Tema 5

Aplicaciones del cálculo diferencial

1. Aplicaciones en una variable

1.1. Extremos relativos.

Proposición 1.1: Monotonía

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces:

(1) Si $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) > 0)$ $\forall\, x \in (a, b)$ entonces f es creciente (estrictamente creciente) en $[a, b]$.

(2) Si $f'(x) \leq 0$ $(f'(x) < 0)$ $\forall\, x \in (a, b)$ entonces f es decreciente (estrictamente decreciente) en $[a, b]$.

(3) $f(x)$ es constante $(f(x) = c\ \forall\, x \in [a, b])$ si y sólo si $f'(x) = 0\ \forall\, x \in (a, b)$.

Definición 1.2: Extremos relativos

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua y derivable en un entorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Se dice que en $x = x_0$ f tiene un máximo relativo si existe I, entorno de x_0, tal que $f(x) \leq f(x_0)\ \forall\, x \in I$.

(2) Se dice que en $x = x_0$ f tiene un mínimo relativo si existe I, entorno de x_0, tal que $f(x) \geq f(x_0)\ \forall\, x \in I$.

Los extremos relativos son los puntos donde la función cambia de monotonía.

Proposición 1.3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua y derivable en un entorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Si f tiene en $x = x_0$ un máximo o mínimo relativo, entonces $f'(x_0) = 0$. (El recíproco no es cierto).

(2) Si $f'(x_0) = 0$, se dice que $x = x_0$ es un punto crítico de f. (Los extremos relativos son puntos críticos pero no al revés).

Teorema 1.4

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua y dos veces derivable en un entorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f'(x_0) = 0$, entonces:

(1) Si $f''(x_0) > 0$ en $x = x_0$ f tiene un mínimo relativo.

(2) Si $f''(x_0) < 0$ en $x = x_0$ f tiene un máximo relativo.

(3) Si $f''(x) = 0$ no se puede afirmar nada.

Proposición 1.5

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces si f no alcanza algún extremo absoluto en los extremos (a o b) entonces éste es un extremo relativo.

1.2. Propiedades de las funciones derivables.

Teorema 1.6: Rolle

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Teorema 1.7: Valor medio de Lagrange

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Teorema 1.8: Regla de L'Hôpital

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en un entorno reducido del punto $x_0 \in \mathbb{R}$, tales que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ ó ∞, entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El teorema sigue siendo cierto si consideramos límites en el infinito.

Ejemplos 1.9

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -x = 0$

1.3. Desarrollo de Taylor en series de potencias.

Teorema 1.10

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, n veces derivable en un entorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

para valores de x suficiente próximos a x_0 ($|x - x_0| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$), con $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

A este desarrollo en serie de potencias se le denomina desarrollo de Taylor de grado n de f en x_0.
Si $x_0 = 0$ recibe el nombre de desarrollo de McLaurin.
Se denomina polinomio y resto de Taylor de f en x_0 a

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

y $R_n(x)$ respectivamente.

Observación: Para valores muy próximos a x_0, $f(x)$ la podemos aproximar con $P_n(x)$ con un error $|R_n(x)|$. Cuanto mayor sea el grado n, mejor será la aproximación.

Ejemplo 1.11

Vamos a calcular el desarrollo de McLaurin de $f(x) = \operatorname{sen} x$ de grado 4:
$f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x \to f'(0) = 1$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x \to f''(0) = 0$,
$f'''(x) = -\cos x \to f'''(0) = -1$, $f^{(iv)}(x) = \operatorname{sen} x \to f^{(iv)}(0) = 0$,
$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x - 0) + \frac{0}{2!}(x - 0)^2 - \frac{1}{3!}(x - 0)^3 + \frac{0}{4!}(x - 0)^4 + R_4(x) \Rightarrow$
$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + R_4(x)$ para x próximo a 0 ($x \sim 0$).
Podemos observar que el desarrollo de grado 4 coincide con el de grado 3 al ser nulo el coeficiente de grado 4, así los polinomios de Taylor coinciden
$P_3(x) = P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$.

