Tema 6

Cálculo de primitivas

1. Primitiva de una función

Definición 1.1

Sean $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$, diremos que F es una primitiva de f en $[a, b]$ si $F'(x) = f(x)\,\forall\, x \in [a, b]$. Es decir, una primitiva de f es aquella función que al derivarla nos da de resultado la función f.

Proposición 1.2

Sean $f, F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$, si F y G son primitivas de f en $[a, b]$, entonces se diferencian en una constante. Esto es, $F(x) - G(x) = c\,\forall\, x \in [a, b]$ ($c \in \mathbb{R}$).

La primitiva de una función f o integral definida de f se denota:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Cometiendo un abuso de notación, a la primitiva o integral indefinida se le suele llamar simplemente integral.

Proposición 1.3

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces:

(1) $\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$
(2) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Observaciones:

(1) $\int f(x) \cdot g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$
(2) $\int \dfrac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \dfrac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$

Proposición 1.4

Sean $f, g, F : [a, b] \to \mathbb{R}$, donde F es una primitiva de f en $[a, b]$, entonces:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c.$$

2. Integrales inmediatas

$g(x)$	$\int g(x)\,dx$	–	$g(x)$	$\int g(x)\,dx$
0	c	–	k	$kx+c$
$x^n\ (n\neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$	–	$f(x)^n\cdot f'(x)\ (n\neq -1)$	$\dfrac{f(x)^{n+1}}{n+1}+c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x+c$	–	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(f(x))+c$
e^x	e^x+c	–	$e^{f(x)}\cdot f'(x)$	$e^{f(x)}+c$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x+c$	–	$\operatorname{sen}(f(x))\cdot f'(x)$	$-\cos(f(x))+c$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x+c$	–	$\cos(f(x))\cdot f'(x)$	$\operatorname{sen}(f(x))+c$
$\dfrac{1}{cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+c$	–	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$	$\operatorname{tg}(f(x))+c$
$\dfrac{1}{sen^2 x}$	$-\cot x+c$	–	$\dfrac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))}$	$-\cot(f(x))+c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc\,tg} x+c$	–	$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\operatorname{arc\,tg}(f(x))+c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,sen} x+c$	–	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$\operatorname{arc\,sen}(f(x))+c$
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x+c$	–	$\operatorname{Sh}(f(x))\cdot f'(x)$	$\operatorname{Ch}(f(x))+c$
$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x+c$	–	$\operatorname{Ch}(f(x))\cdot f'(x)$	$\operatorname{Sh}(f(x))+c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{argSh} x+c$	–	$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2+1}}$	$\operatorname{argSh}(f(x))+c$ [1]
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{argCh} x+c$	–	$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-1}}$	$\operatorname{argCh}(f(x))+c$

3. Integración por cambio de variable

$$\int f(x)\,dx = \left\| \begin{array}{l} x=u(t) \\ dx=u'(t)\,dt \end{array} \right\| = \int f(u(t))\cdot u'(t)\,dt$$

Ejemplo 3.1

$\int \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left\| \begin{array}{l} x=t^2\to t=\sqrt{x} \\ dx=2t\,dt \end{array} \right\| = \int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int\frac{1}{1+t^2}\,dt =$

$= \int 2\operatorname{arc\,tg} t\,dt = 2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x})+c.$

[1] $\operatorname{argSh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ y $\operatorname{argCh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

4. INTEGRALES DE POTENCIAS

(1) Las integrales del tipo $\int \frac{p(x)}{x^n}$, donde $p(x)$ es un polinomio y $n \in \mathbb{R}$, se pueden resolver descomponiéndola en potencias de x.

Ejemplo 4.1

$$\int \frac{x^2 - 3x + 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^2 - 3x + 2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \int (x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} + 2\frac{1}{x})\,dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\ln x = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x} + 2\ln x + c.$$

(2)

$$\int f'(x)\sqrt[n]{f(x)^k}\,dx = \int f'(x)\cdot f(x)^{\frac{k}{n}}\,dx = \frac{f(x)^{\frac{k}{n}+1}}{\frac{k}{n}+1} + c$$

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c.$$

5. INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables, se cumple:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Expresión comúnmente conocida como $\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$.

