Tema 7

Integral definida

1. Integral de Riemann

Definición 1.1: Partición

Llamaremos partición de un intervalo $[a, b]$ a cualquier conjunto ordenado de puntos $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tal que
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Definición 1.2: Sumas de Riemann

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y
$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$:

(1) Se denomina suma superior de Riemann de f en P, $\mathcal{S}(f, P)$ a

$$\mathcal{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{donde} \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

(2) Se denomina suma inferior de Riemann de f en P, $s(f, P)$ a

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{donde} \quad m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Los M_i (m_i) son los “máximos"(“mínimos") valores que toma la función en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Cada sumando $M_i(x_i - x_{i-1})$ ($m_i(x_i - x_{i-1})$) representa el área, con signo, de un rectángulo de base la longitud del intervalo $[x_i, x_{i-1}]$ y de altura M_i (m_i), por lo cual las sumas de Riemann son la suma del área de n rectángulos.

Como $m_i \leq M_i$, se tiene que $\mathcal{S}(f, p) \leq s(f, P)$, es más, para dos particiones del intervalo $[a, b]$ cualesquiera se cumple que $s(f, P) \leq \mathcal{S}(f, Q)$.

Definición 1.3: Integral superior e inferior

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada:

(1) Llamaremos integral inferior de f en el intervalo $[a, b]$ a

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

(2) Llamaremos integral superior de f en el intervalo $[a, b]$ a

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{\mathcal{S}(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

Teniendo en cuenta la última conclusión de la observación podemos deducir que $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Definición 1.4: Función integrable

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a,b]$. Diremos que f es integrable, en el sentido de Riemann, en $[a,b]$ si coinciden el valor de las dos integrales (superior e inferior), $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso, al valor que toman las dos integrales se le denomina integral de f en $[a,b]$ y lo denotaremos como:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\ dx$$

1.1. Propiedades de las funciones integrables.

Proposición 1.5

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables en $[a,b]$, entonces:

(1) $\int_a^b (\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x))\ dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\ dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)\ dx$

(2) Si $a < b < c \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

(3) Si $f(x) = g(x)$ salvo en una cantidad finita de puntos, se tiene que $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx$

(4) Si $f(x) > 0\ (< 0)\ \forall\, x \in [a,b] \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\ dx > 0\ (< 0)$

(5) Si $f(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in [a,b] \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$

(6) $\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$

Teorema 1.6: Teorema fundamental del cálculo integral

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. si f es continua en el punto $x_0 \in [a,b]$, entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.

Definición 1.7: Primitiva

Sean $f, G : [a,b] \to \mathbb{R}$, diremos que G es una primitiva de f en $[a,b]$ si $G'(x) = f(x)\ \forall\, x \in [a,b]$.

Teorema 1.8: Regla de Barrow

Si f es una función integrable en $[a,b]$ y G una primitiva de ésta en dicho intervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)\ dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

1.2. Aplicaciones geométricas de la integral.

1.2.1. Cálculo de áreas limitadas por curvas.

(1) El área comprendida entre la gráfica de una función $y = f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[a,b]$:

$$A = \int_a^b |f(x)|\ dx$$

(2) El área comprendida entre las gráficas de dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el intervalo $[a,b]$:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

Ejemplo 1.9

Calcular el área de la región delimitada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$.
Lo primero que debemos de hacer es conocer cuales serán los límites de integración, los cuales resultan de resolver la ecuación $x^2 + 1 = x + 3$ cuya solución es $x = -1$ y $x = 2$. Ahora nos queda por saber que curva esta “por encima” y cual “por debajo". Vemos que $y = x + 3$ está por encima de $y = x^2 + 1$, por tanto nuestra área será:
$A = \int_{-1}^{2}(x + 3 - (x^2 + 1)) \, dx = \int_{-1}^{3}(-x^2 + x + 2) \, dx = [\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x]_{-1}^{2} = \frac{-8}{3} + 2 + 4 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2) = \frac{9}{2}$

1.2.2. *Cálculo de volúmenes de revolución.*

- Volumen del solido generado por la rotación alrededor del eje OX, de la región comprendida entre la gráfica de una función $y = f(x)$, en el intervalo $[a,b]$ y el eje OX:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

