Tema 2

Aplicaciones lineales y diagonalización de matrices

1. Aplicaciones lineales

Definición 1.1

Sean V y V' dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Una aplicación $f : V \to V'$ se dice que es lineal, o un homomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, si $\forall\, u, v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ cumple:

(1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$
(2) $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$

Observaciones:

- $f(0) = 0$
- $f(-u) = -f(u)$
- $f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$, en general $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot f(u_i)$
- A una aplicación lineal $f : V \to V$ se le denomina endomorfismo.

Ejemplos 1.2

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = m \cdot x$ es lineal, veamos que cumple las dos condiciones:
  (1) $f(x+y) = m(x+y) = mx + my = f(x) + f(y)$.
  (2) $f(\lambda x) = m\lambda x = \lambda \cdot mx = \lambda f(x)$.
- $f : V \to V'$, $f(u) = 0 \;\forall\, u \in V$ es lineal y recibe el nombre de aplicación nula.
- $I_V : V \to V$, $I(u) = u \;\forall\, u \in V$ es lineal y recibe el nombre de identidad.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y, 2x-y, 6x+y)$ es lineal:
  (1) $f((u_1,u_2) + (v_1,v_2)) = f(u_1+v_1, u_2+v_2) =$
  $= (u_1+v_1+u_2+v_2, 2(u_1+v_1) - (u_2+v_2), 6(u_1+v_1) + u_2 + v_2) =$
  $= (u_1+u_2, 2u_1 - u_2, 6u_1 + u_2) + (v_1+v_2, 2v_1 - v_2, 6v_1 + v_2) =$
  $= f(u_1,u_2) + f(v_1,v_2)$.
  (2) $f(\lambda(x,y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x - \lambda y, 6\lambda x + \lambda y) =$
  $= \lambda(x+y, 2x-y, 6x+y) = \lambda f(x,y)$.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2+y, 2x-y^2)$ no es lineal ya que no cumple la primera propiedad:
  $f((2,1)+(1,2)) = f(3,3) = (12,-3) \neq f(2,1) + f(1,2) = (5,3) + (3,-2) =$
  $= (8,1)$

Observaciones:

- Si $f, g : V \to V'$ son aplicaciones lineales, entonces $f+g$ y $\lambda \cdot f$ son aplicaciones lineales. $(f+g)(u) = f(u) + g(u) \qquad (\lambda \cdot f)(u) = \lambda \cdot f(u)$.
- Si $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ son aplicaciones lineales entonces $g \circ f : V \to V''$ es una aplicación lineal.

- Se dice que una aplicación lineal $f : V \to V'$ tiene inversa si existe una única aplicación $g : V' \to V$ tal que $f \circ g = I_{V'}$ y $g \circ f = I_V$, en este caso se dice que g es la inversa de f y se denota por f^{-1}.

Proposición 1.3

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, entonces:

- Si $U \leq V \;\Rightarrow\; f(U) \leq V'$.
- Si $U' \leq V' \;\Rightarrow\; f^{-1}(U') \leq V$. $\qquad (f^{-1}(U') = \{v \in V : f(v) \in U'\})$

Definición 1.4: Núcleo e imagen

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales, se define:

- El núcleo de f, $\ker f = \{v \in V : f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$
- La imagen de f, $f = \{v' \in V : \exists\, v \in V$ con $f(v) = v'\} = f(V)$

El $\ker f \leq V$ es un subespacio de V y la $f \leq V'$ es un subespacio de V'.

