.

3.2. Ecuaciones de variables separables.

Podemos encontrarlas expresadas de dos formas diferentes:

- $f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y)y' = 0$, para obtener la solución tenemos que agrupar en un lado lo que dependa de y y en otro lo que dependa de x y luego integrar:

$f_2(x)g_2(x)y' = -f_1(x)g_1(y) \;\Rightarrow\; \dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}y' = -\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, integrando queda

$$\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}y'\,dx = -\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + c$$

- $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$, para obtener la solución se opera de forma similar a la anterior:

Dividimos los miembros de la ecuación por $f_2(x)g_1(y)$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = c$$

Ejemplo 3.2

Encontrar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(1) $y'\cos x + y \operatorname{sen} x = 0$.

$y'\cos x = -y\operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; \dfrac{y'}{y} = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \;\Rightarrow\; \int \dfrac{y'}{y}dx = \int \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}dx + c \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln y = \ln(\cos x) + c \;\Rightarrow\; y = e^{\ln(\cos x)+c} = \cos x \cdot e^c$, por tanto la solución general es

$$y(x) = k\cos x$$

(2) $xy^2dx + yx^2dy = 0$.

Dividiendo la ecuación por y^2x^2 queda $\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{y}\,dy = c$ por tanto $\ln x + \ln y = c \;\Rightarrow\; \ln(xy) = c \;\Rightarrow\; xy = e^c$, luego la solución general es de la forma

$$y(x) = \frac{k}{x}$$

3.3. Ecuaciones lineales de primer orden. Son de la forma $y' = f(x)y + g(x)$, el caso simple $y' = f(x)y$ recibe el nombre de ecuación lineal homogénea y el general ecuación lineal no homogénea.

3.4. Solución de la ecuación lineal homogénea $y' = f(x)y$**.** $y' = f(x)y \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = f(x) \Rightarrow \int \dfrac{y'}{y}\,dx = \int f(x)\,dx + k \Rightarrow \ln y = \int f(x)\,dx + k$, por lo que la solución general es:

$$y(x) = c \cdot e^{\int f(x)\,dx}$$

3.5. Solución de la ecuación lineal no homogénea $y' = f(x)y + g(x)$**.**

$$y(x) = e^{\int f(x)\,dx} \cdot \left[c + \int g(x) \cdot e^{-(\int f(x)\,dx)}\,dx\right]$$

Ejemplo 3.3

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(1) $y' = xy$.

$y' = xy \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = x \Rightarrow \int \dfrac{y'}{y}\,dx = \int x\,dx + k \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + k \Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2}+k}$, la solución general queda:

$$y(x) = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

(2) $y' = 2y + x$

La solución general es $y(x) = e^{\int f(x)\,dx} \cdot \left[c + \int g(x) \cdot e^{-(\int f(x)\,dx)}\,dx\right]$, en este caso $f(x) = 2$ y $g(x) = x$.

$\int f(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x$.

$$\int g(x) \cdot e^{-(\int f(x)\,dx)}\,dx = \int x e^{-2x}\,dx = \left\| \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = e^{-2x} dx \\ v = \frac{-1}{2} e^{-2x} \end{array} \right\| = -\frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x}\,dx =$$

$$= -\frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) e^{-2x} = -\frac{e^{-2x}}{4}(2x+1).$$

$$y(x) = e^{2x}\left[k - \frac{e^{-2x}}{4}(2x+1)\right] = ke^{2x} - \frac{2x+1}{4}$$

Observación: Dada la ecuación lineal no homogénea $y' = f(x)y + g(x)$, si conocemos una solución particular de ésta, $y = \varphi(x)$, entonces la solución general es de la forma $y = \varphi(x) + c \cdot e^{\int f(x)\,dx}$.

4. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo grado con coeficientes constantes

Se trata de ecuaciones cuyo formato es

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Para conocer como se resuelven este tipo de ecuaciones vamos a empezar por la homogénea.