- Si es la región comprendida entre dos gráficas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en $[a,b]$ (ambas positivas o negativas en dicho intervalo):

$$V = \pi \int_a^b |f(x)^2 - g(x)^2| \, dx$$

- Volumen del solido generado por la rotación alrededor del eje OY, de la región comprendida entre la gráfica de una función $y = f(x)$, en el intervalo $[a,b]$, con $a > 0$ ó $b < 0$, y el eje OX:

$$V = 2\pi \left| \int_a^b x f(x) \, dx \right|$$

- Si es la región comprendida entre dos gráficas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en $[a,b]$ con $a > 0$ ó $b < 0$:

$$V = 2\pi \left| \int_a^b x|f(x) - g(x)| \, dx \right|$$

1.2.3. *Cálculo de longitudes de curvas.*

Longitud de la curva $y = f(x)$ entre los puntos $x = a$ y $x = b$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

Ejemplo 1.10

Calcular la longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ por lo que la función que nos determina la circunferencia es $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, en realidad una semicircunferencia, con x variando entre -1 y 1, por tanto nuestra longitud será:
$L = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \, dx = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = 2[\operatorname{arc\,sen} x]_{-1}^{1} =$
$= 2\pi$.

1.2.4. Cálculo de áreas de superficies de revolución.

- Área de la superficie generada al hacer girar alrededor del eje OX la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Ejemplo 1.11

Calcular el área de superficie de la porción del paraboloide generado al girar la parábola $y^2 = x$ alrededor del eje OX, entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$.
$y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$, por tanto nuestra superficie será la revolución, alrededor de OX, de la función $f(x) = \sqrt{x}$, por lo que su área será:
$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + (\frac{1}{2\sqrt{x}})^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx = \pi \int_0^1 (4x + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx =$
$= \pi[\frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{4\cdot\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$

- Área de la superficie generada al hacer girar alrededor del eje OY la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$:

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Ejemplo 1.12

Calcular el área de la superficie del ejemplo 1.2.4, considerándola como la rotación de $y = x^2$ alrededor del eje OY, entre $x = 0$ e $x = 1$.
$A = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_0^1 8x(1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx =$
$= \frac{\pi}{4}[\frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$

2. INTEGRAL DOBLE

2.1. Integral doble sobre rectángulos. Sea $I = [a,b] \times [c,d]$, un rectángulo de $\mathbb{R}^2$, y $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se define la integral de f en I como:

$$\int\int_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

Esto nos indica que primero integramos la función respecto de y, considerando a x constante, y después el resultado obtenido lo integramos respecto de x. También puede realizarse de forma contraria, primero respecto de x y luego respecto de y, es decir, el orden de integración no influye en el resultado.

Ejemplo 2.1

Sea $f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y$, Calcular la integral de f en el rectángulo $I = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,\pi]$. Comprobar que el orden de integración no altera el resultado.

$\int\int_I \cos x \operatorname{sen} y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \cos x \operatorname{sen} y\,dy\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos x(-\cos y)]_0^{\pi} dx =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot 1 - \cos x \cdot (-1))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx = [2\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - 0 = 2.$

Ahora vamos a calcular la integral al revés.
$\int\int_I \cos x \operatorname{sen} y\,dx\,dy = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{sen} y\,dx\right) dy = \int_0^{\pi} [\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y]_0^{\frac{\pi}{2}} dy =$
$= \int_0^{\pi} (1 \cdot \operatorname{sen} y - 0 \cdot \operatorname{sen} y)dy = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} y\,dy = [-\cos y]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$

2.2. Integral doble sobre recintos acotados. Ahora vamos a ver como podemos calcular una integral doble, no sobre un rectángulo, si no sobre un recinto acotado más general $D \in \mathbb{R}^2$.

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función acotada, donde D es un recinto acotado de $\mathbb{R}^2$ con interior no vacío, donde D viene definido como:

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \phi(x)\}$
o
(2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$

con $\varphi(x)$ y $\phi(x)$, $\alpha(y)$ y $\beta(y)$, funciones continuas. Entonces la integral doble de f en D es:

(1) $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$
o
(2) $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$

En este caso tenemos que integrar primero respecto la variable cuyo intervalo de integración depende de la otra. Así, en ((1)) integramos primero respecto a y ya que $\varphi(x) \le y \le \phi(x)$, y en ((2)) respecto a x ($\alpha(y) \le x \le \beta(y)$).