Definición 1.5

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales:

- Se dice que f es **inyectiva**, o un monomorfismo, si para cualquier par de vectores $u, v \in V$ con $f(u) = f(v)$ se tiene que $u = v$, es decir dos vectores distintos no pueden tener la misma imagen.
- Se dice que f es sobreyectiva, o un epimorfismo, si para cualquier vector $v' \in V\; \exists\, v \in V$ tal que $f(v) = v'$, es decir que todo elemento de V' tiene antiimagen.
- Se dice que f es biyectiva, o un epimorfismo, si es inyectiva y sobreyectiva. f es un isomorfismo si y sólo si tiene inversa.

isomorfismo=monomorfismo+epimorfismo

Proposición 1.6

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales:

- f es monomorfismo $\Leftrightarrow\; \ker f = \{0\} \;\Leftrightarrow\; \dim V = \dim(f)$.
- f es epimorfismo $\Leftrightarrow\; f(V) = f = V' \;\Leftrightarrow\; \dim(f) = \dim V'$.
- $\dim V = \dim(\ker f) + \dim(f)$.
- f es un isomorfismo $\Leftrightarrow\; \dim V = \dim(f) = \dim V'$.
- Si $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V entonces $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ es un sistema generador de f.

Corolario 1.7

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales tales que $\dim V = \dim V'$, entonces son equivalentes:

- f es un isomorfismo.
- f es un monomorfismo.
- f es un epimorfismo.

Ejercicio 1.1.

(1) Calcular la f y el $\ker f$ donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y - z, x + y + z)$.

Para calcular el $\ker f$ tenemos que determinar los vectores cuya imagen sea nula, los cuales serán los que cumplan la ecuación $f(x, y, z) = (0, 0)$ o lo que es lo mismo el sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ cuya solución paramétrica es $(\lambda, -\lambda, 0)$. Por tanto $\ker f = \{(\lambda, -\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\} =< (1, -1, 0) >$.

Para determinar la f, teniendo en cuenta el tercer apartado de la proposition , $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(f) + \dim(\ker f) = \dim(f) + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim(f) = 2$ y como $f \leq \mathbb{R}^2 \Rightarrow f = \mathbb{R}^2$.

(2) Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x - y, x - y)$ comprobar que es un isomorfismo y calcular su aplicación inversa f^{-1}.

Teniendo en cuenta el corolario , bastará con ver que f es un monomorfismo y lo es ya que el $\ker f = \{0\}$ debido a que la solución del sistema $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ es $(0, 0)$.

Para calcular f^{-1} resolvemos el sistema $\begin{cases} 2x - y = u \\ x - y = v \end{cases}$ cuya solución, $x = u - v$ e $y = u - 2v$, nos da la expresión, en las variables (u, v), de la función inversa, $f^{-1}(u, v) = (u - v, u - 2v)$.

1.1. Matriz asociada a una aplicación lineal. En esta sección realizaremos una serie de cálculos donde a partir de una aplicación lineal obtendremos una matriz (matriz asociada), la cual nos servirá para determinar la imagen de cualquier vector.

Sean $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales y
$\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dos bases de V y V' respectivamente.

Sea $u \in V$ tal que $[u]_\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_m)$ y $[f(u)]_{\mathcal{B}'} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Vamos a ver la relación existente entre $(x_1, \ldots, x_m)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$:

$$[u]_\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_m) \Rightarrow u = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot u_j \Rightarrow f(u) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot f(u_j)$$

Supongamos que $[f(u_j)]_{\mathcal{B}'} = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \Rightarrow f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot v_i$

$$f(u) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot f(u_j) = \sum_{j=1}^{m} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_j a_{ij} \right) \cdot v_i$$

$[f(u)]_{\mathcal{B}'} = (y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow f(u) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i$ y se acaba de obtener otra expresión de $f(u)$ como c. l. de los v_i, $f(u) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_j a_{ij} \right) \cdot v_i$, y como la c. l. ha de ser única por ser $\mathcal{B}'$ una base, se ha de cumplir que $y_i = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j a_{ij}\ \forall\ i = 1, \dots, n$, igualdad que en forma matricial queda:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

A la matriz anterior, de orden $n \times m$, se le denomina matriz asociada a la aplicación f respecto de la bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ la cual denotamos por $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$. Esta matriz tiene como columnas las coordenadas, en la base $\mathcal{B}'$, de cada una de las imágenes de los vectores de la base $\mathcal{B}$.