4.1. Ecuación diferencial homogénea. Estas son de la forma $ay'' + by' + cy = 0$.

Para resolverlas primero tenemos que calcular las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y dependiendo de como sean estas, la solución es:

- Si las dos raíces λ_1, λ_2 son reales y distintas

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Si la raíz λ es doble

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_2 t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Si las raíces son complejas $\lambda = a \pm bi$

$$y(t) = e^{at}(c_1 \cos(bt) + c_2 \operatorname{sen}(bt)) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ejemplos 4.1

Resolver ecuación $y'' + y' - 2y = 0$ con condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$. Es una ecuación homogénea luego empezamos resolviendo la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$ cuyas raíces son 1 y -2, luego la solución es $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$. Como nos dan condiciones iniciales tenemos que calcular el valor de las constantes c_1 y c_2. $y(0) = 0 \to$ sustituyendo en la solución $y(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$. $y'(0) = 3$, derivando la solución $y'(t) = c_1 e^t - 2c_2 e^{-2y} \to y'(0) = c_1 - 2c_2 \to$ $\to c_1 - 2c_2 = 3$. La solución del sistema $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 2c_2 = 3 \end{cases}$ es $c_1 = 1$ y $c_2 = -1$. solución: $y(t) = e^t - e^{-2t}$.

Resolver ecuación $y'' - 4y' + 4y = 0$. La ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$ tiene a 2 como raíz doble, luego la solución es $y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{2t}$.

Resolver ecuación $y'' - 2y' + 2y = 0$ con condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$. $x^2 - 2x + 2 = 0$ tiene dos raíces complejas $1 \pm i$, luego la solución general es $y(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$. $y(0) = 1 \to$ sustituyendo en la solución general $y(0) = c_1 \to c_1 = 1$ $y'(0) = 2 \to y'(t) = ((c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\operatorname{sen} t) \to y'(0) = c_1 + c_2$ $\to c_1 + c_2 = 2 \to c_2 = 1$. Solución particular: $y(t) = e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)$.

4.2. Ecuación diferencial no homogénea. Estas son de la forma $ay'' + by' + cy = f(t)$.

Para hallar su solución primero tenemos que encontrar la solución general de la ecuación homogénea $ay'' + by' + cy = 0$, la cual la denotamos como $y_h(t)$.

Si conocemos una solución particular de la no homogénea, $y_p(t)$ entonces la solución general de la no homogénea es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

La forma de conocer o encontrar una solución particular de la no homogénea es probar con funciones de la misma naturaleza que $f(t)$ (polinómica, exponencial, trigonométrica,...).

Ejemplo 4.2

(1) **Resolver ecuación $y'' - 2y' + y = t^2$.**

Primero vamos a resolver la ecuación homogénea $y'' - 2y' + y = 0$.

La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene a 1 como raíz doble, luego la solución de la homogénea es $y_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$.

Ahora tenemos que encontrar una solución particular de la no homogénea. En nuestro caso $f(t) = t^2$ que es un polinomio de segundo grado, por lo que la particular también ha de serlo, luego nuestra particular ha de ser de la forma $y_p(t) = at^2 + bt + c$. El valor de a, b y c lo calculamos sabiendo que tiene que cumplir la ecuación $y_p'' - 2y_p' + y_p = t_2$.

$y_p'(t) = 2at + b \qquad y_p''(t) = 2a$

$y_p'' - 2y_p' + y_p = t_2 \to 2a - 2(2at + b) + at^2 + bt + c = t^2 \to$
$\to at^2 + (b - 4a)t + 2a - 2b + c = t^2$, por lo que tenemos que resolver el sistema

$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases}$, cuya solución es $a = 1$, $b = 4$ y $c = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_p(t) = t^2 + 4t + 6$.

solución: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + t^2 + 4t + 6$.

(2) **Resolver ecuación $y'' - 3y' + 2y = \cos t$.**

Primero vamos a resolver la ecuación homogénea $y'' - 3y' + 2y = \cos x$.

La ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ tiene a 1 y 2 como raíces, luego la solución de la homogénea es $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$.

Ahora tenemos que encontrar una solución particular de la no homogénea. En nuestro caso $f(t) = \cos t$ que es una función trigonométrica, por lo que la particular también ha de serlo, luego nuestra particular ha de ser de la forma $y_p(t) = a\cos t + b\operatorname{sen} t$. El valor de a y b lo calculamos sabiendo que tiene que cumplir la ecuación $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = \cos t$.