Ejemplo 2.2

Calcular $\int\int_D 2xy\, dx\, dy$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Para calcular esta integral lo primero que debemos de hacer es determinar el conjunto D como en ((1)) o en ((2)), aquí D es el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1. Para determinarlo fijamos la variable x, entonces para un valor fijo de x tenemos que ver los valores que toma y.

El valor de y oscila desde la parte inferior de la circunferencia hasta la parte superior de ésta, luego para un valor fijo de x tenemos que $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$. Fijaros también que x toma valores comprendidos entre -1 y 1, luego $-1 \leq x \leq 1$, así D queda definido como:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$$

Ahora ya estamos en disposición de calcular la integral.

$\int\int_D 2xy\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2xy\, dy\right) dx = \int_{-1}^{1} [xy^2]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx =$

$= \int_{-1}^{1} (x(\sqrt{1-x^2}\,)^2 - x(-\sqrt{1-x^2}\,)^2) dx = \int_{-1}^{1} (x(1-x^2) - x(1-x^2)) dx = \int_{-1}^{1} 0 dx = 0$

2.3. Propiedades de la integral doble. Dadas dos funciones $f, g : D \to \mathbb{R}$ definidas sobre un recinto acotado $D \subset \mathbb{R}^2$, se verifican:

(1) $\int\int_D (\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)) dx\, dy = \alpha \cdot \int\int_D f(x, y)\, dx\, dy + \beta \cdot \int\int_D g(x, y)\, dx\, dy$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(2) Si $f(x, y) \geq 0\ \forall\, (x, y) \in D \Rightarrow \int\int_D f(x, y)\, dx\, dy \geq 0$.

(3) Si $f(x, y) \geq g(x, y)\ \forall\, (x, y) \in D \Rightarrow \int\int_D f(x, y)\, dx\, dy \geq \int\int_D g(x, y)\, dx\, dy$.

(4) Si D se puede descomponer en la unión disjunta de dos recintos D_1 y D_2, entonces:
$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \int\int_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy$

(5) $\left|\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy\right| \leq \int\int_D |f(x, y)|\, dx\, dy$

Ejemplo 2.3

Calcular $\int\int_D (x+y)\ dx\ dy$ donde D es la región acotada por la parábola $y = x^2$ y las rectas $y+x=6$, $2x-y=-3$ y $x=0$.
Primero vamos a dibujar la parábola y las rectas para determinar gráficamente a D.
La región D se divide en dos partes, D_1 y D_2 y estas vienen definidas por:
$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x+3\}$, $\quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 6-x\}$
$\int\int_D (x+y)\ dx\ dy = \int\int_{D_1} (x+y)\ dx\ dy + \int\int_{D_2} (x+y)\ dx\ dy =$
$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2x+3} (x+y)dy\right) dx + \int_1^2 \left(\int_{x^2}^{6-x} (x+y)dy\right) dx =$
$= \int_0^1 [xy + \frac{y^2}{2}]_{x^2}^{2x+3} dx + \int_1^2 [xy + \frac{y^2}{2}]_{x^2}^{6-x} dx = \int_0^1 \left(x(2x+3) + \frac{(2x+3)^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx +$
$+ \int_1^2 \left(x(6-x) + \frac{(6-x)^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \int_0^1 (\frac{-x^4}{2} - x^3 + 4x^2 + 9x + \frac{9}{2})dx +$
$+ \int_1^2 (\frac{-x^4}{2} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 18)dx = [\frac{-x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x]_0^1 + [\frac{-x^5}{10} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + 18x]_1^2 =$
$= (\frac{-1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}) + (\frac{-16}{5} - 4 - \frac{4}{3} + 36 + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - 18) = \frac{599}{30}$

2.4. Cambio de variable en una integral doble. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)$, una función acotada y $T : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to D$ una función biyectiva de clase C^1 tal que $\det(JT(u,v)) \neq 0\ \forall\ (u,v) \in \Omega$, entonces:

$$\int\int_D f(x,y)\ dx\ dy = \int\int_\Omega f(T(u,v)) \cdot |\det(JT(u,v))|\ du\ dv$$

2.4.1. Aplicación: Si tenemos $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)$, y efectuamos un cambio de variable $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, entonces podemos expresar f en función de u y v ($f(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$) y el recinto D se transforma en el recinto Ω.

$$\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (x(u,v), y(u,v)) \in D\}$$

Entonces podemos calcular la integral doble en esta nuevas variables, pudiendo reducirse así el cálculo de la integral.

