Tema 4

Diferenciación de funciones de una y varias variables

1. Cálculo diferencial de funciones de una variable

Definición 1.1: Función derivable

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$, se dice que f es derivable en a si existe (y es finito)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{o} \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Sea $I \subset \mathbb{R}$ (un intervalo), se dice que f es derivable en I si lo es en todo punto de I.

Ejemplo 1.2

Comprobar que $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ es derivable en el punto $x = 2$ y calcular $f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(2+h)^2 - 3(2+h) + 1 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 5h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2h+5)}{h} = \lim_{h \to 0} 2h + 5 = 5 \ \Rightarrow \ f'(2) = 5$$

Observación. Interpretación geométrica de la derivada: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la derivada de f en el punto $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en dicho punto. Por tanto, la ecuación de esta recta tangente es:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Teorema 1.3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$, si f es derivable en a entonces f es continua en a.

El resultado recíproco no es cierto, es decir, que la continuidad no implica derivabilidad.

Ejemplo 1.4

Sabemos que la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero vamos a comprobar que no tiene derivada en este punto.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = -1 \\ \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = 1 \end{cases},$$

como vemos, los límites laterales no son iguales por lo que no existe el límite, por consiguiente, tampoco la derivada.

Definición 1.5: Derivadas laterales

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$:

(1) Se dice que f es derivable por la izquierda en a si existe

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{o} \quad f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(2) Se dice que f es derivable por la derecha en a si existe

$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{o} \quad f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Observación: $f(x) = |x|$ es derivable por ambos lados en $x = 0$, $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = 1$ (ver ejemplo)

Proposición 1.6

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$, f es derivable en a si y sólo si existen las dos derivadas laterales y estas son iguales, $f'(a^-) = f'(a^+)$.

Definición 1.7: Función derivada y derivadas sucesivas

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en I, se define la función derivada de f, o simplemente derivada de f, como aquella función que a cada punto $a \in I$ le hace corresponder el punto $f'(a)$.

$$\begin{array}{cccc} f': & I & \to & \mathbb{R} \\ & a & \mapsto & f'(a) \end{array}, \quad f'(x)$$

Si a su vez, la función $f' : I \to \mathbb{R}$ es derivable, llamaremos derivada segunda de f a la derivada de su derivada, $f''(x) = (f')'(x)$. Así podemos definir la derivada n-ésima de f como la derivada de la $(n-1)$-ésima derivada de f, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$.

Ejemplo 1.8

Sea $f(x) = x^2 + 1$, calcular $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2xh}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = \lim_{h\to 0} h + 2x = 2x \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x.$$

Definición 1.9: Función derivada y clase de una función

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que f es de clase $\mathcal{C}^n$ en I, $f \in \mathcal{C}^n(I)$, si es n-veces derivable en I y su derivada n-ésima es continua en I.

f es de clase $\mathcal{C}^\infty(I)$, si admite derivada de cualquier orden.

2. Reglas de derivación

(1) $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)\ \forall\, k \in \mathbb{R}$
(2) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
(3) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$
(5) **Regla de la cadena:** $(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$
(6) **Derivadas de las funciones elementales:**

$f(x)$	$f'(x)$	-	$f(x)$	$f'(x)$
k	0	-	x^r	rx^{r-1}
e^x	e^x	-	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$	-	$\log_b x$	$\frac{1}{x\ln b}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	-	$\operatorname{arc\,sen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	-	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	-	$\operatorname{arc\,tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x$	-	$\operatorname{argSh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x$	-	$\operatorname{argCh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Th} x$	$\frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}$	-	$\operatorname{argTh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

(7) **Derivada de la función inversa:** $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ Vamos a obtener la derivada del $\operatorname{arc\,sen} x$.

$f(x) = \operatorname{sen} x \quad f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x$

$f'(x) = \cos x \;\Rightarrow\; f'(f^{-1}(x)) = \cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)} =$
$= \sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow\; (\operatorname{arc\,sen} x)' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(8) **Derivación logarítmica:**

Para calcular la derivada de $y = f(x)^{g(x)}$ cogemos logaritmos a ambos lados de la igualdad

$$\ln y = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) \;\Rightarrow\; \ln y = g(x)\ln(f(x))$$

ahora derivamos ambas miembros de la igualdad

$$\frac{y'}{y} = g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \;\Rightarrow\; y' = y\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \Rightarrow$$

$$y' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Calcular la derivada de $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

Cogiendo logaritmos $\ln y = \cos x \ln(\operatorname{sen} x)$, derivando

$\dfrac{y'}{y} = -\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) + \cos x \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \;\Rightarrow\; y' = y\left(-\operatorname{sen} x\ln(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x\right) \Rightarrow$

$$y' = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left(-\operatorname{sen} x\ln(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x\right) = (\operatorname{sen} x)^{1+\cos x}(1 - \ln(\operatorname{sen} x))$$

3. CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

3.1. Derivadas parciales. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de varias variables reales. Consideremos la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, se define la i-ésima derivada parcial de f en $a \in \mathbb{R}^n$ como:

$$D_i f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$$

Esta derivada también se suele expresar como $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $D_{x_i} f(a)$ o $f_{x_i}(a)$.

$$\text{Si } a = (a_1, \ldots, a_n) \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

Observar que lo que estamos haciendo para calcular la i-ésima derivada parcial, es fijar todas las variables menos la i-ésima, y hacer una derivada normal respecto a esta coordenada.