$y_p'(t) = -a\operatorname{sen} t + b\cos t \qquad y_p''(t) = -a\cos t - b\operatorname{sen} t$

$\Rightarrow -a\cos t - b\operatorname{sen} t - 3(-a\operatorname{sen} t + b\cos t) + 2(a\cos t + b\ sent) = \cos t \to$
$\to (a - 3b)\cos t + (b + 3a)\operatorname{sen} t = \cos t$, por lo que tenemos que resolver el sistema

$\begin{cases} a - 3b = 1 \\ b + 3a = 0 \end{cases}$, cuya solución es $a = \frac{1}{10}$ y $b = \frac{-3}{10} \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{10}(\cos t - 3\operatorname{sen} t)$.

solución: $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{10}(\cos t - 3\operatorname{sen} t)$.

(3) **Resolver ecuación $y'' + 4y' - 5y = e^{5t}$.**

1 y -5 son las raíces de la ecuación $x^2 + 4x - 5 = 0$, luego la solución de la homogénea es $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-5t}$.

$f(t) = e^{-5t}$ luego la solución particular sería de la forma ae^{-5t}, pero al ser e^{-5t} solución de la homogénea debemos buscar una solución particular de la forma $y_p(t) = ate^{-5t}$.

$y_p'(t) = ae^{-5t}(1 - 5t) \qquad y_p''(t) = ae^{-5t}(-10 + 25t)$.

$y_p'' + 4y_p' - 5y_p = e^{-5t} \to ae^{-5t}(-10 + 25t) + 4ae^{-5t}(1 - 5t) - 5ate^{-5t} = e^{-5t} \to$
$\to -6ae^{-5t} = e^{-5t} \to a = \frac{-1}{6} \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = \frac{-t}{6}e^{-5t}$.

solución: $y(t) = c_1 e^t + (c_2 - \frac{t}{6})e^{-5t}$.

5. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes, es un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes, donde aparecen relacionadas n funciones incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, dependiendo de la variable independiente t, con sus respectivas derivadas $x_1', \ldots, x_n'$.

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases}$$

La solución es cualquier conjunto de n funciones $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ que satisfagan el sistema de ecuaciones diferenciales para cualquier valor de t. Para tener solución única necesitamos n condiciones iniciales $x_1(t) = \alpha_1, x_2(t) = \alpha_2, \ldots, x_n(t) = \alpha_n$ (problema de Cauchy).

En el caso en el que cada $b_i(t) \equiv 0$ diremos que es un *sistema homogéneo*.

5.1. Método de resolución matricial de sistemas homogéneos. Un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo puede ser expresado como $X' = A \cdot X$ donde $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ y $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Proposición 5.1

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo
$X' = A \cdot X$, si la matriz A es diagonalizable entonces la solución general del sistema es:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \cdot v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \cdot v_n$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A (contando multiplicidades) y $v_1, \ldots, v_n$ es una base, de $\mathbb{R}^n$, de vectores propios y cada v_i es asociado a λ_i.

Ejemplos 5.2

Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$. La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y sus valores propios son 4, con vector propio $(3, 2)$ y -1, con vector propio $(1, -1)$. Luego la solución es $(x(t), y(t)) = c_1 e^{-t}(1, -1) + c_2 e^{4t}(3, 2) = (c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t}, -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t})$.

$$\text{solución: } \begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t} \\ y(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t} \end{cases}$$

Resolver el sistema $\begin{cases} x' = x - 2y + 2z \\ y' = -2x + y - 2z \\ z' = 2x - 2y + z \end{cases}$. La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y sus valores propios son -1 doble, con vectores propios $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$, y 5, con vector propio $(1, -1, 1)$. Luego la solución es
$(x(t), y(t), z(t)) = c_1 e^{-t}(1, 1, 0) + c_2 e^{-t}(0, 1, 1) + c_3 e^{5t}(1, -1, 1)$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_3 e^{5t} \\ y(t) = (c_1 + c_2)e^{-t} - c_3 e^{5t} \\ z(t) = c_2 e^{-t} + c_3 e^{5t} \end{cases}$$

5.2. Estudio de sistemas homogéneos de dos ecuaciones con dos incógnitas. Dado el sistema $X' = AX$ donde $A \in M_2(\mathbb{R})$, vamos a estudiar su solución en función de los valores propios de A. Si A es diagonalizable, ha sido estudiado anteriormente, por tanto, en lo siguiente, consideraremos que A no es diagonalizable.