Algunos tipos de integrales que se resuelven aplicando este método:

(1) Integrales del tipo $\int x^n \ln(ax)\,dx$, $\int x^n \operatorname{arc\,tg}(ax)\,dx$, $\int x^n \operatorname{arc\,sen}(ax)\,dx$, $\int x^n \arccos(ax)\,dx$ ($n \in \mathbb{Z}$) se resuelven haciendo $dv = x^n\,dx$.

Ejemplo 5.1

$$a)\ \int x^3 \ln x\, dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^3 dx \\ v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\| = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\, dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4}(\ln x - \tfrac{1}{4}) + c.$$

$$b)\ \int \operatorname{arc\,sen} x\, dx = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arc\,sen} x \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx \\ v = \int dx = x \end{array} \right\| = x \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= x\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = x\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= x\operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

(2) Integrales del tipo $\int x^n e^{ax}\, dx$, $\int x^n \operatorname{sen}(ax)\, dx$, $\int x^n \cos(ax)\, dx$ ($n \in \mathbb{N}$) se resuelven haciendo $u = x^n$, aplicando reiteradamente el método por partes tantas veces como indique n.

Ejemplo 5.2

$$a)\ \int x \operatorname{sen} x\, dx = \left\| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \\ v = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \end{array} \right\| = -x\cos x + \int \cos x\, dx =$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + c.$$

$$b)\ \int x^2 e^x \quad dx \quad = \left\| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\, dx \\ dv = e^x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\| \quad = \quad x^2 e^x \quad - \quad 2\int x e^x \quad dx \quad =$$

$$\left\| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = e^x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\| =$$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x\, dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x = e^x(x^2 - 2x + 2) + c.$$

(3) Otro tipo especial de integración por partes son $\int e^{bx} \operatorname{sen}(ax)\, dx$ y $\int e^{bx} \cos(ax)\, dx$, las cuales aplicando dos veces el método por partes se obtiene la integral de partida y “despejando"se obtiene el resultado final.

Ejemplo 5.3

$\int e^x \operatorname{sen} x \quad dx \quad = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{sen} x \\ du = \cos x dx \\ dv = e^x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\| = \quad e^x \operatorname{sen} x \quad - \quad \int e^x \cos x \quad dx \quad =$
$\left\| \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\operatorname{sen} x dx \\ dv = e^x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\| =$
$= e^x \operatorname{sen} x - (e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx)$.

Ahora, si llamamos $I = \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$, tenemos que $I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I$ y despejando I en esta expresión obtenemos que $I = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)$, por tanto

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + c.$$

6. Integración de funciones racionales

6.1. Integración de fracciones simples.

(1) Si $n \neq 1$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n} \, dx = \frac{1}{a} \int a(ax+b)^{-n} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{a(1-n)(ax+b)^{n-1}} + c$$

(2) Si $n \neq 1$

$$\int \frac{x}{(ax^2+b)^n} \, dx = \frac{1}{2a} \int 2ax(ax^2+b)^{-n} \, dx = \frac{1}{2a} \cdot \frac{(ax^2+b)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{2a(1-n)(ax^2+b)^{n-1}} + c$$

(3)

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \int \frac{a}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + c$$

(4)

$$\int \frac{x}{ax^2+b} \, dx = \frac{1}{2a} \int \frac{2ax}{ax^2+b} \, dx = \frac{1}{2a} \ln(ax^2+b) + c$$

(5) Sean $a, b > 0$,

$$\int \frac{1}{ax^2+b} \, dx = \int \frac{1}{b(1+\frac{ax^2}{b})} \, dx = \frac{1}{b} \int \frac{1}{1+(\sqrt{\frac{a}{b}}\, x)^2} \, dx = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} \int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{1+(\sqrt{\frac{a}{b}}\, x)^2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\frac{a}{b}}\, x) + c$$

(6) Sea $ax^2 + bx + c$ un polinomio sin raíces reales, es decir, $b^2 - 4ac < 0$. Para calcular la integral $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx$, hacemos el cambio de variable $t = \sqrt{a}\, x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ y se convierte en una similar a la del apartado anterior.

