UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Asignatura: MATEMÁTICAS I

SEGUNDO PARCIAL

GRUPO A

CURSO 15-16

26 mayo 2016

ENUNCIADO Y RESUELTO

---

1. [0.5+1 PUNTOS] Resolver los siguientes apartados:

a. Calcular el área de la superficie de revolución (área lateral) obtenida al girar la curva $y = x^3$, con $-1 \le x \le 1$, alrededor del eje OX. (NOTA: El área de una superficie de revolución obtenida al girar la curva $y = f(x)$ alrededor de OX, en $[a,b]$, viene dada por $A_{OX} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$)

b. Justificar que se verifica

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$$

y calcular el valor de una de ellas.

SOLUCIÓN:

(1.a) Como la curva es impar, calcularemos el área superficial obtenida al integrar en $[0,1]$ y multiplicamos el resultado por 2. Así

$$A_{OX} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\cdot 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx = 4\pi\left(\frac{5}{27}\sqrt{2}\sqrt{5} - \frac{1}{54}\right)$$

(la integral es inmediata al ir multiplicando la derivada del radicando).

(1.b) Si resolvemos la integral primera por partes (tomando $u = e^{-x}$, $dv = \cos x dx$; de donde $du = -e^{-x}dx$, $v = \sin x$), se tendrá que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = [e^{-x}\sin x]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$$

y si nos fijamos en el valor que se obtiene del sumando ya integrado

$$[e^{-x}\sin x]_0^{+\infty} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x - e^{-0}\sin 0 = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{e^x} - 0 = 0 - 0 = 0$$

(donde este límite se ha calculado teniendo en cuenta que el numerador está acotado y el denominador tiende a ∞), por lo que es cierto que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$$

Para calcular el valor de la integral, volvemos a aplicar partes a la segunda (con $u = e^{-x}$, $dv = \sin x dx$; de donde $du = -e^{-x}dx$, $v = -\cos x$), de donde

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx = [-e^{-x}\cos x]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$$

es decir

$$2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = [-e^{-x}\cos x]_0^{+\infty}$$

por lo que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = \frac{1}{2}[-e^{-x}\cos x]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}(-e^{-x}\cos x) + e^{-0}\cos 0\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

(el límite que aparece en esta igualdad se calcula de la misma forma que el anterior).

– –

2. [1.5 PUNTOS] Sea $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x,y,z) = (x+y)^4 + y^2(z+x)^3$$

siendo

$$x = r \cdot s \cdot e^{-t}; \qquad y = r \cdot s \cdot \log(1+t^2); \qquad z = r^2 \cdot s \cdot \cos t$$

Calcular, usando la regla de la cadena, ∇u, cuando $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$. (Nota: si no se usa la regla de la cadena, el ejercicio bien resuelto puntuará la mitad).

SOLUCIÓN:

Tenemos que

$$u(x,y,z) = u(x(r,s,t), y(r,s,t), z(r,s,t))$$

por lo que aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = \left(4(x+y)^3 + 3y^2(z+x)^2\right)se^{-t} +$$
$$+ \left(4(x+y)^3 + 2y(z+x)^3\right)s\log(1+t^2) + \left(3y^2(z+x)^2\right)2rs\cos t$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \left(4(x+y)^3 + 3y^2(z+x)^2\right)re^{-t} +$$
$$+ \left(4(x+y)^3 + 2y(z+x)^3\right)r\log(1+t^2) + \left(3y^2(z+x)^2\right)r^2\cos t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \left(4(x+y)^3 + 3y^2(z+x)^2\right)(-rse^{-t}) +$$
$$+ \left(4(x+y)^3 + 2y(z+x)^3\right)rs\frac{2t}{1+t^2} + \left(3y^2(z+x)^2\right)(-r^2 s\sin t)$$