Sea, pues, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función que se obtiene de f fijando todas las variables menos la i-ésima, $\varphi(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(a_i + h) - \varphi(a_i)}{h} = \varphi'(a_i)$$

Ejemplo 3.1

Calcular las derivadas parciales de la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy + y^2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(xy + y^2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x + 2y) \cos(xy + y^2)$$

Definición 3.2

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$, tal que $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se define la i-ésima derivada parcial de f en a como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \right)$$

3.2. Diferencial de una función. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que f es diferenciable en a si existen todas las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $\forall\, i, j$ y estas son continuas en a.

Se define la diferencial de f en a como la aplicación lineal $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cuya matriz, respecto a las bases canónicas, es

$$df(a) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}_{m \times n}$$

A esta matriz se le denomina **matriz jacobiana de f en** a y la vamos a denotar por $Jf(a)$ o, cometiendo un abuso de notación, $df(a)$. Si $n = m$ esta matriz es cuadrada, por lo que podemos calcular su determinante, a éste le llamaremos **jacobiano de** f **en** a y lo denotaremos por $|Jf(a)|$, $det(Jf(a))$ o $\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a)$.

Ejemplo 3.3

Sea $f(x,y,z) = (x^2 + y\cos z, y^2 + 2x \operatorname{sen} z)$, calcular la matriz jacobiana de $f$en el punto $(1,1,0)$.
$f = (f_1, f_2)$, $\quad f_1(x,y,z) = x^2 + y\cos z$, $\quad f_2(x,y,z) = y^2 + 2x \operatorname{sen} z$

$$\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x & \frac{\partial f_1}{\partial y} = \cos z & \frac{\partial f_1}{\partial z} = -y \operatorname{sen} z \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2\operatorname{sen} z & \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y & \frac{\partial f_2}{\partial z} = 2x\cos z \end{matrix} \Rightarrow Jf(x,y,z) \equiv \begin{pmatrix} 2x & \cos z & -y\operatorname{sen} z \\ 2\operatorname{sen} z & 2y & 2x\cos z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Jf(1,1,0) \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

3.3. Derivadas direccionales y gradiente. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1,\ldots,f_m)$, una función diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$, si $v \in \mathbb{R}^n$ se define la derivada de f en el punto a, en la dirección de v como:

$$D_v f(a) = df(a)(v) = Jf(a)\cdot v$$

Si consideramos como dirección a $v = e_i$, el i-ésimo vector de la base canónica, se comprueba fácilmente que $D_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a),\ldots,\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a)\right)$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\Rightarrow\; df(a) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \;\cdots\; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$, en este caso también se suele utilizar la notación:

$$df(a) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n$$

Si $v = (v_1,\ldots,v_n) \;\Rightarrow\; D_v f(a) = df(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot v_n =$
$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)\cdot(v_1,\ldots,v_n)$

Al vector $\overrightarrow{\nabla f}(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ se le denomina **gradiente de** f **en** a. Utilizando esta última notación podemos escribir que $D_v f(a) = \overrightarrow{\nabla f}(a)\cdot v = df(a)(v)$.

3.4. Aplicaciones geométricas de las derivadas parciales.

3.4.1. Vector tangente a una curva. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable, $\alpha(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$, $\alpha'(t) = \dfrac{d\alpha}{dt}(t) = (x_1'(t),\ldots,x_n'(t))$.

Sea $t_0 \in I$, entonces el vector tangente a la curva α en el punto $\alpha(t_0)$ es $\alpha'(t_0)$. Por tanto la recta tangente a la curva α en $\alpha(t_0)$ es $r_{t_0} \equiv \alpha(t_0) + \lambda\alpha'(t_0)$ (ecuación vectorial).

3.4.2. Plano tangente a una superficie.

(1) Sea $\varphi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo punto de A. Sea $S \in \mathbb{R}^3$ la superficie dada por:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \varphi(x,y),\ (x,y) \in A\}$$

Entonces el plano tangente a la superficie S en el punto (x_0,y_0,z_0) es:
$(z_0 = \varphi(x_0,y_0))$

$$z - z_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

(2) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo punto de A y tal que $\overrightarrow{\nabla f}(a) \neq 0 \; \forall \; a \in A$. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada, en forma implícita, por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = k\} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Entonces el plano tangente a la superficie S en el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

equivalente a $\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x_0, y_0, z_0) = 0$.

Observar que si una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ viene definida implícitamente por la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($f(x, y, z) = k$), entonces $\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0)$ es el vector normal al plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0).

