UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniería de Edificación 1^0

Ejercicios de Matemática Aplicada

Límites y continuidad de funciones

1. Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x-8}}{\ln(x^2-3)} \quad b) f(x) = \frac{\arccos(e^{x^2-1})}{\operatorname{sen}(x+1)} \quad c) f(x,y,z) = x\ln(yz)$$

$$d) f(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2-1}, \frac{xy}{x^2+y^2-4}\right) \quad e) f(x,y) = \cos\left(\frac{1}{x^2-y^2}\right)$$

$$f) f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} \quad g) f(x,y,z) = \left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2-4}, \ln(x^2+y^2+z^2-1)\right)$$

2. Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$a) \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-3}-x \quad b) \lim_{x\to 0} \frac{4x-3x^2}{3x+x^2} \quad c) \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$$

$$d) \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \quad e) \lim_{x\to 0} \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}$$

$$f) \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \quad g) \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x} \quad h) \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+2^{\tan x}}$$

3. Calcular los siguientes límites utilizando infinitésimos equivalentes:

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)} \quad b) \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad c) \lim_{x\to a} \frac{e^x-e^a}{x-a}$$

$$d) \lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} \quad e) \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} \quad f) \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}[\tan(\operatorname{sen}(x-1))]}{\operatorname{sen}[\tan(x-1)]}$$

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones y donde presenten una discontinuidad indicad de que clase es:

$$a) f(x) = \begin{cases} \cos(x-\pi), & \text{si } -\pi \le x \le 0, \\ 3^{\frac{1}{x}}, & \text{si } 0 < x \le 4, \\ \ln(x-4), & \text{si } 4 < x \le 10, \\ \frac{4}{x-10}, & \text{si } x > 10 \end{cases} \qquad b) f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x}, & \text{si } x \ne 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$$

5. La función $f(x) = \frac{x^2-2x+n}{x^3+mx^2-14x}$ presenta en $x = 2$ una discontinuidad evitable. Hallar m y n y clasificar las demás discontinuidades de f.

6. Hallar la relación existente entre a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{x}, & \text{si } x > 0, \\ ax + b, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

7. Calcular el valor de a, de ser posible, para que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ a, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

8. Hallar los valores de a y b, de ser posible, para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a, & \text{si } x < -3, \\ ax + b, & \text{si } -3 \leq x \leq 3, \\ b - 5x, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

9. Dada la ecuación $x^3+5x^2-10 = 0$, encontrar tres intervalos cerrados disjuntos de forma que en el interior de cada uno de ellos haya una raíz de la ecuación.

10. Demuestra que la ecuación $x \cdot \cos\frac{x}{2} + 15 \operatorname{sen} x = 0$ tiene alguna raíz real.

11. Sea $g(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 + 2$, probar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(c) = -1$.

    ¿Qué Teorema usas en la resolución del ejercicio?

12. Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \quad b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad c) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{5}}}$$

$$d) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad e) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \quad f) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

$$g) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4+y^5}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

    Nota: Usa en algún apartado el paso a coordenadas polares.

13. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad b) f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$c) f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^4+y^4+2x^2y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

14. Calcular k, si es posible, para que las siguientes funciones sean continuas:

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(y+1)-y(x-y)}{x^2-xy+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ k, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad b) f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ k, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$c) f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ k, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$