Ahora solo tenemos que evaluar todas estas igualdades en el punto que nos piden, teniendo en cuenta que si $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$, entonces $(x,y,z) = (2,0,4)$. De esta forma

$$\frac{\partial u}{\partial r}(2,1,0) = 32 \cdot 1 + 32 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 32$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}(2,1,0) = 32 \cdot 2 + 32 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 32$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(2,1,0) = 32 \cdot (-2) + 32 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -64$$

– –

3. [0.5+1.5 PUNTOS] Resolver los siguientes apartados

a. Calcular y clasificar los puntos críticos de la función definida por

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$$

b. Calcular el máximo y el mínimo absoluto de la función anterior en el compacto

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 2,\ y \geq 0\right\}$$

SOLUCIÓN:

(3.a) Se trata de resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

De la 2da ecuación se obtiene que $y = 0$ o que $y = \frac{2x}{3}$. Entonces distinguimos:

- Si $y = 0$: Sustituyendo en la 1ª ec., resulta $3x^2 - 1 = 0$, de donde $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto, hemos obtenido los puntos críticos $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ y $B\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},0\right)$.
- Si $y = \frac{2x}{3}$: Sustituyendo en la 1ª ec., obtenemos $23x^2 = 9$, de donde $x = \pm\frac{3}{\sqrt{23}}$. Por tanto, hemos obtenido los puntos críticos $C\left(\frac{3}{\sqrt{23}},\frac{2}{\sqrt{23}}\right)$ y $D\left(\frac{-3}{\sqrt{23}},\frac{-2}{\sqrt{23}}\right)$.

Para clasificarlos, hemos de particularizar el hessiano en cada uno de ellos. Al ser

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -2y \\ -2y & 6y - 2x \end{vmatrix}$$

tendremos que

$$Hf(A) = -4 < 0;\ Hf(B) = -4 < 0;\ Hf(C) = 4 > 0;\ Hf(D) = 4 > 0$$

por lo que A y B son puntos de silla, C es mínimo relativo (ya que $f_{xx}(C) > 0$) y D es máximo relativo (ya que $f_{xx}(D) < 0$).

(3.b) Para calcular los extremos absolutos en un compacto, actuamos de la forma siguiente:

- Puntos críticos (o extremos) de $f(x,y)$ en el interior: Los hemos obtenido en el apartado anterior, y solamente el punto $C\left(\frac{3}{\sqrt{23}},\frac{2}{\sqrt{23}}\right)$ está en el interior de K.
- Puntos críticos de $f(x,y)$ en el eje X (con $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) : Basta con sustituir en la expresión de $f(x,y)$ la ecuación del eje X ($y = 0$), por lo que tendremos la función $f(x) = x^3 - x + 16$, cuyos puntos críticos se alcanzan en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto hemos obtenido de nuevo los puntos críticos $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ y $B\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},0\right)$ anteriores.
- Puntos críticos de $f(x,y)$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ (con $y \geq 0$): Hemos de aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, por lo que se trata de obtener los puntos críticos de la función

$$F(x,y,\lambda) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16 + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

es decir, hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - y^2 - 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2xy + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene que $y = 0$ (de donde $x = \pm\sqrt{2}$; es decir. se tienen los puntos críticos $E\left(\sqrt{2},0\right)$ y $F\left(-\sqrt{2},0\right)$, que en este caso coinciden con los vértices de la figura), o que $3y - 2x + 2\lambda = 0$. Despejando λ de esta última ecuación y también de la 1ra, e igualando ambos resultados se obtiene $5x^2-3xy-y^2=1$, que junto a $x^2+y^2=2$ nos da un sistema de 2 ec. con 2 inc., y resolviendo este sistema (inicialmente se obtiene la ec. bicuadrada $5x^4-6x^2+1=0$, que tiene por soluciones $x=\pm 1$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$). Así, obtenemos los puntos críticos $G(1,1)$, $H(-1,1)$, $I\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ y $J\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

- Evaluaremos *f* en todos los puntos obtenidos y en los vértices de la figura: Resulta que el mínimo absoluto se alcanza en el punto $E\left(-\sqrt{2},0\right)$, mientras que el máximo absoluto se alcanza en $J\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