5.2.1. λ es el único valor propio de A, con multiplicidad 2. La solución del sistema es
$X(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) \cdot v_1 + e^{\lambda t} c_2 \cdot v_2$, donde v_1 es un vector propio de A y v_2 cumple $(A - \lambda \cdot I_2) \cdot v_2 = v_1$.

5.2.2. Los valores propios de A son complejos conjugados. La solución del sistema es
$X(t) = c_1 \cdot (e^{\lambda t} \cdot v) + c_2 \cdot (e^{\lambda t} \cdot v)$ donde v es un vector propio complejo, $v \in \mathbb{C}^2$, de A asociado a λ.

Ejemplos 5.3

Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 3x - 18y \\ y' = 2x - 9y \end{cases}$. La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$ y su único valor propio es -3 (con multiplicidad 2). No es diagonalizable ya que $\dim(\ker(A + 3I_2)) = 1$. El vector propio asociado a -3 es $v_1 = (3, 1)$, ahora tenemos que buscar un vector v_2 tal que $(A + 3I_2) \cdot v_2 = v_1$, es decir tenemos que encontrar una solución de la ecuación $\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde una de ellas es $v_2 = (\frac{1}{2}, 0)$. Luego la solución es $(x(t), y(t)) = e^{-3t}(c_1 + c_2 t) \cdot (3, 1) + e^{-3t} c_2 \cdot (\frac{1}{2}, 0)$;

$$\begin{cases} x(t) = (3c_1 + \frac{1}{2}c_2)e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} \\ y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-3t} \end{cases}$$

Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$. La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y sus valores propios son $5 + 2i$ y $5 - 2i$. Cojamos el valor propio $\lambda = 5 + 2i$ y calculemos un vector propio asociado, el cual será un vector del núcleo de $A - (5 + 2i)I_2$, por tanto es una solución de la ecuación $\begin{pmatrix} 1 - 2i & -1 \\ 5 & -1 - 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{cases} (1 - 2i)x - y = 0 \\ 5x - (1 + 2i)y = 0 \end{cases}$ y una de ellas es $v = (1, 1 - 2i)$ $e^{\lambda t} \cdot v = e^{(5+2i)t} \cdot (1, 1 - 2i) =$
$e^{5t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)(1, 1 - 2i) =$
$= e^{5t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t, \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t - i2 \cos 2t + i \operatorname{sen} 2t) =$
$= e^{5t}(\cos 2t, \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t) + ie^{5t}(\operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} 2t - 2 \cos 2t)$ Por tanto la solución es $(x(t), y(t)) = c_1 \cdot (e^{\lambda t} \cdot v) + c_2 \cdot (e^{\lambda t} \cdot v) =$
$= c_1 e^{5t}(\cos 2t, \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t) + c_2 e^{5t}(\operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} 2t - 2 \cos 2t)$

$$\begin{cases} x(t) = e^{5t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t) \\ y(t) = e^{5t}((c_1 - 2c_2) \cos 2t + (2c_1 + c_2) \operatorname{sen} 2t) \end{cases}$$

5.3. Resolución de sistemas no homogéneos. Dado el sistema de ecuaciones no homogéneo $X' = A \cdot X + B(t)$, donde $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$.

Para hallar su solución primero tenemos que encontrar la solución general del sistema homogéneo $X' = A \cdot X$, la cual la denotamos como $X_h(t)$.

Si conocemos una solución particular de la no homogénea, $X_p(t)$ entonces la solución general de la no homogénea es:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

La forma de conocer o encontrar una solución particular de la no homogénea es probar con funciones de la misma naturaleza que $B(t)$ (polinómica, exponencial, trigonométrica,. . .).

Ejemplo 5.4

Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 6x + y + 6t \\ y' = 4x + 3y - 10t + 4 \end{cases}$.