3.5. La diferencial de una composición. Regla de la cadena.

Teorema 3.4

Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ tales que tenga su sentido su composición, es decir, que $Im\, f \subset Dom\, g$. Entonces si f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ y g es diferenciable en $f(a)$, la función $g \circ f$ es diferenciable en a y se tiene que

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

Así, la matriz jacobiana será:

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a)$$

Corolario 3.5

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con funciones coordenadas $f = (f_1, \dots, f_m)$ y tomamos como variables $(x_1, \dots, x_n)$ $(f(x_1, \dots, x_n))$. Sea $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tomando como variables $(u_1, \dots, u_m)$ $(g(u_1, \dots, u_m))$. Sea $F = g \circ f$, esto es,

$$F(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

entonces las derivadas parciales de F vienen dadas por:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \; \forall \; i = 1, \dots, n$$

Por tanto si tenemos una función $f(u_1, \dots, u_m)$ donde las variables u_i dependen de $(x_1, \dots, x_m)$, esto es, $u_i = u_i(x_1, \dots, x_n)$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \; \forall \; i = 1, \dots, n$$

Ejemplo 3.6

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)$. Si hacemos el cambio a coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$, calcular $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} \qquad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Ejemplo 3.7

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ donde $H(x,y)=\dfrac{x}{y}$, sea $F=f\circ H$, calcular $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

$F(x,y) = f\circ H(x,y) = f(H(x,y)) = f(\frac{x}{y}) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{y}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y} = f'(\frac{x}{y})\cdot\frac{-x}{y^2} = -\frac{x}{y^2}\cdot f(\frac{x}{y})$

3.6. Derivadas parciales de orden superior. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, si f tiene derivadas parciales continuas, estos es, si existen las funciones $D_i f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y son continuas para $i=1,\dots,n$, podemos plantearnos, para cada una de ellas, el cálculo de sus derivadas parciales, obteniéndose así las derivadas parciales segundas de f en un punto $a\in\mathbb{R}^n$. Se representa por

$$\begin{array}{rccc} D^2_{ij}f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & a & \mapsto & D^2_{ij}f(a) \end{array}$$

y significa que primero derivamos respecto a la variable x_i, y después respecto a la x_j, es decir, $D^2_{ij}f(a) = D_j(D_i f)(a)$, también se representa como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$$

Si iteramos este proceso, podemos obtener derivadas parciales sucesivas de la función f. Así, por ejemplo $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}$ es la derivada de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ respecto de x_k.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)$$

Cuando una función f tenga las derivadas k-ésimas parciales continuas, diremos que f es de clase $\mathcal{C}^k$.

Teorema 3.8: Schwarz

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $D_i f$ y $D_j f$ son continuas, si $D^2_{ij} f$ existe y es continua en $a \in \mathbb{R}^n$, entonces $D^2_{ji} f$ existe y además:

$$D^2_{ij} f(a) = D^2_{ji} f(a) \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \right)$$

Observación: Este teorema nos viene a decir, que si existe una derivada parcial sucesiva del orden que sea, no importa el orden en el que derivemos. El teorema de Schwarz es válido para derivadas sucesivas de cualquier orden, así por ejemplo:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \cdots$$

Ejemplo 3.9

Calcular todas las derivadas parciales sucesivas hasta de segundo orden de la función $f(x, y) = (x + 2y)\ln(x^2 + 2xy)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(x^2 + 2xy) + \frac{2(x+y)}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\ln(x^2 + 2xy) + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x^3 - 4y^2}{x^3 + 2x^2 y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4x + 4y}{x^2 + 2xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4}{x + 2y}$$

3.6.1. Matriz Hessiana. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$, llamaremos matriz Hessiana de f en el punto a a la matriz de las derivadas parciales de segundo orden:

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{n \times n} \qquad Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$$

Si f es de clase $\mathcal{C}^2$, entonces en virtud del teorema de Schwarz, podemos afirmar que la matriz Hessiana es simétrica. Por tanto, esta matriz nos define una aplicación bilineal simétrica, que es lo que se conoce como diferencial segunda de f.

$$\begin{array}{rccl} D^2 f(a) : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \mapsto & D^2 f(a)(u, v) = u^T \cdot Hf(a) \cdot v \end{array}$$

$$D^2 f(a) := d^2 f(a) := \frac{d^2 f}{dx^2}(a) := f''(a)$$

Si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$, entonces

$$d^2 f(a)(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot u_i \cdot v_j$$

Toda forma bilineal simétrica define una forma cuadrática

$$d^2f(a)(u) = d^2f(a)(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot u_i \cdot u_j$$

La forma cuadrática $d^2f(a)(u)$ es lo que más utilizaremos, por abuso de lenguaje, como diferencial segunda. Esta forma cuadrática juega un papel importante en el cálculo de los extremos relativos.

Ejemplos 3.10

(1) Si $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)$, y $u=(u_1,u_2)$, entonces:

$$d^2f(a)(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot u_1 \cdot u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot u_2^2$$

(2) Si $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z)$, y $u=(u_1,u_2,u_3)$, entonces:

$$d^2f(a)(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)u_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)u_1u_2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a)u_1u_3+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)u_2^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a)u_2u_3+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)u_3^2$$