Ejemplos 1.12

Algunos de los polinomios de Taylor más utilizados:

$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \quad x \sim 0$

$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \quad x \sim 0$

$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad x \sim 0$

1.3.1. Cota del error.

Teorema 1.13: Resto de Lagrange

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n+1$ veces derivable en un entorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

para algún ξ_x comprendido entre x y x_0 ($|x - \xi_x| < |x - x_0|$).

Observación: Si $M \geq \text{máx}\{|f^{(n+1)}(z)| : z \in [x, x_0] \text{ o } z \in [x_0, x]\}$ entonces $|R_n(x)| \leq \dfrac{M}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

Ejemplo 1.14

Dar una cota del error al calcular $e^{0{,}1}$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 2 de e^x en $x = 0$.
Fijándoos en el ejemplo 1.3, $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow e^{0{,}1} \approx P_2(0{,}1) = 1{,}105$.
$f'''(x) = e^x \Rightarrow M \geq \{e^z : z \in [0, 0{,}1]\} = e^{0{,}1}$, ahora vamos a acotar este valor: $e^{0{,}1} < e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} < \sqrt{4} = 2$, por tanto bastará con coger $M = 2$.
Ahora teniendo en cuenta la observación 1.3.1:
$R_2(x) \leq \dfrac{M}{3!}(0{,}1 - 0)^3 = \frac{2}{6}10^{-3} = 0{,}000\widehat{3} < 0{,}00034$.
Por tanto podemos afirmar que $e^{0{,}1} = 1{,}105$ con un error inferior a $0{,}00034$.

Ejemplo 1.15

Calcular el valor del $\operatorname{sen}(0,5)$ con un error inferior a una milésima.
En primer lugar tendremos que determinar el grado del desarrollo de Taylor, de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$, que nos de un error inferior a 10^{-3}, para ello sabemos que dicho error se encuentra acotado por
$R_n(0{,}5) \leq \dfrac{M}{(n+1)!}(0{,}5 - 0)^{n+1} = \dfrac{M}{(n+1)!}(0{,}5)^{n+1}$, donde
$M \geq \text{máx}\{|f^{(n+1)}(z)| : z \in [0, 0{,}5]\}$
$|f^{(n+1)}(z)| = \begin{cases} |\operatorname{sen} z| \text{ si n par} \\ |\cos z| \text{ si n impar} \end{cases} \Rightarrow |f^{(n+1)}(z)| \leq 1$ por lo que nos bastará coger $M = 1$,
de esta forma tenemos que $R_n(0{,}5) \leq \dfrac{(0{,}5)^{n+1}}{(n+1)!}$. Por tanto deberemos de encontrar un n que cumpla $\dfrac{(0{,}5)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-3}$, para lo cual es suficiente con coger $n = 4$. Así el valor del $\operatorname{sen}(0{,}5)$ nos lo dará su polinomio de grado 4, $P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$ (ver ejemplo 1.3). $P_4(0{,}5) = P_4(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48} = 0{,}4791\widehat{6}$.
Para finalizar podemos afirmar que $\operatorname{sen}(0{,}5) = \frac{23}{48}$ con un error inferior a una milésima.

Proposición 1.16

El polinomio de Taylor de $f(x)$ en x_0 es el único polinomio de grado menor o igual que n que verifica:

$$f(x_0) = P_n(x_0),\ f'(x_0) = P_n'(x_0), \dots,\ f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$$

Por tanto si consideramos el desarrollo en potencias de $(x-a)$ de un polinomio $p(x)$ de grado k, $p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_k(x-a)^k$, se cumple:

$$c_0 = p(a),\ c_1 = \frac{p'(a)}{1!},\ c_2 = \frac{p''(a)}{2!}, \dots,\ c_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$$

Ejemplo 1.17

Desarrollar el polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en potencias de $(x-1)$.
$p(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3$, para calcular los valores de las c_i precisamos de las sucesivas derivadas de $p(x)$ hasta la de orden tres.
$p'(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $p''(x) = 6x + 2$, $p'''(x) = 6$, ahora podemos calcularlas:

$$c_0 = p(1) = 4,\ c_1 = \frac{p'(1)}{1!} = 6,\ c_2 = \frac{p''(1)}{2!} = 4,\ c_3 = \frac{p'''(1)}{3!} = 1$$

por tanto $p(x) = 4 + 6(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3$.