Primero vamos a resolver el sistema homogéneo $\begin{cases} x' = 6x + y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$, cuya matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y sus valores propios son 2, con vector propio $(1, -4)$ y 7, con vector propio $(1, 1)$. Luego la solución es
$X_h(t) = (x_h(t), y_h(t)) = c_1e^{2t}(1, -4) + c_2e^{7t}(1, 1)$.
$B(t) = (6t, -10t+4)$ que tiene polinomios de primer grado como coordenadas, luego la solución particular del sistema no homogéneo ha de ser igual, es decir, de la forma $X_p(t) = (a+bt, c+dt)$.
Ahora tenemos que calcular el valor de las constantes a, b, c y d, que serán aquellos para los cuales X_p sea solución del sistema no homogéneo.
$x = a + bt \to x' = b$, $y = c + dt \to y' = d$. Ahora, sustituyendo estos valores en el sistema $\begin{cases} x' = 6x + y + 6t \\ y' = 4x + 3y - 10t + 4 \end{cases}$, nos queda $\begin{cases} b = 6(a + bt) + c + dt + 6t \\ d = 4(a + bt) + 3(c + dt) - 10t + 4 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} (6b + d + 6)t + (6a + c - b) = 0 \\ (4b + 3d - 10)t + (4a + 3c - d + 4) = 0 \end{cases}$, de donde se obtiene el sistema de ecuaciones
$\begin{cases} 6b + d + 6 = 0 \\ 6a + c - b = 0 \\ 4b + 3d - 10 = 0 \\ 4a + 3c - d + 4 = 0 \end{cases}$, cuya solución es $a = \frac{-4}{7}$, $b = -2$, $c = \frac{10}{7}$ y $d = 6$.

Entonces $X_p(t) = (\frac{-4}{7} - 2t, \frac{10}{7} + 6t)$, por tanto la solución general del sistema es $X(t) = X_h(t) + X_p(t) = c_1e^{2t}(1, -4) + c_2e^{7t}(1, 1) + (\frac{-4}{7} - 2t, \frac{10}{7} + 6t)$

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{7t} - \frac{4}{7} - 2t \\ y(t) = -4c_1e^{2t} + c_2e^{7t} + \frac{10}{7} + 6t \end{cases}$$

Ejemplo 5.5

Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 3x - 5y - 5z + 3e^t \\ y' = -x + 3y + z - 2e^t \\ z' = x - 5y - 3z + 5e^t \end{cases}$.

Primero vamos a resolver el sistema homogéneo $\begin{cases} x' = 3x - 5y - 5z \\ y' = -x + 3y + z \\ z' = x - 5y - 3z \end{cases}$, cuya matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ y sus valores propios son 2, con vector propio $(0, 1, -1)$, -2, con vector propio $(1, 0, 1)$ y 3, con vector propio $(1, -1, 1)$. Luego la solución del sistema homogéneo es
$X_h(t) = c_1e^{2t}(0, 1, -1) + c_2e^{-2t}(1, 0, 1) + c_3e^{3t}(1, -1, 1)$.
$B(t) = (3e^t, -2e^t, 5e^t)$ por lo que la solución particular del sistema no homogéneo ha de ser de la forma $X_p(t) = (ae^t, be^t, ce^t)$ y los valores de a, b y c serán aquellos que hagan que X_p sea solución del sistema no homogéneo.
$x = ae^t \to x' = ae^t$, $y = be^t \to y' = be^t$, $z = ce^t \to z' = ce^t$. Ahora, sustituyendo estos valores en el sistema no homogéneo queda $\begin{cases} ae^t = (3a - 5b - 5c + 3)e^t \\ be^t = (-a + 3b + c - 2)e^t \\ ce^t = (a - 5b - 3c + 5)e^t \end{cases}$, de donde se obtiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2a - 5b - 5c = -3 \\ -a + 2b + c = 2 \\ a - 5b - 4c = -5 \end{cases}$, cuya solución es $a = 1$, $b = 2$ y $c = -1$.
Entonces $X_p(t) = (e^t, 2e^t, -e^t)$, por tanto la solución general del sistema es $X(t) = X_h(t) + X_p(t) = c_1e^{2t}(0, 1, -1) + c_2e^{-2t}(1, 0, 1) + c_3e^{3t}(1, -1, 1) +$
$+ (e^t, 2e^t, -e^t)$

$$\begin{cases} x(t) = c_2e^{-2t} + c_3e^{3t} + e^t \\ y(t) = c_1e^{2t} - c_3e^{3t} + 2e^t \\ z(t) = -c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t} - e^t \end{cases}$$