La relación existente entre ambas integrales es la siguiente:

$$\int\int_D f(x,y)\ dx\ dy = \int\int_\Omega f(u,v) \cdot |\det(JT(u,v))|\ du\ dv$$

donde $J(u,v)$ es la matriz jacobiana del cambio de variable

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si consideramos el cambio a polares $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$$J(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J(r,\theta)) = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r$$

por lo que la integral, en polares, queda:

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_\Omega f(r,\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

El cambio a coordenadas polares es útil para recintos circulares o para aquellos que nos lo definan de forma polar.

Ejemplo 2.4

Calcular $\int\int_D e^{\frac{x^2+y^2}{2}} dx\,dy$, donde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4, y \ge 0\}$.
En este caso es conveniente hacer un cambio a polares por dos razones; la primera porque en coordenadas (x,y) tendríamos que calcular una primitiva del estilo $\int e^{\frac{x^2}{2}} dx$, de la cual no se conoce forma explícita, y la segunda es debido a que el recinto se nos transforma en otro más simple. En definitiva cuando nuestro recinto de integración sea un círculo o una porción circular, en la mayoría de los casos es aconsejable hacer un cambio a polares.
Nuestro recinto es el hemisferio norte del círculo de centro $(0,0)$ y radio 2.
En nuestro caso, calcular el recinto Ω en coordenadas polares es sencillo, todos los puntos del semicírculo tienen módulo menor o igual que dos, luego
$0 \le r \le 2$, y el ángulo que recorren estos puntos oscila entre 0 y π, por lo que $0 \le \theta \le \pi$. Así $\Omega = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi\}$, ahora, teniendo en cuenta que $r^2 = x^2+y^2$ y $J(r,\theta) = r$
$\int\int_D e^{\frac{x^2+y^2}{2}} dx\,dy = \int\int_\Omega e^{\frac{r^2}{2}}\cdot 2\,dr\,d\theta = \int_0^\pi \left(\int_0^2 re^{\frac{r^2}{2}}\,dr\right) d\theta = \int_0^\pi [e^{\frac{r^2}{2}}]_0^2\,d\theta =$
$= \int_0^\pi (e^2-1)\,d\theta = [(e^2-1)\theta]_0^\pi = (e^2-1)\pi$

2.5. Aplicaciones geométricas de la integral doble.

2.5.1. Cálculo de áreas. Recordar que si f es una función de una variable, el área de la región limitada por el eje OX y la gráfica $y = f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ coincide con $\int_a^b |f(x)|dx$. Pues esto último se generaliza a integrales dobles, esto es, si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un recinto acotado con interior no vacío entonces su área es:

$$A(D) = \int\int_D dx\,dy$$

es decir, el área de D coincide con la integral sobre él de la función constante 1.

Ejemplo 2.5

Calcular el área de la región plana acotada por la cúbica $y = x^3$ y las rectas $y = 2x + 4$ y $x = 0$.
La región queda definida como

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x^3 \leq y \leq 2x + 4\}$

$A(D) = \int\int_D dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_{x^3}^{2x+4} dy\right) dx = \int_0^2 [y]_{x^3}^{2x+4} dx = \int_0^2 (2x + 4 - x^3) dx =$
$= [x^2 + 4x - \frac{x^4}{4}]_0^2 = 4 + 8 - 4 = 8$

2.5.2. Masa total, centro de gravedad (masas) y momentos de inercia de objetos planos. Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada (una lámina) cuya densidad por unidad de área (densidad superficial) en el punto $(x, y) \in S$ viene dada por una función
$\rho : S \to [0, +\infty)$, que suponemos integrable en S.