2. Aplicaciones en varias variables

2.1. Extremos relativos.

Definición 2.1: Extremos relativos

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$.

(1) f tiene un máximo relativo (estricto) en a si existe una bola abierta $B(a,r)$ tal que $f(a) \geq f(x)$ $(f(a) > f(x))$ $\forall\, x \in B(a,r)$ $(\forall\, x \in B^*(a,r))$.

(2) f tiene un mínimo relativo (estricto) en a si existe una bola abierta $B(a,r)$ tal que $f(a) \leq f(x)$ $(f(a) < f(x))$ $\forall\, x \in B(a,r)$ $(\forall\, x \in B^*(a,r))$.

(3) Se dice que f tiene un extremo relativo (estricto) en a, si f tiene un máximo (estricto) o un mínimo relativo (estricto) en a.

Teorema 2.2

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$, entonces si f tiene un extremo relativo en a la $df(a) \equiv 0$.

El que $df(a) \equiv 0$ es equivalente a que $\overrightarrow{\nabla f}(a) = \overrightarrow{0}$ o, lo que es lo mismo, que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0\ \forall\, i = 1, \dots, n$.

Observación: El recíproco no es cierto, es decir, que si $df(a) \equiv 0$ no implica que f tenga en a un extremo relativo.

Recordar que para funciones de una variable si $f'(x_0) = 0$ no implica que x_0 sea un extremo relativo, para que lo fuera teníamos que tener $f''(x_0) > 0$ (mínimo) o $f''(x_0) < 0$ (máximo).

Definición 2.3: Punto crítico

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$. Si $df(a) \equiv 0$, diremos que f tiene en a un punto crítico o estacionario.
Si a es un punto crítico de f, en el que para cualquier bola abierta $B(a,r)$ existen puntos $x, y \in B(a,r)$ con $f(x) > f(a)$ y $f(y) < f(a)$, entonces diremos que f tiene en a un punto de silla o un puerto.

Teorema 2.4

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$, supongamos que a es un punto crítico de f ($df(a) \equiv 0$) entonces:

(1) Si la forma cuadrática $d^2f(a)(u)$ es semidefinida positiva (definida positiva), esto es $d^2f(a)(u) \geq 0 \ \forall\, u \in \mathbb{R}^n$ ($d^2f(a)(u) > 0 \ \forall\, u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), f tiene un mínimo relativo (estricto) en a.

(2) Si la forma cuadrática $d^2f(a)(u)$ es semidefinida negativa (definida negativa), esto es $d^2f(a)(u) \leq 0 \ \forall\, u \in \mathbb{R}^n$ ($d^2f(a)(u) < 0 \ \forall\, u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), f tiene un máximo relativo (estricto) en a.

(3) Si la forma cuadrática $d^2f(a)(u)$ es no degenerada e indefinida, f tiene en a un punto de silla.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$, denotamos por:

$$\Delta_j(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_j}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a),\ \Delta_2(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n(a) = det(Hf(a))$$

Esto es, los Δ_j son los menores principales, de orden j, de la matriz hessiana.

Teorema 2.5

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de $a \in \mathbb{R}^n$, supongamos que a es un punto crítico de f ($df(a) \equiv 0$) entonces:

(1) Si $\Delta_j(a) > 0 \ \forall\, j = 1, \ldots, n$, f tiene en a un mínimo relativo.

(2) Si $(-1)^j \Delta_j(a) > 0 \ \forall\, j = 1, \ldots, n$, f tiene en a un máximo relativo.

(3) Si no se cumple ninguna de las condiciones anteriores y $\Delta_n(a) = det(Hf(a)) \neq 0$, f tiene en a un punto de silla.

Observación: Cuando $\Delta_n(a) \neq 0$ diremos que a es un punto crítico no degenerado, y si $\Delta_n(a) = 0$ diremos que es degenerado.

La condición (2) es lo mismo que $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \ldots$, es decir, que $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3, \ldots,\ \Delta_n$ alternan su signos, siendo negativo el primero (Δ_1).

2.1.1. Caso particular: Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y)$, es una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de $a \in \mathbb{R}^2$ y $df(a) \equiv 0$.