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{a}\, x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \to t^2 = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} \\ \to ax^2 + bx = t^2 - \frac{b^2}{4a} \\ dt = \sqrt{a}\, dx \to dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\, dt \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{t^2 - \frac{b^2}{4a} + c}\, dt$$

La última integral obtenida es del tipo anterior ya que $-\frac{b^2}{4a} + c > 0$ debido a que $b^2 - 4ac < 0$.

(1) $\int \frac{1}{x^2+9}\, dx = \int \frac{1}{9(1+\frac{x^2}{9})}\, dx = \frac{1}{9} \cdot 3 \int \frac{\frac{1}{3}}{1+(\frac{x}{3})^2}\, dx = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg}(\frac{x}{3}) + c.$

(2) $\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \left\| \begin{array}{l} t = x + \frac{1}{2} \to t^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} \\ \to x^2 + x + 1 = t^2 - \frac{1}{4} + 1 = t^2 + \frac{3}{4} \\ dt = dx \end{array} \right\| = \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\, dt = \int \frac{1}{\frac{3}{4}(1+\frac{4t^2}{3})}\, dt =$

$= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+(\frac{2t}{\sqrt{3}})^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}(\frac{2t}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + c.$

E

6.2. Integración de fracciones compuestas. En este apartado vamos a ver la resolución general de integrales de la forma $\int \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, para ello distinguimos dos casos:

(1) b **Caso 1.**
grado de $p(x)$ es menor que el de $q(x)$.

Para ello tenemos que descomponer la fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ en suma de fracciones simples, siguiendo el siguiente proceso:

Factorizamos el denominador $q(x)$ en factores irreducibles

$$q(x) = k \cdot (x-\alpha)^n \cdot (x-\beta)^r \cdots (x^2 + b_1 x + c_1) \cdot (x^2 + b_2 x + c_2) \cdots$$

(los polinomios $x^2 + b_i x + c_i$ sin raíces reales).

En las descomposición aparecerán las siguientes fracciones:

- $\frac{A}{x-\alpha}$ si α es una raíz simple de $q(x)$.
- $\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$ si α es una raíz de multiplicidad n de $q(x)$.
- $\frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$ si $x^2 + bx + c$ es un factor sin raíces reales de $q(x)$.

(las constantes deberán de ser determinadas).

De esta forma convertimos la integral $\int \frac{p(x)}{q(x)}$ en suma de integrales de fracciones simples como las de la sección 6.1.

Ejemplo 6.1

(1) Calcular $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$.

Primero descomponemos $\frac{1}{x^2-1}$ en suma de fracciones simples:
$x^2-1=(x+1)(x-1)$, por tanto tendremos que

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}.$$

Los valores de A y B serán los que cumplan la igualdad
$A(x+1)+B(x-1)=1$, para hallarlos vasta con dar valores a x en esta igualdad, tantos como constantes tengamos, y resolver la ecuaciones obtenidas. Para facilitar cálculos es aconsejable dar las raíces del denominador.

$$A(x+1)+B(x-1)=1\Rightarrow\begin{cases}x=1\to 2A=1\to A=\frac{1}{2}\\ x=-1\to -2B=1\to B=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Por tanto $\frac{1}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$, entonces:

$$\int\frac{1}{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+c.$$

(2) Calcular $\int\frac{x+4}{x^3+2x}\,dx$.

$$x^3+2x=x(x^2+2)\Rightarrow\frac{x+4}{x^3+2x}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+2}=\frac{A(x^2+2)+Mx^2+Nx}{x^3+2x}$$

$$A(x^2+2)+Mx^2+Nx=x+4\Rightarrow\begin{cases}x=0\to 2A=4\to A=2\\ x=1\to 3A+M+N=5\to M+N=-1\\ x=-1\to 3A+M-N=-3\to M-N=-3\end{cases}$$