Observación: La matriz asociada a la aplicación identidad respecto a dos bases iguales es la matriz identidad, pero si consideramos dos bases distintas es la matriz de paso de ambas bases.

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(I_V) = I_n \qquad\qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(I_V) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Ejercicio 1.2. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
$f(x, y, z) = (3x - 2y + z, 4x - z, 3x - 6z, 2x + y - 3z)$, calcular la matriz asociada de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

La matriz es aquella cuyas columnas son la imagen de $f(1, 0, 0) = (3, 4, 3, 2)$, $f(0, 1, 0) = (-2, 0, 0, 1)$ y $f(0, 0, 1) = (1, -1, -6, -3)$,

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Proposición 1.8

Sean $f, g : V \to V'$ y $h : V' \to V''$ tres aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, donde $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ son bases de V, V' y V'' respectivamente:

- $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f + g) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) + M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(g)$.
- $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.
- $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(h \circ f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(h) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$.
- Si f es un isomorfismo entonces $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)\right)^{-1}$.

Proposición 1.9

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales y sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ la matriz de f respecto de dos bases cualesquiera, entonces: ($\dim V = m \quad \dim V' = n$)

- $\dim(f) = \text{rang}(A)$. $\quad (f =<$ columnas de $A >)$
- $\dim(\ker f) = m - \text{rang}(A)$.
- f monomorfismo $\Leftrightarrow\ \text{rang}(A) = m$
- f epimorfismo $\Leftrightarrow\ \text{rang}(A) = n$
- f isomorfismo $\Leftrightarrow\ A$ es cuadrada y regular $\Leftrightarrow\ n = m = \text{rang}(A)$.

Proposición 1.10

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales donde $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de V y $\mathcal{B}'_1$ y $\mathcal{B}'_2$ de V', entonces:

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}'_2}(f) = P_{\mathcal{B}'_1}^{\mathcal{B}'_2} \cdot M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}'_1}(f) \cdot P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$$

Proposición 1.11

Dos matrices $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ son equivalentes si y sólo si son matrices asociadas a una misma aplicación lineal respecto de algunas bases.

Ejercicio 1.3. Consideremos las bases $\mathcal{B} = \{(2,-1),(1,1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(-1,2,0),(3,1,1),(0,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-10}{3} & \frac{7}{3} \\ 2 & -1 \\ \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

2. Diagonalización de matrices

Definición 2.1: Matrices semejantes

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, diremos que A es semejante a B, $A \sim_s B$, si existe una matriz regular $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Observación: Dos matrices semejantes son equivalentes, pero si son equivalentes no tienen por que ser semejantes.

Proposición 2.2

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ y V un espacio vectorial de dimensión n, entonces A es semejante a B si y sólo si existen bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de V y un endomorfismo $f : V \to V$ de modo que $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ y $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$.

Definición 2.3: Polinomio característico

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, se denomina polinomio característico de A al polinomio, de grado n,

$$\mu_A(x) = \det(A - x \cdot I_n)$$

Ejemplo 2.4

Vamos a calcular el polinomio característico de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\mu_A(x) = \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 3 \\ 2 & 3-x & -1 \\ 2 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3+2x^2+9x-18$$

Proposición 2.5

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, si A y B son semejantes entonces $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

Definición 2.6

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo del espacio vectorial V, se denomina polinomio característico de f al polinomio característico de cualquier matriz A asociada a f respecto de cualquier base $\mathcal{B}$ de V.

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \qquad \mu_f(x) = \mu_A(x)$$

Definición 2.7: Valor propio

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo del espacio vectorial V ($A \in M_n(\mathbb{R})$), se dice que λ es un valor propio o autovalor de f (A) si existe $v \in V$ no nulo tal que $f(v) = \lambda \cdot v$ ($A \cdot v = \lambda \cdot v$), a este vector se le denomina vector propio o autovector de f (A) asociado al valor propio λ.

Proposición 2.8

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, entonces λ es un valor propio de A si y sólo si λ es una raíz de $\mu_A(x)$. Por tanto A tiene a lo sumo n valores própios.