- Se define la **masa total** de S, $m(S)$ como:

$$m(S) = \int\int_S \rho(x, y)\, dx\, dy$$

- El cociente entre su masa total y el área se denomina **densidad media**

$$\bar{\rho}(S) = \frac{m(S)}{A(S)} = \frac{\int\int_S \rho(x, y)\, dx\, dy}{\int\int_S dx\, dy}$$

- Las coordenadas del **centro de gravedad** $(\bar{x}, \bar{y})$ de S son:

$$\bar{x} = \frac{1}{m(S)} \int\int_S x \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy = \frac{\int\int_S x \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy}{\int\int_S \rho(x, y)\, dx\, dy}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m(S)} \int\int_S y \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy = \frac{\int\int_S y \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy}{\int\int_S \rho(x, y)\, dx\, dy}$$

- Si $L \subset \mathbb{R}^2$ es una recta y $d(x, y)$ la distancia de un punto $(x, y) \in S$ a la recta L, se denmina **momento de inercia** de S respecto a L, al número:

$$I_L = \int\int_S (d(x, y))^2 \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy$$

- Los **momentos de inercia** respecto a los **ejes coordenados** son:

$$\text{respecto al eje } OX \ \to I_x = \int\int_S y^2 \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy$$

$$\text{respecto al eje } OY \ \to I_y = \int\int_S x^2 \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy$$

- El **momento polar de inercia** es:

$$I_0 = I_x + I_y = \int\int_S (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y)\, dx\, dy$$

Ejemplo 2.6

Determinar el centro de gravedad de una lámina delgada rectangular $S = [0, a] \times [0, b]$, si la densidad en todos suspuntos es el producto de sus distancias a los ejes de coordenadas.
En este caso $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq x \leq b\}$ y $\rho(x, y) = xy$, por tanto:
$m(S) = \int_0^a (\int_0^b xy\, dy)\, dx = \frac{a^2b^2}{4}$

$$\bar{x} = \frac{4}{a^2b^2} \int_0^a \left(\int_0^b x^2 y\, dy \right) dx = \frac{2a}{3} \qquad \bar{y} = \frac{4}{a^2b^2} \int_0^a \left(\int_0^b xy^2\, dy \right) dx = \frac{2b}{3}$$

El centro de gravedad es $C_G = \frac{2}{3}(a, b)$.

2.5.3. Cálculo de volúmenes. Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y acotadas tal que $f(x, y) \geq g(x, y)\, \forall\, (x, y) \in D$, entonces el volumen de la región espacial comprendida entre las gráficas $z = g(x, y)$ y $z = f(x, y)$ es:

$$V(f, g, D) = \int\int_D (f(x, y) - g(x, y))\, dx\, dy$$

Si $f(x, y) \geq 0$, el volumen de la región espacial comprendidad entre el plano OXY y la gráfica $z = f(x, y)$ es:

$$V(f, OXY, D) = \int\int_D f(x, y)\, dx\, dy$$

Ejemplo 2.7

Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide
$z = 1 - (x^2 + y^2)$ y el plano OXY.
El dominio donde tenemos que integrar serán aquellos puntos (x, y) para los cuales $z \geq 0$, es decir, $1 - (x^2 + y^2) \geq 0$, o lo que es lo mismo, $x^2 + y^2 \leq 1$, por lo que nuestro dominio es el círculo de centro el origen y radio 1;
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
$V = \int\int_D (1 - (x^2 + y^2))\, dx\, dy$, si hacemos un cambio a polares el dominio D se nos combierte en $D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, entonces nos queda:
$V = \int\int_D (1 - (x^2 + y^2))\, dx\, dy = \int\int_D (1 - r^2) r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 (r - r^3) dr) d\theta =$
$= \int_0^{2\pi} [\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_0^1\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{2}$.

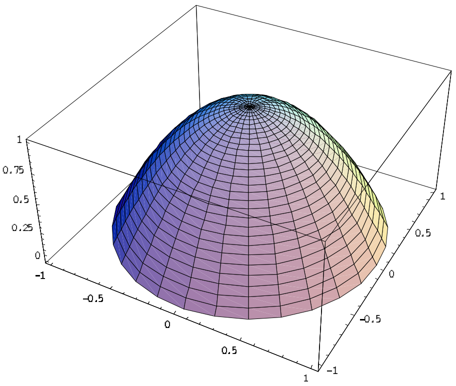

FIGURA 1. Región espacial limitada por $z = 1 - (x^2 + y^2)$ y el plano OXY

3. INTEGRAL TRIPLE

Sea $f : I \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función acotada en I, donde $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$
(I es un prisma de $\mathbb{R}^3$), la integral de f en I se define, de forma análoga a la integral doble, como:

$$\int\int\int_I f(x, y, z)\; dx\; dy\; dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z)\; dz\right) dy\right) dx$$

Al igual que ocurre en las dobles, el orden de integración no influye en el resultado, por tanto siempre podremos integrar en el orden que creamos más conveniente.