La solución de $\begin{cases}M+N=-1\\ M-N=-3\end{cases}$ es $M=-2$ y $N=1$, por tanto la descomposición queda $\frac{x+4}{x^3+2x}=\frac{2}{x}+\frac{-2x+1}{x^2+2}=\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+2}$, entonces $\int\frac{x+4}{x^3+2x}\,dx=2\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{2x}{x^2+2}\,dx+\int\frac{1}{x^2+2}\,dx$. Calculando las integrales por separado:

$$2\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{2x}{x^2+2}\,dx=2\ln x-\ln(x^2+2)=\ln\left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)$$

$$\int\frac{1}{x^2+2}=\int\frac{1}{2(1+\frac{x^2}{2})}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Obtenemos:

$$\int\frac{x+4}{x^3+2x}\,dx=\ln\left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c.$$

(3) Calcular $\int\frac{x^2-3x+1}{x^3-4x^2+5x-2}$. $x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)\Rightarrow\frac{x^2-3x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2}{x^3-4x^2+5x-2}$

$A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2=x^2-3x+1\Rightarrow$
$\begin{cases}x=2\to C=-1\\ x=1\to -A=-1\to A=1\\ x=0\to -2A+2B+C=1\to B=2\end{cases}$ Por tanto $\frac{x^2-3x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}$,
entonces:

$$\int\frac{x^2-3x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx+2\int\frac{1}{x-1}\,dx-\int\frac{1}{x-2}\,dx=$$

$$=\frac{-1}{x-1}+2\ln(x-1)-\ln(x-2)=\frac{-1}{x-1}+\ln\left(\frac{(x-1)^2}{x-2}\right)+c.$$

El grado de $p(x)$ es mayor o igual que el de $q(x)$.

Efectuando la división $p(x) : q(x)$ de polinomios, tenemos
$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$ donde $c(x)$ es el cociente y $r(x)$ el resto obtenidos en la división. Por tanto $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x) \cdot c(x) + r(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, entonces:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = \int c(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\, dx.$$

La primera es una integral polinómica fácil de resolver y la segunda se resuelve como en el caso anterior ya que el grado de $r(x)$ es menor que el de $q(x)$.

Ejemplo 6.2

Calcular $\int \frac{x^3-2x^2-2}{x^2-2x}\, dx$.
Si efectuamos la división $(x^3 - 2x^2 - 2) : (x^2 - 2x)$, obtenemos de cociente x y de resto -2, entonces:

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - 2}{x^2 - 2x}\, dx = \int x\, dx + \int \frac{-2}{x^2 - 2x}\, dx.$$

$\int x\, dx = \frac{x^2}{2}$ y ahora vamos a calcular $\int \frac{-2}{x^2-2x}\, dx$:

$$x^2 - 2x = x(x-2) \Rightarrow \frac{-2}{x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + Bx}{x^2 - 2x}$$

$$A(x-2) + Bx = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow -2A = -2 \rightarrow A = 1 \\ x = 2 \rightarrow 2B = -2 \rightarrow B = -1 \end{cases}$$

Por tanto $\frac{-2}{x^2-2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$, entonces:

$$\int \frac{-2}{x^2 - 2x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{1}{x-2}\, dx = \ln x - \ln(x-2) = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3 - 2x^2 - 2}{x^2 - 2x}\, dx = \frac{x^2}{2} + \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + c.$$

7. Integración de funciones trigonométricas

7.1. Integración de $\int \operatorname{sen}^n x \cdot \cos^m x\, dx$. Para estudiar la resolución de este tipo de integrales vamos a distinguir varios casos, dependiendo de la paridad de los exponentes n y m.

(1) Si n impar se resuelve haciendo el cambio de variable $t = \cos x$.
n es de la forma $n = 2k + 1$, entonces:
$\int \operatorname{sen}^n x \cdot \cos^m x\, dx = \int (\operatorname{sen} x)^{2k+1} \cdot \cos^m x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^m x\, dx =$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cdot \cos^m x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = \left\| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\operatorname{sen} x\, dx \end{array} \right\| = -\int (1 - t^2)^k \cdot t^m\, dt.$$

Esta última es una integral polinómica fácil de resolver.

Ejemplo 7.1

$\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int \operatorname{sen} x \cdot (1-\cos^2 x) \cdot \cos^2 x\, dx =$
$= \left\| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\operatorname{sen} x\, dx \end{array} \right\| = -\int (1-t^2)t^2\, dt = \int (t^4 - t^2)\, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} =$
$= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c.$

(2) Si m impar se resuelve haciendo el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$, aplicando un proceso similar al anterior. Es decir, es similar al anterior “intercambiando los papeles del seno y coseno".