Proposición 2.9

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo del espacio vectorial V, λ un valor propio de V y $S(\lambda) = \{v \in V : f(v) = \lambda \cdot v\}$ el conjunto de todos los vectores propios de f asociados a λ. Entonces $S(\lambda)$ es un subespacio de V, el cual recibe el nombre de subespacio propio asociado a λ. Además $S(\lambda) = \ker(f - \lambda \cdot I_V)$.

Proposición 2.10

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo del espacio vectorial V, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios distintos de f y $v_i \in S(\lambda_i)$ no nulo $\forall\ i = 1, \ldots, r$, entonces el conjunto $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es linealmente independiente.

Además $\forall\ i = 1, \ldots, p$, si μ_i es la multiplicidad de λ_i como raíz de $\mu_f(x)$ entonces $1 \leq \dim(S(\lambda_i)) \leq \mu_i$.

Definición 2.11: Matriz diagonalizable

- Diremos que una matriz $D \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonal si los elementos que no están en la diagonal principal son nulos.

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

- Diremos que una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. ($D = P^{-1} \cdot A \cdot P$)
- Diremos que un endomorfismo $f : V \to V$, del espacio vectorial V, es diagonalizable si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ es diagonal. (Si cualquiera de las matrices asociadas a una base es diagonalizable).

Proposición 2.12

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo del espacio vectorial V, entonces f es diagonalizable si y sólo si existe una base en V formada por vectores propios de f.

Observación: Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable, entonces A es semejante a la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ donde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ son los vectores propios de A. Además existe una base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ donde u_i es un vector propio asociado a λ_i $\forall\, i = 1, \ldots, n$. Esta base esta formada por las bases de los diferentes subespacios propios de A.

Como $A \sim_s D$ existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ o $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, pues es sencillo comprobar que esta matriz P es aquella cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}$, es decir, los vectores propios de A. La matriz P recibe el nombre de matriz de paso.

Teorema 2.13: De diagonalización

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son los valores propios distintos de A y μ_i la multiplicidad de cada uno de ellos como raíz de $\mu_A(x)$, entonces:

$$A \text{ es diagonalizable } \Leftrightarrow \dim(S(\lambda_i)) = \mu_i \;\forall\, i = 1, \ldots, r \text{ y } \mu_1 + \cdots + \mu_r = n$$

Corolario 2.14

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

Ejercicio 2.1. Comprobar si son o no diagonalizables las siguientes matrices y, en caso de serlo, calcular la matriz diagonal D y la matriz de paso P:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A) Para comprobar la diagonalización lo primero que debemos es hallar el polinomio característico y calcular sus raíces que serán los valores propios de A.

$\mu_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 0 & -1 \\ 0 & 3-x & 0 \\ -1 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = (3-x)(x^2-8x+15) = (x-3)^2(5-x)$, sus raíces son $\lambda_1 = 3$, que es doble, y $\lambda_2 = 5$ que es simple. Por tanto A será diagonalizable si $2 = \dim(S(3)) = \dim(\ker(A-3I_3))$.

$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1,

$\dim(\ker(A-3I_3)) = 3 - \mathrm{rang}(A-3I_3) = 2$, en consecuencia A es diagonalizable.

Una vez que sabemos que es diagonalizable, para hallar una matriz de paso P debemos de encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A y esta la podemos formar con una base del $\ker(A-3I_3)$ y otra del $\ker(A-5I_3)$.

$(x,y,z) \in \ker(A-3I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = z \Leftrightarrow (x,y,z) = (\alpha, \beta, \alpha) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ker(A-3I_3) =< (1,0,1), (0,1,0) >$

$(x,y,z) \in \ker(A-5I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (\alpha, 0, -\alpha) = \alpha(1,0,-1) \Rightarrow \ker(A-5I_3) =< (1,0,-1) >$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Nota: el orden en que coloquemos los vectores (columna) en P ha de ser el mismo en que coloquemos los valores propios en la matriz diagonal D.