(1) Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ y $det(Hf(a)) > 0$, entonces f tiene en a un mínimo relativo.

(2) Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ y $det(Hf(a)) > 0$, entonces f tiene en a un máximo relativo.

(3) Si $det(Hf(a)) < 0$, entonces f tiene en a un punto de silla.

Ejemplo 2.6

Calcular los puntos críticos de la función
$f(x, y) = x^2y + 2xy - y^2 - 3y$, e indicar la naturaleza de estos.
Los puntos críticos son los que cumplen $df(x, y) \equiv 0$, es decir, las soluciones del sistema de ecuaciones $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2x - 2y - 3$, por tanto tendremos que resolver el sistema $\begin{cases} 2xy + 2y = 0 \\ x^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$, sacando factor común en la primera ecuación tenemos que $2y(x + 1) = 0$ cuya solución es $y = 0$ ó $x = -1$
Haciendo $y = 0$ en la segunda ecuación nos queda $x^2 + 2x - 3 = 0$ cuyas soluciones son $x = 1$ y $x = -3$, de aquí salen dos puntos críticos $(1, 0)$ y $(-3, 0)$.
Haciendo $x = -1$ en la segunda ecuación nos queda $y = -2$, luego otro punto crítico es $(-1, -2)$.
Ahora tenemos que calcular de que clase son para lo cual necesitamos calcular las derivadas parciales segundas.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x + 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2$,

$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} 2y & 2x + 2 \\ 2x + 2 & -2 \end{vmatrix} = -4y - 4x^2 - 8x - 4$,

(x, y)	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$	$Hf(x, y)$	clase
$(1, 0)$	0	-16	punto de silla
$(-3, 0)$	0	-16	punto de silla
$(-1, -2)$	-4	8	máximo relativo

2.2. Extremos condicionados, multiplicadores de Lagrange. Si tenemos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n)$, y queremos conocer los extremos relativos de f de entre aquellos puntos que satisfacen unas ciertas condiciones o ecuaciones. Esto es, queremos calcular los extremos relativos de f cuando $(x_1, \dots, x_n)$ cumplan ciertas ecuaciones

$$(1) \qquad \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}, \text{ con } r < n$$

En ocasiones podemos despejar de la ecuación algunas variables en función de las otras, por ejemplo podemos despejar las r primeras variables $x_1, \dots, x_r$ en función de las $n - r$ últimas, así tendríamos que $x_i = \tilde{g}_i(x_{r+1}, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, r$. Entonces si definimos,

$\tilde{f}(x_{r+1},\dots,x_n) = f(\tilde{g}_1(x_{r+1},\dots,x_n),\dots,\tilde{g}_r(x_{r+1},\dots,x_n),x_{r+1},\dots,x_n)$, los extremos relativos que estamos buscando son los de la función $\tilde{f}$.

Pero en ocasiones resulta complicado o no es posible despejar variables en función de otras en el sistema de ecuaciones 1, por lo que necesitamos otras técnicas para calcular esos extremos relativos condicionados. A continuación veremos el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver este tipo de problemas.

Teorema 2.7: Método de los multiplicadores de Lagrange

Sean $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $i=1,\dots,r$ con $r<n$ funciones de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de $a\in\mathbb{R}^n$. Definimos $g=(g_1,\dots,g_r):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^r$ y supongamos que $rang(Jg(a))=r$ y $g(a)=0$ ($g_i(a)=0\;\forall\, i=1,\dots,r$).
Si existen r números reales $\lambda_1,\dots,\lambda_r$, tales que a es un punto crítico de la función $L(x)=f(x)+\lambda_1 g_1(x)+\cdots+\lambda_r g_r(x)$, es decir $dL(a)\equiv 0$. Entonces a es un extremo relativo de f condicionado por $g(x)=0$ ($g_i(x)=0\;\forall\, i=1,\dots,r$), además si $\forall\, v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ con $v\in Ker f$, esto es, $\forall\, v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ con $Jg(a)\cdot v=0$, se verifica:

(1) $d^2L(a)(v)>0$, entonces f tiene un mínimo relativo condicionado en a.
(2) $d^2L(a)(v)<0$, entonces f tiene un máximo relativo condicionado en a.