Ejemplo 7.2

$\int \cos^5 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x\, dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \cdot \cos x\, dx = \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{sen} x \\ dt = \cos x\, dx \end{array} \right\| =$
$= \int (1-t^2)^2\, dt = \int (t^4 - 2t^2 + 1)\, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x + c.$

(3) n y m pares:

Empezamos con $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$ y $\int \cos^2 x\, dx$ que se resuelven fácilmente si aplicamos las fórmulas trigonométricas $\boxed{\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)}$ y $\boxed{\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)}$.

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c.$$

Ejemplo 7.3

a) $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx = \int (\frac{1}{2}(1-\cos 2x))^2\, dx =$
$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x - \cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x))\, dx =$
$= \frac{1}{4}\int (\frac{1}{2} - 2\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x)\, dx = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}x - \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x) =$
$= \frac{1}{32}(4x - 8\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 4x) + c.$

b) $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\, dx = \left\| \begin{array}{l} \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \\ \to sen^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x \end{array} \right\| = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx =$
$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x) = \frac{1}{32}(4x - \operatorname{sen} 4x) + c.$

7.2. Integración de $\int \frac{1}{a+b\cos x}\, dx$ y $\int \frac{1}{a+b\operatorname{sen} x}\, dx$. Estas integrales se pueden resolver haciendo el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, donde se nos quedará:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{y} \qquad x = 2\operatorname{arc\,tg} t \to dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

Por tanto, aplicando este cambio de variable se convierten en una integral racional como las de las seccion 6.

Ejemplo 7.4

$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln t = \ln(\operatorname{tg}(\frac{x}{2})) + c.$

8. Integración de funciones radicales

8.1. Integración de $\int \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}\, dx$ con $a, b > 0$. La solución de estas integrales es un arcoseno, como podemos ver:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{a(1-\frac{b}{a}x^2)}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \int \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{1-(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x)^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x\right) + c.$$

Ejemplo 8.1

$\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{9(1-\frac{4}{9}x^2)}}\, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}}\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2x}{3}\right) + c.$

8.2. Integración de $\int \frac{1}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\, dx$ con $a > 0$ y $b^2 + 4ac \geq 0$. Haciendo el cambio de variable $t = \sqrt{a}\, x - \frac{b}{2\sqrt{a}}$ se convierte en una similar a la de la sección anterior:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\, dx = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{a}\, x - \frac{b}{2\sqrt{a}} \to t^2 = ax^2 - bx + \frac{b^2}{4a} \\ \to -ax^2 + bx = \frac{b^2}{4a} - t^2 \\ dt = \sqrt{a}\, dx \to dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\, dt \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{4a} + c - t^2}}\, dt$$

Ejemplo 8.2

$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-x}}\, dx = \left\| \begin{array}{l} t = x + \frac{1}{2} \to t^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} \\ \to -x^2 - x = \frac{1}{4} - t^2 \\ dt = dx \end{array} \right\| = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}}\, dt = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}(1-4t^2)}}\, dt =$

$= \int \frac{2}{\sqrt{1-(2t)^2}}\, dt = \operatorname{arc\,sen}(2t) = \operatorname{arc\,sen}(2x+1) + c.$

8.3. Integración de $\int \sqrt{a-bx^2}\, dx$ con $a, b > 0$. Éstas se pueden resolver haciendo el cambio de variable $x = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sen} t$, de donde obtenemos $dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \cos t\, dt$ y $t = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x)$. También necesitaremos conocer la expresión del $\operatorname{sen} 2t$:

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cdot \cos t = 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = 2\sqrt{\frac{b}{a}}\, x \sqrt{1 - \frac{bx^2}{a}} = \frac{2\sqrt{b}}{a} x \sqrt{a - bx^2}$$

$$\int \sqrt{a-bx^2}\, dx = \int \sqrt{a - a \operatorname{sen}^2 t} \sqrt{\frac{a}{b}} \cos t\, dt = \frac{a}{\sqrt{b}} \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t\, dt = \frac{a}{\sqrt{b}} \int \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{b}} \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\, dt = \frac{a}{2\sqrt{b}}(t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t) = \frac{a}{2\sqrt{b}} \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x) + \frac{x}{2}\sqrt{a - bx^2} + c.$$