— —

4. [0.5+1.5 PUNTOS] Probar que la expresión

$$yz^4+x^2z^3-e^{xyz}=0$$

define a $z=z(x,y)$ en un entorno de $(1,0)$. Calcular, en dicho punto, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

SOLUCIÓN:

(4.a) Se trata de probar que el punto $(1,0)$ satisface la expresión

$$\Phi(x,y,z)=yz^4+x^2z^3-e^{xyz}=0$$

lo cual ocurre siempre que $z^3=1$, es decir, si $z=1$. Como además se tiene que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(1,0,1)=4yz^3+3x^2z^2-xye^{xyz}\ |_{(1,0,1)}=3\neq 0$$

es cierto que $z=z(x,y)$ en un entorno de $(1,0)$.

(4.b) Si en la expresión

$$y\cdot z(x,y)^4+x^2z(x,y)^3-e^{xyz(x,y)}=0 \qquad (*)$$

derivamos respecto x :

$$4yz^3z_x+2xz+3x^2z^2z_x-e^{xyz}(yz+xyz_x)=0$$

de donde

$$z_x=\frac{e^{xyz}yz-2xz^3}{4yz^3+3x^2z^2-e^{xyz}xy} \qquad (**)$$

y particularizando en $(1,0,1)$, resulta

$$z_x(1,0)=\frac{-2}{3}$$

Derivando $(*)$ respecto de y :

$$z+y4z^3z_y+3x^2z^2z_y-e^{xyz}(xz+xyz_y)=0$$

y si particularizamos en $(1,0,1)$,

$$1+3z_y(1,0)-1=0$$

por lo que

$$z_y(1,0)=0$$

Derivando $(**)$ respecto de y :

$$z_{xy} = \frac{(e^{xyz}(xz + xyz_y)yz + e^{xyz}z + e^{xyz}yz_y - 6xz^2z_y)(4yz^3 + 3x^2z^2 - e^{xyz}xy) - Cont}{(4yz^3 + 3x^2z^2 - e^{xyz}xy)^2}$$

$$\frac{Cont\ldots -(e^{xyz}yz - 2xz^3)(4z^3 + 12yz^2z_y + 6x^2zz_y - e^{xyz}(xz + xyz_y)xy - e^{xyz}x)}{(4yz^3 + 3x^2z^2 - e^{xyz}xy)^2}$$

y particularizando en $(1,0,1)$, resulta

$$z_{xy}(1,0) = \frac{(1)(3) - (-2)(3)}{9} = 1$$

_ _

5. [1 PUNTO] Calcular

$$\iiint_V \frac{\exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz$$

siendo V el volumen limitado inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el plano $z = 4$.

SOLUCIÓN:

Sólo hemos de realizar un cambio a coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta; \qquad y = r\sin\theta; \qquad z = z; \qquad J = r$$

teniendo en cuenta que (al ser la proyección en el plano OXY el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$; y que z varía entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$) se verifica

$$0 \leq \theta \leq 2\pi; \qquad 0 \leq r \leq 2; \qquad r^2 \leq z \leq 4$$

De esta forma

$$\iiint_V \frac{\exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_{r^2}^4 \frac{e^r}{r} rdz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^r(4 - r^2)dr = \ldots = 4\pi(e^2 - 1)$$

donde la primera integral es inmediata, y la 2ª hay que hacerla dos veces por partes.

_ _

6. [0.5+0.5+1 PUNTOS] Resolver los siguientes apartados:

a. La edo de 1er orden

$$2xy \cdot y' + x^2 - y^2 = 0$$

y probar que la solución obtenida efectivamente lo es.

b. Hallar el valor de k para que la edo de 1er orden

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

sea exacta. Resolver la edo para dicho valor.

c. Resolver la siguiente edo lineal

$$y''' + 6y'' + 15y' + 14y = 2x$$

SOLUCIÓN:

(6.a) Si escribimos la edo en la forma

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

se observa que es una edo homogénea. Aplicaremos entonces el cambio de variable $y = v \cdot x$, de donde $dy = vdx + xdv$.