Los números $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ reciben el nombre de multiplicadores de Lagrange.

2.2.1. Como calcular extremos relativos condicionados. Un proceso para calcular extremos relativos condicionados sería el siguiente:

Supongamos que queremos calcular los extremos relativos de $f(x,y,z)$, condicionados por $\begin{cases} g_1(x,y,z)=0\\ g_2(x,y,z)=0\end{cases}$, esto es, $g=(g_1,g_2):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ (aquí $r=2<3=n$), entonces podemos proceder como sigue:

(1) Se calculan los puntos críticos de la función
$L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda_1 g_1(x,y,z)+\lambda_2 g_2(x,y,z)$, esto es, los puntos que verifican $dL(x,y,z)\equiv 0$ y que cumplan las condiciones dadas al principio. Luego hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0\\ g_1(x,y,z)=0\\ g_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

Le hemos añadido las dos ultimas ecuaciones ya que son las condiciones que deben de cumplir los puntos, también observar que así obtenemos un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas $\{x,y,z,\lambda_1,\lambda_2\}$.

Supongamos que hemos obtenido el punto (a,b,c) como solución de x, y, z en el sistema de ecuaciones, es decir, que (a,b,c) es un punto crítico de L.

(2) Ahora tendremos que comprobar si (a,b,c) es un extremo relativo condicionado de f, esto es, tendremos que ver que $rang(Jg(a,b,c))=2$ (aquí $r=2$). Luego tendremos que calcular el rango de la matriz jacobiana de g en (a,b,c),

$$Jg(a,b,c)=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(a,b,c) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial g_1}{\partial x}(a,b,c)\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(a,b,c) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial g_2}{\partial x}(a,b,c)\end{pmatrix}$$

si resulta que $rang(Jg(a,b,c)) = 2$, luego tendremos que (a,b,c) es un extremo relativo condicionado. Entonces nos quedará por ver si es máximo o mínimo.

(3) Calculamos el núcleo de $dg(a)$, es decir los vectores $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $Jg(a,b,c) \cdot (v_1, v_2, v_3) = (0,0)$

(4) Para estos vectores (y sólo para estos) hay que ver el signo que tiene $d^2L(a,b,c)(v_1,v_2,v_3)$ con $(v_1, v_2, v_3) \neq (0,0,0)$

$$d^2L(a,b,c)(v_1,v_2,v_3) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(a,b,c) \cdot v_1^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a,b,c) \cdot v_2^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(a,b,c) \cdot v_3^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(a,b,c) \cdot v_1 v_2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(a,b,c) \cdot v_1 v_3 + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(a,b,c) \cdot v_2 v_3$$

$$\text{si } \forall\, (v_1,v_2,v_3) \in Ker(dg(a)) \text{ no nulo } \begin{cases} d^2L(a,b,c)(v_1,v_2,v_3) > 0 \Rightarrow (a,b,c) \text{ mínimo} \\ d^2L(a,b,c)(v_1,v_2,v_3) < 0 \Rightarrow (a,b,c) \text{ máximo} \end{cases}$$

Observación: A veces $d^2L(a,b,c)(v_1,v_2,v_3)$ tiene signo constante para todo vector $(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$ no nulo, entonces en este caso nos podemos saltar el paso (3) y calcular $d^2L(a,b,c)(v_1,v_2,v_3)\ \forall\, (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$ no nulo.

Ejemplo 2.8

Calcular los extremos relativos de $f(x,y,z) = x+y+z$ condicionados por $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x+y=1 \end{cases}$.

Siguiendo los pasos vistos en el proceso anterior, en este caso
$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2$ y $g_2(x,y,z) = x+y-1$

(1) $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z) \Rightarrow$

$$L(x,y,z) = x+y+z+\lambda_1(x^2+y^2+z^2-2)+\lambda_2(x+y-1)$$

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1+2\lambda_1 x+\lambda_2$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 1+2\lambda_1 y+\lambda_2$, $\dfrac{\partial L}{\partial z} = 1+2\lambda_1 z$, luego el sistema a resolver es

$$\begin{cases} 1+2\lambda_1 x+\lambda_2 = 0 \\ 1+2\lambda_1 y+\lambda_2 = 0 \\ 1+2\lambda_1 z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \\ x+y=1 \end{cases}$$

Si restamos las dos primeras ecuaciones nos queda
$2\lambda_1 x - 2\lambda_1 y = 0 \Rightarrow 2\lambda_1(x-y) = 0$ por tanto obtenemos que o bien $\lambda_1 = 0$ ó $x = y$.