8.4. Integración de $\int \sqrt{-ax^2+bx+c}\,dx$ con $a>0$ y $b^2+4ac\geq 0$. Haciendo el cambio de variable $t=\sqrt{a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{a}}$ se convierte en una similar a la de la sección anterior:

$$\int \sqrt{-ax^2+bx+c}\,dx = \left\| \begin{array}{l} t=\sqrt{a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{a}} \to t^2=ax^2-bx+\frac{b^2}{4a} \\ \to -ax^2+bx=\frac{b^2}{4a}-t^2 \\ dt=\sqrt{a}\,dx \to dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\,dt \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\sqrt{\frac{b^2}{4a}+c-t^2}\,dt$$

Ejemplo 8.3

$\int\sqrt{-x^2-4x}\,dx = \left\| \begin{array}{l} t=x+2\to t^2=x^2+4x+4 \\ \to -x^2-4x=4-t^2 \\ dt=dx \end{array} \right\| = \int\sqrt{4-t^2}\,dt =$

$= \left\| \begin{array}{l} t=2\,\mathrm{sen}\,u \to dt=2\cos u \\ \mathrm{sen}\,u=\frac{t}{2}\to u=\mathrm{arc\,sen}\,\frac{t}{2} \end{array} \right\| = \int\sqrt{4-4\,\mathrm{sen}^2 u}\quad 2\cos u\quad du =$
$4\int\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 u}\cos u\;\;du = 4\int\cos^2 u\;\;du = 4\int\frac{1}{2}(1+\cos 2u)\;\;du = 2u+\mathrm{sen}\,2u =$
$\left\| \begin{array}{l} \mathrm{sen}\,2u=2\,\mathrm{sen}\,u\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 u}= \\ =2\frac{t}{2}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}=\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} \end{array} \right\| =$
$=2\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2}=2\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{x+2}{2}\right)+\frac{x+2}{2}\sqrt{-x^2-4x}+c.$

8.5. Integración de $\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ con $a>0$. Si nos fijamos en la tabla de integrales inmediatas (sección 2) podemos deducir que:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}\,dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)+c \;\Rightarrow\; \int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2+b}}\,dx=\ln\left(f(x)+\sqrt{f(x)^2+b}\right)+c$$

La forma general se puede resolver haciendo el cambio de variable $t=\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$

Ejemplo 8.4

$\int\frac{1}{\sqrt{4x^2+3}}\,dx = \left\| \begin{array}{l} \text{t=2x} \\ \text{dt=2 dx} \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt=\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2+3}\right)+c=$
$\frac{1}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+3}\right)+c.$

8.6. Integración de $\int\sqrt{ax^2+b}\,dx$ con $a,b>0$. Éstas se pueden resolver haciendo el cambio de variable $x=\sqrt{\frac{b}{a}}\,\mathrm{Sh}\,t$, de donde obtenemos $\quad dx=\sqrt{\frac{b}{a}}\,\mathrm{Ch}\,t\,dt\quad$ y $\quad t=\mathrm{argSh}(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x)=\ln(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x+\sqrt{\frac{a}{b}x^2+1})$. También necesitaremos conocer la expresión del $\mathrm{Sh}\,2t$:

$\mathrm{Sh}\,2t=2\,\mathrm{Sh}\,t\cdot\mathrm{Ch}\,t=2\,\mathrm{Sh}\,t\sqrt{\mathrm{Sh}^2\,t+1}=2\sqrt{\frac{a}{b}}\,x\sqrt{\frac{ax^2}{b}+1}=\frac{2\sqrt{a}}{b}x\sqrt{ax^2+b}$