Ejemplo 3.1

Calcular $\int\int\int_I (x + y + z)\; dx\; dy\; dz$ donde $I = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$.

$\int\int\int_I (x + y + z)\; dx\; dy\; dz = \int_0^1 (\int_0^2 (\int_0^3 (x + y + z) dz) dy) dx =$

$= \int_0^1 (\int_0^2 [(x + y)z + \frac{z^2}{2}]_0^3 dy) dx = \int_0^1 (\int_0^2 (3x + 3y + \frac{9}{2}) dy) dx = \int_0^1 [3xy + \frac{3}{2}y^2 + \frac{9}{2}y]_0^2 dx =$

$= \int_0^1 (6x + 15) dx = [3x^2 + 15x]_0^1 = 18.$

3.1. Integral triple sobre recintos acotados. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función acotada, donde D es un recinto acotado de $\mathbb{R}^2$ con interior no vacío, siendo D definido como:

(1) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\; \varphi(x) \leq y \leq \phi(x),\; \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$
o
(2) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d,\; A(y) \leq x \leq B(y),\; C(x, y) \leq z \leq E(x, y)\}$
o
(3) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e \leq z \leq f,\; \Psi(z) \leq y \leq \Phi(z),\; \Gamma(y, z) \leq z \leq \Lambda(y, z)\}$

Es decir que D viene dado de la siguiente forma:

- Una variable varía entre dos valores reales, una segunda varía en función de la anterior y una tercera varía en función de las dos anteriores.

La integral triple de f en D es:

(1)

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

(2) o

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d \left(\int_{A(y)}^{B(y)} \left(\int_{C(x,y)}^{E(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx \right) dy$$

(3) o

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_e^f \left(\int_{\Psi(z)}^{\Phi(x)} \left(\int_{\Gamma(x,y)}^{\Lambda(x,y)} f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz$$

Observación: De forma análoga a las integrales dobles, aquí tendremos que integrar primero respecto de la variable que depende de las otras dos, luego respecto de la que depende de una variable y finalmente respecto de la que varía entre dos valores reales.

Ejemplo 3.2

Calcular la integral triple $\iiint\limits_M zy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ donde
$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2},\ 0 \le z \le x^2+y^2\}$

$\iiint\limits_M zy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \left(\int_0^{x^2+y^2} zy\sqrt{x^2+y^2}\,dz \right) dy \right) dx =$

$= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} [\frac{z^2}{2} y\sqrt{x^2+y^2}]_0^{x^2+y^2} dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{2} y(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}\,dy \right) dx =$

$= \int_0^2 [\frac{1}{14}(x^2+y^2)^{\frac{7}{2}}]_0^{\sqrt{2x-x^2}} dx = \frac{1}{14}\int_0^2 (x^2+2x-x^2)^{\frac{7}{2}} - (x^2)^{\frac{7}{2}}\,dx = \frac{1}{14}\int_0^2 (2^{\frac{7}{2}}x^7 - x^7)dx =$

$= \frac{1}{14}[2^{\frac{7}{2}}\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{8}x^8]_0^2 = \frac{1}{14}(\frac{2^9}{9} - \frac{2^8}{8}) = \frac{16}{9}.$

3.2. Cambio de variable en una integral triple. Se realiza de forma análoga a las integrales dobles, así:

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z)$, una función acotada y $T : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to D$ una función biyectiva de clase C^1 tal que $\det(JT(u,v,w)) \neq 0\ \forall\ (u,v,w) \in \Omega$, entonces:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Omega f(T(u,v,w)) \cdot |\det(JT(u,v,w))|\,du\,dv\,dw$$

3.2.1. Ejemplos de cambios de variables.

- **Cambio a coordenadas cilíndricas:** es el mismo que el cambio a polares pero en tres dimensiones.

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Omega r\cdot f(r\cdot\cos\theta, r\cdot\operatorname{sen}\theta, z)\,dr\,d\theta\,dz$$

Este cambio de variable es aconsejable cuando el dominio de integración es un recinto cilíndrico, es decir aquél cuya proyección sobre el plano OXY sea un recinto circular.

Ejemplo 3.3

Calcular $\int\int\int_S \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$ siendo S el sólido acotado por la superficie del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y el plano $z=1$.