Si $\lambda_1 = 0$, sustituyendo en la tercera ecuación nos queda $1 = 0$ que es absurdo, por lo que esta posibilidad queda descartada, por tanto $x = y$. Teniendo en cuenta esto último y sustituyendo en la última ecuación nos queda $x = y = \frac{1}{2}$. Para calcular z, despejando en la cuarta ecuación
$z = \pm\sqrt{2-x^2-y^2} = \sqrt{2-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Luego hemos obtenido los puntos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$. Pasamos a calcular los valores de λ_1 y λ_2.

Despejando en la tercera y luego en la segunda ecuación obtenemos $\lambda_1 = \frac{-1}{2z}$ y $\lambda_2 = -1 + \frac{1}{2z}$.

$$\begin{cases} \text{si } z = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1}{\sqrt{6}} \text{ y } \lambda_2 = \frac{-2-\sqrt{6}}{2} \\ \text{si } z = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ y } \lambda_2 = \frac{-2+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Las soluciones obtenidas son

(x,y,z)	(λ_1, λ_2)
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$	$(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2-\sqrt{6}}{2})$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2+\sqrt{6}}{2})$

(2) Ahora pasamos a ver si $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ son extremos relativos.

$$g = (g_1, g_2) \quad g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2 \quad g_2(x,y,z) = x+y-1$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial g_1}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial g_1}{\partial z} = 2z,\ \frac{\partial g_2}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial g_2}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial g_2}{\partial z} = 0$$

$Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Jg(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Jg(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

y como podemos ver fácilmente
$rang(Jg(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})) = rang(Jg(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})) = 2$, luego ambos puntos son extremos relativos condicionados.

Ejemplo 2.9

Nos queda por ver si son máximos o mínimos.

4. Calculamos $d^2L(x,y,z)$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2\lambda_1 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 0$$

$\Rightarrow d^2L(x,y,z)(v_1,v_2,v_3) = 2\lambda_1 v_1^2 + 2\lambda_1 v_2^2 + 2\lambda_1 v_3^2 = 2\lambda_1(v_1^2+v_2^2+v_3^2)$

Para $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}) \to \lambda_1 = \frac{-1}{\sqrt{6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})(v_1,v_2,v_3) = \frac{-2}{\sqrt{6}}(v_1^2+v_2^2+v_3^2) < 0 \ \forall\ (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$ no nulo, por tanto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ **es un máximo relativo condicionado**.

Para $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \to \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})(v_1,v_2,v_3) = \frac{2}{\sqrt{6}}(v_1^2+v_2^2+v_3^2) > 0 \ \forall\ (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$ no nulo, por tanto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ **es un mínimo relativo condicionado**.

Observar que en este caso no ha hecho falta el paso (3) ya que la d^2L conserva el signo para cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, luego a veces es conveniente hacer el paso (4) antes que el (3).

2.3. Cálculo de extremos absolutos en dominios compactos. Sea $D \in \mathbb{R}^n$ un dominio compacto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Por ser D compacto y f continua, ésta alcanza sus extremos absolutos en D, estos extremos o bien están en el interior de D, por lo que serán extremos relativos de f, o bien se encuentran en la frontera, por lo que serán extremos condicionados de f.

2.3.1. Como calcularlos: Supongamos que $D = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : g(x_1,\dots,x_n) \leq 0\}$, donde $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable:

(1) Calculamos los puntos críticos de f y nos quedamos con los puntos que pertenezcan a D (en este caso los que cumplan $g(x_1,\dots,x_n) \leq 0$).

(2) Calculamos los extremos condicionados de f en la frontera de D (en este caso condicionados por $g(x_1,\dots,x_n) = 0$).

De los puntos obtenidos en los pasos (1) y (2) el que nos de el mayor valor de la función será el máximo absoluto y el que nos de el menor valor será el mínimo absoluto.