De esta forma resulta

$$(x^2 - v^2x^2)dx + 2x^2v(vdx + xdv) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$(x^2 + v^2x^2)dx + 2x^3vdv = 0$$

que podemos separar en la forma

$$\frac{v}{1+v^2}dv = \frac{-x^2}{2x^3}dx = -\frac{dx}{2x}$$

Integrando ambos miembros,

$$\frac{1}{2}\log(1+v^2) = -\frac{1}{2}\log x + cte$$

de donde

$$\sqrt{1+v^2}\,\sqrt{x} = k \Leftrightarrow (1+v^2)x = K$$

es decir

$$v^2 = \frac{K}{x} - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{K}{x} - 1 \Leftrightarrow y^2 = Kx - x^2$$

Para probar que esta relación nos da (de forma implícita) la solución de la edo inicial, sólo hemos de tener en cuenta que, derivando implícitamente, se verifica

$$2y \cdot y' = K - 2x$$

por lo que

$$y' = \frac{K-2x}{2y}$$

Así, si sustituimos en la edo inicial,

$$2xy \cdot y' + x^2 - y^2 = 2xy\frac{K-2x}{2y} + x^2 - (Kx - x^2) = 0$$

por lo que efectivamente $y^2 = Kx - x^2$ es solución de la edo inicial.

(6.b) Para que sea exacta la edo

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

se ha de verificar que

$$\frac{\partial(y^3 + kxy^4 - 2x)}{\partial y} = \frac{\partial(3xy^2 + 20x^2y^3)}{\partial x}$$

es decir

$$3y^2 + 4kxy^3 = 3y^2 + 40xy^3 \Leftrightarrow k = 10$$

Pasemos entonces a resolver la edo exacta

$$(y^3 + 10xy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

Como ha de ser

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = y^3 + 10xy^4 - 2x \Rightarrow f(x,y) = xy^3 + 5x^2y^4 - x^2 + g(y)$$

y para determinar $g(y)$ usaremos que

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow 3xy^2 + 20x^2y^3 = 3xy^2 + 20x^2y^3 + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = cte$$

Por tanto, tendremos que

$$f(x,y) = xy^3 + 5x^2y^4 - x^2 + cte$$

y que la solución de la edo exacta vendrá dada por

$$xy^3 + 5x^2y^4 - x^2 = Cte$$

(6.c) Podemos comprobar que las raíces de la ecuación característica $r^3 + 6r^2 + 15r + 14 = 0$ son $r_1 = -2$ y $r_{2,3} = -2 \pm i\sqrt{3}$. De esta forma la solución general de la edo homogénea vendrá dada por

$$y_{GH} = C_1 e^{-2x} + e^{-2x}\left(C_2 \cos\left(\sqrt{3}\,x\right) + C_3 \sin\left(\sqrt{3}\,x\right)\right)$$

Por coeficientes indeterminados, probaremos como solución particular de la edo no homogénea, la función

$$y_{PNH} = Ax + B$$

donde los coeficientes A y B se obtienen de forma inmediata sin más que sustituir en la ecuación inicial: Como $y'_{PNH} = A$ e $y''_{PNH} = y'''_{PNH} = 0$, se verificará

$$0 + 7 \cdot 0 + 15A + 14(Ax + B) = 2x \Rightarrow A = \frac{1}{7},\ B = -\frac{15}{98}$$

De esta forma, la solución general de la edo no homogénea viene dada por

$$y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH} = C_1 e^{-2x} + e^{-2x}\left(C_2 \cos\left(\sqrt{3}\,x\right) + C_3 \sin\left(\sqrt{3}\,x\right)\right) + \frac{x}{7} - \frac{15}{98}$$