B) $\mu_B(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-3x) = (1-x)x(x-3)$, sus raíces son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$, todas ellas simples, por lo que B es diagonalizable.

$(x,y,z) \in \ker(B - 0I_3) = \ker B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x - y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow (x,y,z) = (\alpha,\alpha,\alpha) = \alpha(1,1,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ker B =< (1,1,1) >$.

$(x,y,z) \in \ker(B - 1I_3) =\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (\alpha, 0, -\alpha) = \alpha(1,0,-1) \Rightarrow \ker(B - I_3) =< (1,0,-1) >$.

$$(x,y,z) \in \ker(B-3I_3) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (\alpha,-2\alpha,\alpha) = \alpha(1,-2,1) \Rightarrow \ker B =< (1,-2,1) >.$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

C) $\mu_C(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & 2-x & 1 \\ -1 & -1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-2x+1) = (x-1)^3$, su única raíz es $\lambda = 1$ que es triple, por tanto B será diagonalizable si
$3 = \dim(S(1)) = \dim(\ker(C-I_3))$.

$$C - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ que tiene rango } 1,$$

$\dim(\ker(C-I_3)) = 3 - \operatorname{rang}(C-I_3) = 2 \;\Rightarrow\; C$ no es diagonalizable.

Proposición 2.15

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{N}$.

- Si A es diagonalizable $\Rightarrow\; \alpha \cdot A$, A^T y A^r son diagonalizables.
- Si A es regular y diagonalizable $\Rightarrow\; A^{-1}$ es diagonalizable.
- Si A y B son diagonalizables $\not\Rightarrow\; A+B$ o $A \cdot B$ sean diagonalizables.
- La única matriz diagonalizable con un único valor propio λ (multiplicidad n) es $\lambda \cdot I_n$.

Ejercicio 2.2. Estudiar para que valores del parámetro a es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 2a \\ 1 & a & 2 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$$

$\mu_A(x) = \begin{vmatrix} 2a-x & 0 & -2a \\ 1 & a-x & 2 \\ -a & 0 & -a-x \end{vmatrix} = (a-x)(x^2-ax) = -x(x-a)^2$, sus raíces son $\lambda_1 = 0$, y $\lambda_2 = a$, las multiplicidades dependerán del valor que tome a.

Si $a = 0$, habría un único valor propio $\lambda = 0$ y A no sería diagonalizable ya que $A \neq 0$.

Si $a \neq 0$, tenemos dos valores propios $\lambda_1 = 0$ simple y $\lambda_2 = a$ doble, por tanto A será diagonalizable si $\dim(\ker(A - aI_3)) = 2$.

$$A - aI_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 1 & 0 & 2 \\ -a & 0 & -2a \end{pmatrix} \text{ que tiene rango } 1,$$

$\dim(\ker(A-aI_3)) = 3 - \operatorname{rang}(A-aI_3) = 2 \;\Rightarrow A$ es diagonalizable.

Resumiendo A es diagonalizable si y sólo si $a \neq 0$.

Proposición 2.16

- Sean A, B y $P \in M_n(\mathbb{R})$, donde P es regular y además $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$, entonces $A^r = P \cdot B^r \cdot P^{-1} \; \forall \, r \in \mathbb{N}$.
- Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^r = \begin{pmatrix} \lambda_1^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^r \end{pmatrix} \; \forall \, r \in \mathbb{N}$.

Observación:
Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable, con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, si P es una matriz de paso, entonces:

$$A^r = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^r \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \quad \forall \, r \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 2.3. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, calcular la expresión de $A^n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$.

En el ejercicio 2.1 hemos visto que A es diagonalizable y hemos obtenido la matriz de paso y la diagonal:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = P \cdot D \cdot P^{-1} \Rightarrow A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n+5^n}{2} & 0 & \frac{3^n-5^n}{2} \\ 0 & 3^n & 0 \\ \frac{3^n-5^n}{2} & 0 & \frac{3^n+5^n}{2} \end{pmatrix}$$