$\int\sqrt{ax^2+b}\,dx=\int\sqrt{b\,\mathrm{Sh}^2\,t+b}\,\sqrt{\frac{b}{a}}\;\mathrm{Ch}\,t\,dt=\frac{b}{\sqrt{a}}\int\sqrt{\mathrm{Sh}^2\,t+1}\;\mathrm{Ch}\,t\,dt=$
$=\frac{b}{\sqrt{a}}\int\mathrm{Ch}^2\,t\,dt=\frac{b}{\sqrt{a}}\int\frac{1}{2}(1+\mathrm{Ch}\,2t)dt=\frac{b}{2\sqrt{a}}(t+\frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\,2t)=$
$=\frac{b}{2\sqrt{a}}\ln(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x+\sqrt{\frac{a}{b}x^2+1})+\frac{x}{2}\sqrt{ax^2+b}\;+c.$

8.7. Integración de $\int \sqrt{ax^2-b}\,dx$ con $a,b>0$. La resolución de esta integral es similar a la anterior, la única diferencia es el cambio de variable, que en este caso es $x=\sqrt{\frac{b}{a}}\,\mathrm{Ch}\,t$, por lo que $dx=\sqrt{\frac{b}{a}}\,\mathrm{Sh}\,t\,dt$ y $t=\mathrm{argCh}(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x)=\ln(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x+\sqrt{\frac{a}{b}x^2-1})$. Al igual que antes, necesitaremos calcular la expresión del $\mathrm{Sh}\,2t$:

$$\mathrm{Sh}\,2t=2\,\mathrm{Sh}\,t\cdot\mathrm{Ch}\,t=2\sqrt{\mathrm{Ch}^2\,t-1}\ \mathrm{Ch}\,t=2\sqrt{\frac{ax^2}{b}-1}\ \sqrt{\frac{a}{b}}\,x=\frac{2\sqrt{a}}{b}x\sqrt{ax^2-b}$$

$$\int\sqrt{ax^2-b}\,dx=\int\sqrt{b\,\mathrm{Ch}^2\,t-b}\ \sqrt{\frac{b}{a}}\ \mathrm{Sh}\,t\,dt=\frac{b}{\sqrt{a}}\int\sqrt{\mathrm{Ch}^2\,t-1}\ \mathrm{Sh}\,t\,dt=$$
$$=\frac{b}{\sqrt{a}}\int\mathrm{Sh}^2\,t\,dt=\frac{b}{\sqrt{a}}\int\frac{1}{2}(\mathrm{Ch}\,2t-1)dt=\frac{b}{2\sqrt{a}}(\frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\,2t-t)=$$
$$=\frac{x}{2}\sqrt{ax^2-b}-\frac{b}{2\sqrt{a}}\ln(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x+\sqrt{\frac{a}{b}x^2-1})\ +c.$$

8.8. Integración de $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ con $a>0$. Haciendo el cambio de variable $t=\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ se convierte en una similar a alguna de los dos tipos anteriores, dependiendo de que si $b^2-4ac<0$ (sección 8.6) o si $b^2-4ac>0$ (sección 8.7).

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\left\|\begin{array}{l} t=\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\to t^2=ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}\\ \to ax^2+bx=t^2-\frac{b^2}{4a}\\ dt=\sqrt{a}\,dx\to dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\,dt\end{array}\right\|=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\sqrt{t^2-\frac{b^2}{4a}+c\,dt}$$

Ejemplo 8.5

$$\int\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=\left\|\begin{array}{l} t=x+2\to t^2=x^2+4x+4\\ \to x^2+4x+5=t^2+1\\ dt=dx\end{array}\right\|=\int\sqrt{t^2+1}\,dt=$$
$$=\left\|\begin{array}{l} t=\mathrm{Sh}\,u\to dt=\mathrm{Ch}\,u\\ u=\mathrm{argSh}\,t=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{array}\right\|=\int\sqrt{\mathrm{Sh}^2\,u+1}\ \mathrm{Ch}\,u\,du=\int\mathrm{Ch}^2\,u\,du=\int\frac{1}{2}(1+$$
$$\mathrm{Ch}\,2u)\,du=\frac{1}{2}(u+\frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\,2u)=\left\|\begin{array}{l}\mathrm{Sh}\,2u=2\,\mathrm{Sh}\,u\sqrt{\mathrm{Sh}^2\,u+1}=\\ =2t\sqrt{t^2+1}\end{array}\right\|=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)+t\sqrt{t^2+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)+(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}\ )+c.$$