En el dominio de integración S, tal y como nos lo definen, $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$. Si lo proyectamos sobre el plano OXY obtenemos el círculo de centro el origen y radio 1, que es el recinto en el que varían las coordenadas x e y. Esto último nos da pie ha realizar un cambio a coordenadas cilíndricas $\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$, y en estas coordenadas tenemos que

$S = \{(r,\theta,z) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ r \leq z \leq 1\}$

$\int\int\int_S \sqrt{x^2+y^2}\ dx\ dy\ dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_r^1 r\cdot r\, dz\right) d\theta\right) dr = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot \left(\int_0^1 r^2 \left(\int_r^1 dz\right) dr\right) =$

$= 2\pi \int_0^1 r^2 [z]_r^1\, dr = 2\pi \int_0^1 r^2(1-r)\, dr = 2\pi[\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}]_0^1 = \dfrac{\pi}{6}$

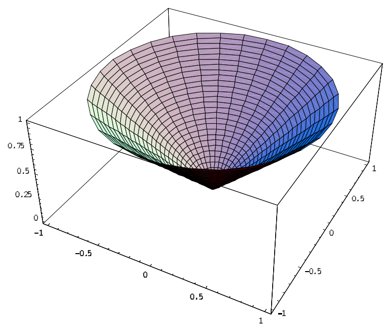

FIGURA 2. Cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, con $z \leq 1$

- **Cambio a coordenadas esféricas:** es una generalización de las coordenadas polares a tres dimensiones.

$$\begin{cases} x = r\cdot \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ y = r\cdot \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cdot\cos\theta \end{cases} \qquad J(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\cdot\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & r\cdot\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\cdot\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\operatorname{sen}\theta$$

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int\int\int_\Omega f(r,\theta,\varphi)\cdot r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

El cambio a coordenadas esféricas es útil para dominios esféricos o de revolución.

Ejemplo 3.4

Calcular $\int\int\int_S xyz\ dx\ dy\ dz$ siendo
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x, y, z \geq 0\}$.
El recinto de integración S es un octante de la esfera de centro el origen y radio 1, por lo cual es conveniente hacer un cambio a coordenadas esféricas.
$\begin{cases} x = r \cdot \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = r \cdot \cos\theta \end{cases}$ y en estas coordenadas el recinto se convierte en
$S = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$.
$\int\int\int_S xyz\ dx\ dy\ dz =$
$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \cdot r \cdot \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \cdot r \cdot \cos\theta \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen}\theta\ d\varphi \right) d\theta \right) dr =$
$= \left(\int_0^1 r^5\ dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta\ d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\ d\varphi \right) =$
$= [\frac{r^6}{6}]_0^1 \cdot [\frac{\operatorname{sen}^4\theta}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{48}$

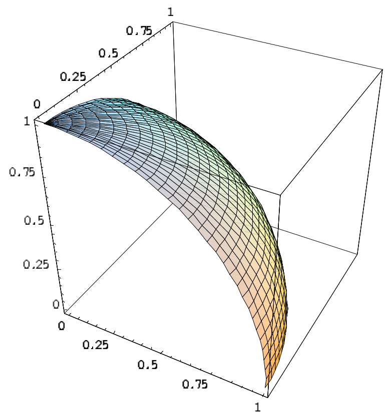

FIGURA 3. Octante de radio 1

3.3. Aplicaciones geométricas de la integral triple.

3.3.1. Cálculo de volúmenes. El método para calcular áreas con integrales dobles, se convierte ahora en cálculo de volúmenes con integrales triples. Esto es, sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un recinto acotado con interior no vcacío, entonces su volumen $V(D)$ es:

$$V(D) = \int\int\int_D dx\ dy\ dz$$

Ejemplo 3.5

Calcular el volumen del tetraedro dado por
$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$.
$V(T) = \int\int\int_T dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx =$
$= \int_0^1 [(1 - x)y - \frac{y^2}{2}]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = [-\frac{(1-x)^3}{6}]_0^1 = \dfrac{1}{6}$

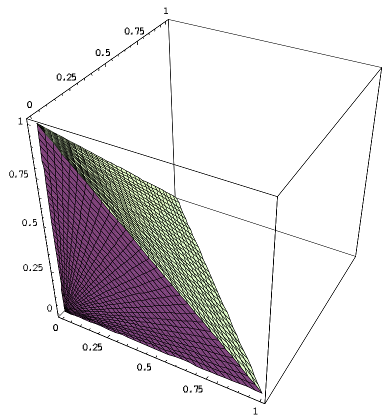

FIGURA 4. Tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

3.3.2. Masa total, centro de gravedad (masas) y momentos de inercia de cuerpos tridimensionales. Estos conceptos se definen igual que en el caso de las regiones planas, pero utilzando integrales triples y cambiando áreas por volúmenes. Esto es, sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una región acotada (una sólido) cuya densidad por unidad de volumen (densidad volumétrica) en el punto $(x, y, z) \in S$ viene dada por una función $\rho : S \to [0, +\infty)$, que suponemos integrable en S.

- Se define la **masa total** de S, $m(S)$ como:

$$m(S) = \int\int\int_S \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

- El cociente entre su masa total y su volúmen se denomina **densidad media**

$$\bar{\rho}(S) = \frac{m(S)}{V(S)} = \frac{\int\int\int_S \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int_S dx\, dy\, dz}$$

- Las coordenadas del **centro de gravedad** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de S son:

$$\bar{x} = \frac{1}{m(S)} \int\int\int_S x \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \frac{\int\int\int_S x \cdot \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int_S \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m(S)} \int\int\int_S y \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{\int\int\int_S y \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int_S \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m(S)} \int\int\int_S z \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{\int\int\int_S z \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int_S \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$$

- Si $L \subset \mathbb{R}^3$ es una recta o un plano y $d(x,y,z)$ la distancia de un punto $(x,y,z) \in S$ a L, se denmina **momento de inercia** de S respecto a L, al número:

$$I_L = \int\int\int_S (d(x,y,z))^2 \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

- Los **momentos de inercia** respecto a los tres **ejes coordenados** son:

respecto al eje $OX \ \rightarrow I_x = \int\int\int_S (y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

respecto al eje $OY \ \rightarrow I_y = \int\int\int_S (x^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

respecto al eje $OZ \ \rightarrow I_z = \int\int\int_S (x^2+y^2) \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

- Los **momentos de inercia** respecto a los tres **planos coordenados** son:

respecto al plano $OXY \ \rightarrow I_{xy} = \int\int\int_S z^2 \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

respecto al plano $OXZ \ \rightarrow I_{xz} = \int\int\int_S y^2 \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

respecto al plano $OYZ \ \rightarrow I_{yz} = \int\int\int_S x^2 \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

Observar que $I_x = I_{xy} + I_{xz}$, $I_y = I_{xy} + I_{yz}$ *e* $I_z = I_{xz} + I_{yz}$

Ejemplo 3.6

Calcular la masa del sólido limitado por dos esferas concéntricas, centradas en el origen, de radios a y b ($0 < a < b$), si la densidad en cada punto es igual al cuadrado de su distancia al centro.

La distancia de un punto (x, y, z) al origen es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ por tanto nuestra densidad es $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Las ecuaciones de las dos esferas son $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, por tanto nuestro sólido viene definido como:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le b^2\}.$$

Al tratarse de un dominio esférico nos conviene hacer un cambio a coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r \cdot \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = r \cdot \cos\theta \end{cases} \qquad J(r, \theta, \varphi) = r^2 \operatorname{sen}\theta$$

y con estas coordenadas queda $\quad S = \{(r, \theta, \varphi) : a \le r \le b,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$

$$m(S) = \iiint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\varphi \right) d\theta \right) dr =$$

$$= \left(\int_a^b r^4\, dr \right) \cdot \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = [\frac{r^5}{5}]_a^b \cdot [-\cos\theta]_0^\pi \cdot 2\pi = \frac{b^5 - a^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi(b^5 - a^5)}{5}$$

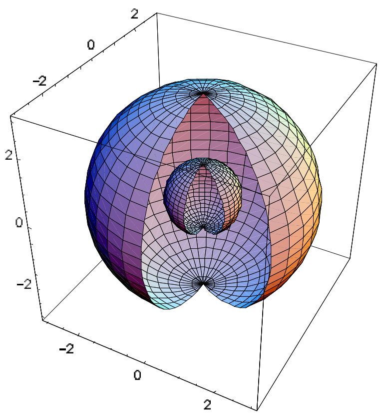

FIGURA 5. Esferas concéntricas.